Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Р. Мусин, Обратная теорема об эквивариантных родах, *УМН*, 2009, том 64, выпуск 4, 179–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9302>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 13:54:32

Обратная теорема об эквивариантных родах

О. Р. Мусин

Род Хирцебруха, т.е. гомоморфизм $h: \Omega^* \rightarrow R$, где $\Omega^* = U^*(pt)$ – кольцо комплексных кобордизмов и $R = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ (кольцо рациональных, действительных или комплексных чисел), с точки зрения характеристических классов задается рядом $H(t) \in R[[t]]$, так что $h([\mathbb{CP}^n]) = [H(t)^{n+1}]_n$. С.П. Новиковым [1] было доказано, что ряд $t/H(t)$ совпадает с рядом $g_h^{-1}(t)$, функционально обратным логарифму $g_h(t) = \sum_n h([\mathbb{CP}^n]) t^{n+1}/(n+1)$.

По каждому роду $h: \Omega^* \rightarrow R$ и группе G можно построить *эквивариантный* род $h_G: \Omega_G^* \rightarrow K(BG) \otimes R$ – гомоморфизм из кольца кобордизмов G -многообразий в кольцо $K(BG) \otimes R$ (см. [2], [3]). Назовем род h *жестким*, если для $G = S^1$ образ гомоморфизма h_G принадлежит подкольцу $R \subset K(BG) \otimes R = R[[t]]$.

Пусть $x, y \in R$ и $x + y$ – положительное целое число. Тогда $T_{x,y}$ -род задается как $T_{x,y}([\mathbb{CP}^n]) = (x^{n+1} - (-y)^{n+1})/(x + y)$. В работе [2] И.М. Кричевером доказана жесткость $T_{x,y}$ -рода, из чего было получено новое доказательство формулы Атьи–Хирцебруха для неподвижных точек S^1 -многообразий. (Еще одно доказательство этой формулы содержится в [4].) Целью настоящей заметки является теорема, обратная к теореме Кричевера.

ТЕОРЕМА. Если род $h: \Omega^* \rightarrow R$ жесткий и $g_h^{-1}(\ln z)$ является рациональной функцией от z , то h есть $T_{x,y}$ -род.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $F(z) := g_h^{-1}(\ln z) = P_n(z)/Q_m(z)$, где $P_n(z)$ и $Q_m(z)$ – многочлены степени n и m , не имеющие общих делителей. Заметим, что $F(1) = 0$. Без ограничения общности можно считать, что $F'(1) = 1$ и старший коэффициент $P_n(z)$ равен 1.

Для всякого S^1 -многообразия X образ $h_{S^1}(X) \in R[[z]]$ может быть выражен через инварианты его множества неподвижных точек [2; теорема 1.2]. Для жесткого рода h ряд $h_{S^1}(X)$ является константой в $R[[z]]$.

Рассмотрим стандартное действие окружности (вращение) τ на $S^2 = \mathbb{CP}^1$ с двумя неподвижными точками. Тогда (см. [2])

$$h_{S^1}([\mathbb{CP}^1, \tau]) = \tilde{h} \circ \psi(\mathbb{CP}_1^0) + \tilde{h} \circ \psi(\mathbb{CP}_{-1}^0) = 1/F(z) + 1/F(1/z) \equiv c_1,$$

или

$$Q_m(z)P_n^*(z) + z^{n-m}Q_m^*(z)P_n(z) = c_1P_n(z)P_n^*(z). \quad (1)$$

Здесь $f^*(z) = z^d f(1/z)$, где $f(z)$ – многочлен степени d .

Из (1) вытекает, что если $P_n(a) = 0$, то $P_n^*(a) = 0$ и $P_n(1/a) = 0$. Так как $P_n(1) = 0$, мы получили разложение

$$P_n(z) = (z-1)(z+1)^k \prod_i (z-a_i)(z-1/a_i), \quad k \geq 0.$$

Следовательно, $P_n^*(z) = -P_n(z)$ и (1) влечет

$$z^{n-m}Q_m^*(z) = Q_m(z) - c_1P_n(z). \quad (2)$$

Рассмотрим теперь действие $\rho(\varphi): [z_0 : z_1 : z_2] \rightarrow [z_0 : z_1 : e^{i\varphi} z_2]$ на $\mathbb{CP}^2$. Заметим, что множество неподвижных точек ρ есть $\mathbb{CP}^1 \cup \mathbb{CP}^0$. Тогда по формуле Кричевера [2] получаем

