Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Подольский, А. А. Шерстов, Уменьшение на единицу степени многочлена с заданной знаковой функцией может экспоненциально увеличить его вес и длину, *УМН*, 2009, том 64, выпуск 5, 179–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9303>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 17:02:04

Уменьшение на единицу степени многочлена с заданной знаковой функцией может экспоненциально увеличить его вес и длину

В. В. Подольский, А. А. Шерстов

Булева функция $f: \{-1, +1\}^n \rightarrow \{-1, +1\}$ называется *знаковой функцией* целочисленного многочлена $p(x_1, \dots, x_n)$, если $f(x_1, \dots, x_n) = \operatorname{sgn} p(x_1, \dots, x_n)$, где под функцией sgn мы понимаем знаковую функцию: $\operatorname{sgn} t = 1$, если $t > 0$, $\operatorname{sgn} t = 0$, если $t = 0$, и $\operatorname{sgn} t = -1$, если $t < 0$. При этом многочлен $p(x_1, \dots, x_n)$ называется *пороговым элементом* для булевой функции f . *Весом* порогового элемента называется сумма абсолютных значений его коэффициентов, а его *длиной* называется количество одночленов в нем. *Пороговой степенью* функции f называется наименьшая степень порогового элемента для f . Через $W(f, d)$ будем обозначать наименьший вес порогового элемента степени d для функции f . Через $L(f, d)$ будем обозначать наименьшую длину порогового элемента степени d для функции f . Наконец, через $W^*(f, d)$ будем обозначать наименьшее k , для которого существуют функции $f_i: \{-1, +1\}^n \rightarrow \{-1, +1\}$, $i = 1, \dots, k$, зависящие от не более чем d своих переменных и такие, что $f(x_1, \dots, x_n) = \operatorname{sgn} \left(\sum_{i=1}^k f_i(x_1, \dots, x_n) \right)$ для всех $x_1, \dots, x_n \in \{-1, +1\}$.

Основной вопрос, которым мы задаемся, звучит следующим образом: насколько сильно могут изменяться величины $W(f, d)$ и $L(f, d)$ при небольших изменениях d ? Во всех предыдущих работах величины $W(f, d)$ и $W(f, d+1)$ были полиномиально связаны для всех d (см., например, [1]–[3]). То же самое верно и для величины $L(f, d)$. Наш основной результат – построение для всякого данного d булевой функции f с экспоненциальным разрывом между $W(f, d)$ и $W(f, d+1)$.

ТЕОРЕМА 1. *Для всякого $d = 1, \dots, n-1$ существует (явно заданная) функция $f: \{-1, +1\}^n \rightarrow \{-1, +1\}$ такая, что*

$$W(f, d) = \exp\{\Theta(n)\} \quad \text{и} \quad W(f, d+1) = O(n^2).$$

Другими словами, мы покажем, что необходимый для вычисления заданной функции вес пороговых элементов может сильно измениться в ответ на небольшие изменения степени пороговых элементов.

Кроме того, мы доказываем следующий более сильный результат, относящийся к булевым схемам из функций голосования. *Функцией голосования* называется знаковая функция порогового элемента степени 1 с коэффициентами ± 1 . Полезно иметь в виду, что знаковая функция порогового элемента с весом W – это функция голосования от W функций логического сложения $\oplus$ (и наоборот).

ТЕОРЕМА 2. *Для всякого $d = 1, \dots, n-1$ существует (явно заданная) функция $f: \{-1, +1\}^n \rightarrow \{-1, +1\}$ такая, что:*

- 1) *всякая функция голосования, примененная к произвольным элементам входной степени не выше d и вычисляющая f , должна применяться к не менее чем $\exp\{\Omega(n)\}$ элементам, что также является достаточным;*
- 2) *f вычислима функцией голосования от $O(n^2)$ функций логического сложения $\oplus$ входной степени не выше $d+1$, а также функцией голосования от $O(n^2 d)$ функций голосования входной степени не выше $d+1$.*

Первый автор поддержан РФФИ (грант № 09-01-00709-а) и программой “Ведущие научные школы” (грант НШ-845.2008.1); второй автор поддержан Национальным научным фондом США (гранты CCF-0728536 и “Career Award” на имя профессора А. Р. Клайванса).

Заметим, что первая часть теоремы означает, что $W^*(f, d) = \exp\{\Theta(n)\}$.

Кроме того, мы доказываем результат, аналогичный теореме 1, для пороговой длины.

ТЕОРЕМА 3. *Для всех n и всякого $d = 1, \dots, n-1$ существует (явно заданная) функция $f: \{-1, +1\}^n \rightarrow \{-1, +1\}$ такая, что*

$$2^{(d-1)/2} \leq L(f, d) \leq 2^{d+1} \quad (1)$$

и

$$L(f, d+1) \leq d+3. \quad (2)$$

Оценка $L(f, d)$ в этом результате близка к оптимальной, так как существует не более $(n+1)^d$ одночленов степени не выше d и, следовательно, длина всякого порогового элемента степени не выше d не превышает $(n+1)^d$.

Доказательство теорем 1 и 2 использует совершенно разные методы для различных значений d . Более точно, мы доказываем следующие две промежуточные теоремы.

ТЕОРЕМА 4. *Для любых n и $d = 1, \dots, n-1$ существует (явно заданная) функция $f: \{-1, +1\}^n \rightarrow \{-1, +1\}$ такая, что*

$$W(f, d) = \Theta((n-d)2^{(n-d)/2}) \quad (3)$$

и

$$W(f, d+1) = O((n-d)^2). \quad (4)$$

ТЕОРЕМА 5. *Для всякого $d = 1, \dots, n-1$ существует (явно заданная) функция $f: \{-1, +1\}^n \rightarrow \{-1, +1\}$ такая, что*

$$W^*(f, d) = W(f, d) = 2 \cdot 2^d - 1 \quad (5)$$

и

$$W^*(f, d+1) \leq W(f, d+1) \leq 2d+3. \quad (6)$$

Теорема 1 при $d < n/2$ непосредственно следует из теоремы 4, а при $d \geq n/2$ — из теоремы 5. С помощью более сложного анализа из теорем 4 и 5 выводится и теорема 2.

Авторы благодарны Н. К. Верещагину за полезные обсуждения на тему пороговых элементов.

Список литературы

- [1] M. Goldmann, J. Håstad, A. A. Razborov, *Comput. Complexity*, **2**:4 (1992), 277–300.
 [2] R. Beigel, *Comput. Complexity*, **4**:4 (1994), 339–349. [3] V. V. Podolskii, *Computer science – theory and applications*, Lecture Notes in Comput. Sci., **5010**, Springer, Berlin, 2008, 261–272.

В. В. Подольский (V. V. Podolskii)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова
E-mail: podolskii@lpcs.math.msu.su

Представлено В. М. Бухштабером
 Принято редколлегией
 18.06.2009

А. А. Шерстов (A. A. Sherstov)
 University of Texas in Austin
E-mail: sherstov@cs.utexas.edu