Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. М. Устиновский, Операция удвоения многогранников и действия тора, *УМН*, 2009, том 64, выпуск 5, 181–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9301>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 12:58:57

Операция удвоения многогранников и действия тора

Ю. М. Устиновский

В заметке определяется операция удвоения на простых многогранниках и приводится формула, связывающая h -полиномы исходного и нового многогранников. В качестве примера применения этой операции дается доказательство гипотезы о торическом ранге для момент-угол-многообразий Z_P . Для доказательства последней мы устанавливаем связь между момент-угол-многообразиями и их вещественными аналогами, здесь нам и понадобится операция удвоения.

Пусть n -мерный простой многогранник P с m гипергранями задан системой в $\mathbb{R}^n$:

$$(x, a_i) + b_i \geq 0, \quad x, a_i \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, m.$$

В таком случае P отождествляется с пересечением положительного ортанта $\mathbb{R}_{\geq}^m$ и образа вложения $i_P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $i_P(x) = A_P(x) + b_P$, где A_P – матрица размера $m \times n$, по строкам которой записаны векторы a_i , а b_P – вектор-столбец из b_i . Зададим образ вложения i_P системой $m - n$ уравнений в $\mathbb{R}^m$:

$$\sum_{i=1}^m c_{j,i} x_i = q_j, \quad j = 1, \dots, m - n. \quad (1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Удвоением многогранника P называется многогранник $L(P)$, заданный системой $m - n$ уравнений в $\mathbb{R}_{\geq}^{2m}$:

$$\sum_{i=1}^m c_{j,i} (x_i + x'_i) = q_j, \quad j = 1, \dots, m - n.$$

Заметим, что $L(P)$ есть $(m+n)$ -мерный простой многогранник с $2m$ гипергранями, $L(P \times Q) = L(P) \times L(Q)$. Если $\{v_1, \dots, v_m\}$ – диаграмма Гейла многогранника P (см. [1]), то $\{v_1, v_1, \dots, v_m, v_m\}$ – диаграмма Гейла многогранника $L(P)$.

Пусть $f_{n-i,i}$ – число граней многогранника P размерности $n - i$. Тогда h -полином многогранника P называется полином, определяемый соотношением $h(P)(\alpha, t) = f(\alpha - t, \alpha)$, где $f(P)(\alpha, t) = \alpha^n + f_{n-1,1} \alpha^{n-1} t + \dots + f_{0,n} t^n$.

ЛЕММА 2. $h(L(P))(\alpha, t) = \sum (-1)^{\text{codim } G} (\alpha t)^{\text{codim } G} (\alpha + t)^{m - \text{codim } G} h(G)(\alpha, t)$, где суммирование ведется по всем граням P , включая сам многогранник.

Пусть $(\mathcal{P}, d)$ – дифференциальное кольцо простых многогранников [2]. Умножение в $\mathcal{P}$ задается произведением многогранников, сложение формально, а дифференциал задается формулой $d(P) = \sum F_i$, где в правой части стоит сумма гиперграней многогранника P . Пусть $h: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{Z}[\alpha, t]$ – гомоморфизм, определяемый h -полиномом, тогда $h(d(P))(\alpha, t) = (\partial_\alpha + \partial_t)h(P)(\alpha, t)$ [2]. Это позволяет переформулировать лемму 2 следующим образом:

$$h(L(P))(\alpha, t) = (\alpha + t)^m \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} (\alpha t)^i (\alpha + t)^{-i} (\partial_\alpha + \partial_t)^i \right) h(P)(\alpha, t).$$

Дифференциальный оператор, заключенный в скобки, мультипликативен, поэтому, вычислив его значение на α и t , мы получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. $h(L(P))(\alpha, t) = (\alpha + t)^{m-n} h(P)(\alpha^2, t^2)$.

Теперь перейдем к основному для нас примеру применения операции удвоения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $\mu: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{R}_{\geq}^m$, $\mu(z_1, \dots, z_m) = (|z_1|^2, \dots, |z_m|^2)$, – проекция на пространство орбит стандартного действия тора T^m . Момент-угол-многообразиям Z_P называется множество $\mu^{-1}(i_P(P))$ (см. [3]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $\pi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_{\geq}^m$, $\pi(x_1, \dots, x_m) = (x_1^2, \dots, x_m^2)$, – проекция на пространство орбит стандартного действия группы $\mathbb{Z}_2^m$. Вещественным момент-угол-многообразием R_P называется множество $\pi^{-1}(i_P(P))$.