$$h_{S^1}([\mathbb{CP}^2, \rho]) = \tilde{h} \circ \psi(\mathbb{CP}_1^1 + \mathbb{CP}_{-1}^0 \times \mathbb{CP}_{-1}^0) = \tilde{h}(B_1(u)/u^2) + \tilde{h}(1/[u]_{-1}^2),$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{h}(B_1(u)) &= \frac{\tilde{h}(u)}{(1/\tilde{h}(u))g_h^{-1}(g_h(u) + g_h(v))} \pmod{v^2} = \tilde{h}_v\left(\frac{F(z)}{(1/F(z))F(ze^v)}\right) \pmod{v^2} \\ &= \tilde{h}_v\left(\frac{F(z)}{1 + z(F'(z)/F(z))v}\right) \pmod{v^2} = h([\mathbb{CP}^1])F(z) - h([\mathbb{CP}^0])zF'(z).\end{aligned}$$

Поскольку $h([\mathbb{CP}^0]) = h(\mathbf{1}) = F'(1) = 1$, получаем

$$\begin{aligned}h_{S^1}([\mathbb{CP}^2, \rho]) &= \frac{h_1 F(z) - zF'(z)}{F^2(z)} + \frac{1}{F^2(1/z)} \equiv c_2, \quad h_1 = h([\mathbb{CP}^1]), \\ (z^{n-m}Q_m^*)^2 + h_1 P_n Q_m + zP_n Q'_m - zP'_n Q_m &= c_2 P_n^2.\end{aligned}\quad (3)$$

Из (3) следует, что многочлен $(z^{n-m}Q_m^*)^2 - zP'_n Q_m$ делится на P_n . В силу (2) $(Q_m(z) - c_1 P_n(z))^2 - zP'_n Q_m$ делится на P_n , и, стало быть, P_n делит $Q_m - zP'_n$. Так как $m \leq n$ (см. (2)), то $Q_m - zP'_n = cP_n$, т. е.

$$Q_m(z) = cP_n(z) + zP'_n(z). \quad (4)$$

Отсюда следуют равенства $m = n$ и

$$Q_m^*(z) = (c - c_1)P_n(z) + zP'_n(z). \quad (5)$$

Поскольку старший коэффициент P_n равен 1, то $P_n^*(0) = 1$. Отсюда $P_n(0) = -P_n^*(0) = -1$. Из (4), (5) следуют равенства $Q_m(0) = -c$, $Q_m^*(0) = c_1 - c$. Из (3) следует, что

$$c_2 = ch_1 + (c_1 - c)^2. \quad (6)$$

Подставим (4)–(6) в (3). После сокращений и деления на zP_n получим $aP'_n = zP''_n$, где $a = 2c_1 - h_1 - 2c - 1$. Нетрудно увидеть, что $a = n - 1$ и $P_n(z) = z^n - 1$. В силу (4) получаем $Q_m(z) = (c + n)z^n - c$. Пусть $x = c + n$, $y = -c$. Тогда $F(z) = (z^n - 1)/(xz^n + y)$, $n = x + y$, что соответствует $T_{x,y}$ -роду. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. В работе [5] введено понятие *жесткости рода h относительно многообразия X* , т. е. образ $h_{S^1}(X) \in R[[z]]$ является константой. Из доказательства следует, что для обратной теоремы достаточно условия жесткости рода h относительно $\mathbb{CP}^1$ и $\mathbb{CP}^2$.

2. Недавно удалось избавиться от условия рациональности $g_h^{-1}(\ln z)$. Обратная теорема верна и без этого ограничения (работа в печати).

В работе [6] И. М. Кричевер существенно расширил семейство жестких родов. Интересно найти обратную теорему для этих родов.

Автор весьма обязан И. М. Кричеверу за постановку задачи, В. М. Бухштаберу и С. П. Новикову за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] С. П. Новиков, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **32**:6 (1968), 1245–1263. [2] И. М. Кричевер, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **38**:6 (1974), 1289–1304. [3] В. М. Бухштабер, Н. Рэй, *УМН*, **62**:1 (2007), 195–196. [4] О. Р. Мусин, *Матем. сб.*, **116**:3 (1981), 359–369. [5] F. Hirzebruch, T. Berger, R. Jung, *Manifolds and modular forms*, Aspects Math., Vieweg, Braunschweig, 1992. [6] И. М. Кричевер, *Матем. заметки*, **47**:2 (1990), 34–45.

О. Р. Мусин (O. R. Musin)
University of Texas at Brownsville
E-mail: oleg.musin@utb.edu

Представлено И. М. Кричевером
Принято редколлегией
16.06.2009