Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Д. Елагин, Теория спуска для производных категорий, *УМН*, 2009, том 64, выпуск 4, 173–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9300>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 06:44:52

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Теория спуска для производных категорий

А. Д. Елагин

Пусть $X \xrightarrow{p} S$ – плоский морфизм схем. Когомологическая теория спуска позволяет описывать категорию когерентных пучков на S в терминах категории когерентных пучков на X . Наша цель – построить аналогичную теорию для производных категорий, т. е. сформулировать условия на морфизм p , при которых функтор сравнения, доставляемый теорией спуска, является эквивалентностью.

Пусть X и S – отделимые схемы конечного типа над полем. Обозначим через p_i и p_{ij} проекции расслоенных произведений $X \times_S X$ и $X \times_S X \times_S X$ на соответствующие сомножители. Производную категорию $\mathcal{D}(\mathrm{qcoh}(X))$ мы будем обозначать через $\mathcal{D}(X)$, а производные функторы прямого и обратного образов – через p_* и p^* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Объекты категории данных спуска $\mathcal{D}(X)/p$ – это пары (F, θ) , состоящие из объекта $F \in \mathcal{D}(X)$ и изоморфизма $\theta: p_1^* F \rightarrow p_2^* F$ объектов на $X \times_S X$ таких, что на $X \times_S X \times_S X$ выполнено условие коцикла: $p_{13}^* \theta = p_{23}^* \theta \circ p_{12}^* \theta$. Морфизмы из (F_1, θ_1) в (F_2, θ_2) в $\mathcal{D}(X)/p$ – это такие морфизмы $f: F_1 \rightarrow F_2$ в $\mathcal{D}(X)$, что $p_2^* f \circ \theta_1 = \theta_2 \circ p_1^* f$.

Функтором сравнения называется функтор $\Phi: \mathcal{D}(S) \rightarrow \mathcal{D}(X)/p$, определяемый по правилу: $\Phi(H) = (p^* H, \theta)$ на объектах и $\Phi(g) = p^* g$ на морфизмах, где $\theta: p_1^* p^* H \xrightarrow{\sim} p_2^* p^* H$ – канонический изоморфизм.

Имеется еще одна конструкция для задания данных спуска – это комодули над комонадой, определяемой парой сопряженных производных функторов p^* и p_* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Объекты категории данных спуска $\mathcal{D}(X)_{T_p}$ – это пары (F, h) , состоящие из объекта $F \in \mathcal{D}(X)$ и морфизма $h: F \rightarrow p^* p_* F$ таких, что $\varepsilon(F) \circ h = \mathrm{Id}_F$ и $p^* p_*(h) \circ h = p^* \eta(p_* F) \circ h$ (где $\varepsilon: p^* p_* \rightarrow \mathrm{Id}$ и $\eta: \mathrm{Id} \rightarrow p_* p^*$ – канонические морфизмы сопряжения). Морфизмы из (F_1, h_1) в (F_2, h_2) в $\mathcal{D}(X)_{T_p}$ – это такие морфизмы $f: F_1 \rightarrow F_2$ в $\mathcal{D}(X)$, что $p^* p_*(f) \circ h_1 = h_2 \circ f$.

Как и выше, определяется функтор сравнения $\Phi': \mathcal{D}(S) \rightarrow \mathcal{D}(X)_{T_p}$: положим $\Phi'(H) = (p^* H, h)$ и $\Phi'(g) = p^* g$, где h – канонический морфизм $p^* H \rightarrow p^* p_* p^* H$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Категории данных спуска из определений 1 и 2 эквивалентны, т. е. существует эквивалентность $\Psi: \mathcal{D}(X)/p \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}(X)_{T_p}$ такая, что $\Phi' \cong \Psi \circ \Phi$.

Работа выполнена при поддержке программы “Ведущие научные школы” (проект НШ-1987.2008.1) и РФФИ (проект 09-01-00242-а).

Ответ на поставленный в начале работы вопрос дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. *Функторы сравнения $\mathcal{D}(S) \rightarrow \mathcal{D}(X)/p$ и $\mathcal{D}(S) \rightarrow \mathcal{D}(X)_{T_p}$ являются эквивалентностями тогда и только тогда, когда при естественном морфизме $\mathcal{O}_S \rightarrow R p_* \mathcal{O}_X$ пучок $\mathcal{O}_S$ отщепляется прямым слагаемым.*

Доказательство основано на применении общекатегорной теоремы Бека [1; п. 6.7].

