Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Мантуров, Игровой подход к ценообразованию в условиях конкуренции,
УМН, 1996, том 51, выпуск 1, 155–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm930>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 18:11:43

ИГРОВОЙ ПОДХОД К ЦЕНООБРАЗОВАНИЮ В УСЛОВИЯХ КОНКУРЕНЦИИ

О. В. МАНТУРОВ

Пусть две конкурирующие стороны – коммерсант один и коммерсант два – находятся в следующих условиях. Им известно, что некий продавец согласен продать товар за a рублей, а некоторый покупатель согласен заплатить за этот товар b рублей, $a < b$. Как первый, так и второй коммерсант желают получить прибыль от разницы между ценой покупки товара у продавца и ценой продажи товара покупателю.

Правила покупки товара таковы: каждый из коммерсантов независимо от конкурента сообщает продавцу цену, которую он согласен заплатить (эта информация недоступна конкурирующей стороне). Продавец продает товар тому коммерсанту, который предложил более высокую цену, а в случае совпадения цен каждый коммерсант покупает половину товара, предназначенного к продаже.

Таким образом, победа на торгах приносит победителю доход в $b - a$ рублей; в случае, когда оба коммерсанта предложили одинаковые суммы, прибыль каждого коммерсанта составит $(b - a)/2$ рублей.

Как в теории, так и на практике невозможно допускать в качестве цен произвольные вещественные числа между a и b . Условимся, что в распоряжении коммерсантов имеются следующие возможности для участия в торгах: каждый из коммерсантов может назвать в качестве цены одно из чисел

$$(1) \quad a, a + \frac{(b-a)}{n}, a + \frac{2(b-a)}{n}, \dots, a + \frac{n(b-a)}{n},$$

где n – некоторое заданное натуральное число.

Пусть стратегия первого коммерсанта состоит в том, что указанные выше цены он называет с вероятностями

$$(2) \quad p_0, p_1, p_2, \dots, p_n,$$

соответственно, а стратегия второго коммерсанта определяется вероятностями

$$(3) \quad q_0, q_1, q_2, \dots, q_n.$$

Упорядоченные наборы чисел (2) и (3) будем обозначать через $\vec{p}$ и $\vec{q}$, соответственно. Будем считать, что $a = 0$, $b = n$, и числа (1) имеют вид $0, 1, 2, \dots, n$. Это не внесет серьезных изменений в нижеследующую постановку задачи.

Имеем две матрицы F и G размера $n \times n$ с элементами

$$f_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } i < j, \\ (b-a)/2 & \text{при } i = j, \\ n-i & \text{при } j < i, \end{cases}$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

$$g_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } j < i, \\ (b-a)/2 & \text{при } i = j, \\ n-i & \text{при } i < j, \end{cases}$$

$i = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Элементы f_{ij} , g_{ij} матриц F , G означают выигрыши коммерсантов при назначении цен: i рублей первым из них и j рублей вторым.

При описанных выше условиях следующее поведение конкурирующих коммерсантов является в известной мере разумным и позволяет поставить точную математическую задачу об оптимальных стратегиях и справедливой цене. Средний выигрыш в этой игре однозначно определяет среднюю цену, по которой будет куплен товар у продавца. Эта цена будет, очевидно, не ниже a и не выше b . Ее величина будет отражать влияние конкуренции.

Постановка задачи и ее численное решение для небольших значений n является основной целью данной работы.

При фиксированном наборе $\vec{p}^* = (p_0^*, p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*)$ математическое ожидание выигрыша второго коммерсанта $g = \sum_{i=0}^{n-1} g_{ij} p_i^* q_j$. Естественно, второй коммерсант, заботясь о максимальном своем выигрыше, должен выбрать стратегию q^* такую, что $\sum_{ij} g_{ij} p_i^* q_j^* > \sum_{ij} g_{ij} p_i^* q_j$ для произвольного $q^* = (q_0, q_1, q_2, \dots, q_n)$, $q_j \geq 0$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$, $\sum_{j=0}^n q_j = 1$.

Линейная функция g имеет вид $g = \sum_{j=1}^{n-1} A_j q_j$, где $A_j = \sum_{i=0}^{n-1} g_{ij} p_i^*$.