ГИПОТЕЗА О ТОРИЧЕСКОМ РАНГЕ [4]. Если тор T^r действует почти свободно на конечномерном пространстве X , то $\text{hrk}(X) \geq 2^r$, где $\text{hrk}(X) = \sum_i \dim H^i(X)$.

Простота многогранника P влечет наличие на Z_P и на R_P структуры гладкого многообразия, [3]. На многообразиях Z_P имеется естественное действие тора T^m , при этом ранг подтора, действующего на Z_P почти свободно, равен $m - n$ (см. [5]). Мы покажем, что $\text{hrk}(Z_P) \geq 2^{m-n}$, тем самым, гипотеза о торическом ранге выполняется для момент-угол многообразий.

ЛЕММА 6. Всякое многообразие Z_P гомеоморфно многообразию $R_{L(P)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть многогранник P задан системой вида (1). Тогда из определений следует, что многообразие Z_P может быть задано системой уравнений в $\mathbb{C}^m$: $\sum_{i=1}^m c_{j,i} |z_i|^2 = q_j$, $j = 1, \dots, m - n$.

В вещественных координатах $z_i = x_i + \sqrt{-1} y_i$ мы получим систему уравнений $\sum_{i=1}^m c_{j,i} (x_i^2 + y_i^2) = q_j$, $j = 1, \dots, m - n$, задающую многообразие $R_{L(P)}$ в $\mathbb{R}^{2m}$.

ТЕОРЕМА 7. Для когомологий всякого вещественного момент-угол-многообразия R_P справедливо неравенство $\text{hrk}(R_P) \geq 2^{m-n}$.

Следующая лемма доказывается применением точной последовательности Майера–Вьеториса.

ЛЕММА 8. Пусть M – компактное многообразие с краем, а многообразие X получается склейкой двух копий M вдоль общей границы. Тогда $\text{hrk}(X) \geq \text{hrk}(\partial M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. Пусть утверждение доказано для многогранников размерности $n - 1$, а P – произвольный n -мерный простой многогранник. Обозначив $M = \{\vec{x} \in R_P \mid x_1 \geq 0\}$, получаем, что R_P есть склейка двух экземпляров многообразия M вдоль границы: $R_P = M \cup_{\partial M} M$. Поэтому, по лемме 8, $\text{hrk}(R_P) \geq \text{hrk}(\partial M)$. Нетрудно видеть, что $\partial M = \pi^{-1}(i_P(F_1)) = R_{F_1} \times \mathbb{Z}_2^k$, где F_1 – гипергрань, задаваемая обращением x_1 в 0, а k – число гиперграней F многогранника P таких, что $F_1 \cap F = \emptyset$. По предположению индукции для ∂M имеем: $\text{hrk}(\partial M) = 2^k \text{hrk}(R_{F_1}) \geq 2^k \cdot 2^{(m-k-1)-(n-1)}$. Откуда $\text{hrk}(R_P) \geq \text{hrk}(\partial M) \geq 2^{m-n}$, что и требовалось.

С учетом доказанной теоремы и леммы 6 мы получаем следующее неравенство:

$$\text{hrk}(Z_P) = \text{hrk}(R_{L(P)}) \geq 2^{2m-(m+n)} = 2^{m-n},$$

влекущее утверждение гипотезы о торическом ранге для момент-угол-многообразий.

Имеется обобщение операции удвоения для произвольных симплицальных комплексов K , которое позволяет доказать гипотезу о торическом ранге для произвольных момент-угол-комплексов Z_K ; необходимые определения можно найти в [5].

Автор выражает благодарность Т. Е. Панову и С. Гитлеру (Samuel Gitler) за привлечение внимания к операции удвоения многогранников, а также В. М. Бухштаберу и научному руководителю Т. Е. Панову за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

- [1] G. M. Ziegler, *Lectures on polytopes*, Grad. Texts in Math., **152**, Springer, Berlin, 1995.
 [2] В. М. Бухштабер, *Тр. МИАН*, **263** (2008), 1–26. [3] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, N. Ray, *Mosc. Math. J.*, **7:2** (2007), 219–242. [4] S. Halperin, *London Math. Soc. Lecture Notes*, **93**, 1985, 293–306. [5] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Тр. МИАН*, **247** (2004), 41–58.

Ю. М. Устиновский (Yu. M. Ustinovskii)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: yura.ust@gmail.com

Представлено В. М. Бухштабером

Принято редколлегией

16.06.2009