СЛЕДСТВИЕ 5. *Пусть плоский морфизм схем $p: X \rightarrow S$ имеет квазисечение, т. е. существует подсхема $Y \subset X$ такая, что ограничение $p|_Y: Y \rightarrow S$ – конечный плоский морфизм. Тогда $\mathcal{D}(S) \cong \mathcal{D}(X)/p \cong \mathcal{D}(X)_{T_p}$.*

Аналогичные результаты верны для сравнения эквивариантных производных категорий с обычными. Предположим, что алгебраическая группа G над полем k действует на отделимой схеме X конечного типа над k . Пусть $\mathcal{D}^G(X) = \mathcal{D}(\mathrm{qcoh}^G(X))$ обозначает производную категорию G -эквивариантных квазикогерентных пучков на X . Обозначим через a и p_2 соответственно морфизм действия и проекцию на второй сомножитель $G \times X \rightarrow X$, через $\mu: G \times G \rightarrow G$ – умножение. По образцу определения 1 дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Объекты категории $\mathcal{D}(X)^G$ – это пары (F, θ) , где $F \in \mathcal{D}(X)$, а $\theta: p_2^* F \rightarrow a^* F$ – изоморфизм объектов на $G \times X$ такой, что на $G \times G \times X$ выполнено условие коцикла: $(\mu \times 1)^* \theta = (1 \times a)^* \theta \circ p_{23}^* \theta$. Морфизмы из (F_1, θ_1) в (F_2, θ_2) в $\mathcal{D}(X)^G$ – это такие морфизмы $f: F_1 \rightarrow F_2$ в $\mathcal{D}(X)$, что $p_2^* f \circ \theta_1 = \theta_2 \circ p_1^* f$.

Для случая конечной группы изоморфизм θ состоит из изоморфизмов $\theta_g: F \xrightarrow{\sim} g^* F$ для всех $g \in G$, а условие коцикла имеет вид “ $\theta_{gh} = h^* \theta_g \circ \theta_h$ для всех $g, h \in G$ ”.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть группа G линейно редуктивна. Тогда $\mathcal{D}^G(X) \cong \mathcal{D}(X)^G$.*

Фактически, эта теорема является частным случаем теоремы 4, примененной к морфизму стеков $X \rightarrow X//G$. Условие из теоремы 4 сводится к тому, что естественное вложение представлений $k \rightarrow k[G]$ отщепляется прямым слагаемым, это выполнено в силу полной приводимости представления $k[G]$. Применяя теорему 7, мы получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 8. *Пусть для производной категории $\mathcal{D}(X)$ имеется полуортогональное разложение $\langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \rangle$. Допустим, что его компоненты инвариантны относительно действия линейно редуктивной группы G на X , т. е. что подкатегории $p_2^* \mathcal{A}_i$ и $a^* \mathcal{A}_i$ в $\mathcal{D}(G \times X)$ совпадают при всех i . Тогда категория $\mathcal{D}^G(X)$ допускает полуортогональное разложение $\langle \mathcal{A}'_1, \dots, \mathcal{A}'_n \rangle$. Здесь $\mathcal{A}'_i$ обозначает полную подкатегорию в $\mathcal{D}^G(X)$, образованную объектами, которые попадают в $\mathcal{A}_i$ при забывании группового действия.*

Все утверждения этой статьи дословно переносятся на случаи ограниченных производных категорий когерентных пучков и категорий совершенных комплексов с одной оговоркой: в теореме 4 “тогда и только тогда” нужно заменить на “если”.

Список литературы

[1] С. Маклейн, *Категории для работающего математика*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2004; пер. с англ.: S. MacLane, *Categories for the working mathematician*, 2nd ed., Grad. Texts in Math., 5, Springer-Verlag, New York, 1998.

А. Д. Елагин (A. D. Elagin)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: alexelagin@rambler.ru

Представлено А. Г. Сергеевым
Принято редколлегией
10.06.2009