Очевидно, что если среди коэффициентов A_j имеется единственный максимальный (пусть для определенности $A_k > A_j$, $j = 0, 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n-1$), то максимальное значение функции $g(\vec{p}^*, \vec{q})$ достигается при $\vec{q}^* = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (единица находится на k -м месте) и равно $\sum_{i=0}^{n-1} g_{ik} p_i^*$. Разумеется, это значение зависит от изначально взятых $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$. Выберем эти вероятности так, чтобы функция $f(\vec{p}, \vec{q}^*)$ при установленном значении $\vec{q}^*$ достигала максимального значения.

Обе описанные выше задачи (нахождения максимума g по $\vec{q}$ при фиксированном $\vec{p}^*$ и нахождения максимума f по $\vec{p}$ при найденном значении $\vec{q}^*$) являются задачами линейного программирования.

Ниже дается точная математическая постановка этих задач и приводится их численное решение для $n = 4, \dots, 10$.

Напомним, что коэффициенты A_j в разложении функции g по $q_0, q_1, q_2, \dots, q_n$ при фиксированных $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ ($g = \sum_{i=0}^{n-1} A_{ij} q_j$) имеют вид: $A_j = \sum_{i=0}^{n-1} g_{ij} p_i$ и являются линейными функциями от $p_0, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$. Легко видеть, что при выполнении условий:

$$(4) \quad A_0 = A_k \leq 0, A_1 = A_k \leq 0, A_2 = A_k \leq 0, \dots, A_{n-1} = A_k \leq 0,$$

$\sum_{i=0}^n q_i = 1$, максимальное значение линейной функции g от переменных $q_0, q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$ достигается при $q_k = 1$ и $q_i = 0$, $i = 0, 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n-1$, и равно $A_k(p_0, p_1, p_2, \dots, p_{n-1})$. Рассмотрим следующую задачу линейного программирования: найти максимум линейной функции $A_k(p_0, p_1, p_2, \dots, p_{n-1})$ при условии, что переменные $p_0, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ неотрицательны и удовлетворяют условиям (4). В силу принятых выше соглашений и обозначений поставленная задача полностью определена натуральными числами n , $k \leq n$. Обозначим эту задачу через $\text{Prob}(n, k)$.

Для численного решения задач $\text{Prob}(n, k)$ был применен стандартный алгоритм симплексного метода. Ниже приводятся результаты соответствующих компьютерных вычислений. Через U и V обозначены средние выигрыши первого и второго коммерсанта, соответственно, Z означает среднюю цену, по которой куплен товар (при условии, что коммерсанты торговались следуя указанным выше принципам), Y означает отношение Z к $b - a$:

$\text{Prob}(4, 1)$; $\vec{p} = (1/2, 0, 1/2, 0, 0)$; $U = 1$, $V = 2$, $Z = 1$, $Y = 1/4 = 0.25$;

$\text{Prob}(5, 1)$; $\vec{p} = (1/4, 1/4, 0, 1/2, 0, 0)$; $U = 3/2$, $V = 7/4$, $Z = 7/4$, $Y = 7/20 = 0.35$;

$\text{Prob}(6, 1)$; $\vec{p} = (9/35, 6/35, 10/35, 10/35, 0, 0)$; $U = 65/35$, $V = 69/35$, $Z = 76/35$, $Y = 76/210 = 0.361905$;

$\text{Prob}(7, 1)$; $\vec{p} = (4/11, 2/11, 0, 3/11, 2/11, 0, 0, 0, 0)$; $U = 24/11$, $V = 34/11$, $Z = 19/11$, $Y = 19/77 = 0.246753$;

$\text{Prob}(8, 1)$; $\vec{p} = (25/84, 0, 10/84, 14/84, 7/84, 28/84, 0, 0, 0, 0)$; $U = 31/12$, $V = 235/84$, $Z = 220/84$, $Y = 220/672 = 0.327381$;

$\text{Prob}(9, 1)$; $\vec{p} = (45/158, 15/158, 0, 20/158, 8/158, 34/158, 36/158, 0, 0, 0, 0)$; $U = 464/158$, $V = 465/158$, $Z = 493/158$, $Y = 493/1492 = 0.346695$;

$\text{Prob}(10, 1)$; $\vec{p} = (245/687, 70/687, 0, 90/687, 30/687, 138/687, 114/687, 0, 0, 0, 0, 0)$; $U = 2271/687$, $V = 2765/687$, $Z = 1834/687$, $Y = 1834/6870 = 0.266958$.

Принято редколлегией
30.10.1995