Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Айзенберг, Экспоненциальный закон для K -степени, *УМН*, 2009, том 64, выпуск 4, 175–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9306>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 11:17:26

Экспоненциальный закон для K -степени

А. А. Айзенберг

В этой заметке мы построим операцию на множестве симплициальных комплексов. Она является тензорным произведением на категории симплициальных комплексов и замыкает экспоненциальные законы для операций K -степени топологических пар и K -степени аугментированных алгебр. Операции K -степени и K -произведения стали интенсивно исследоваться в последние десятилетия и нашли приложения в различных областях. В торической топологии K -степени возникают как естественные обобщения комплексов момент-угол и пространств Дэвиса–Янушкиевича [1]. Операция K -произведения топологических пространств обобщает операции декартова произведения, букета и толстого букета пространств. Кроме того, K -произведения позволяют доказывать некоторые утверждения из коммутативной и гомологической алгебры [2].

Пусть K – абстрактный симплициальный комплекс на m вершинах. Множество его вершин обозначим $V(K)$. Рассмотрим пару (X, A) топологических пространств, где $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$, и симплициальный комплекс K на m вершинах. Для каждого симплекса $\sigma \in K$ определим подмножество $(X, A)^\sigma \subset X^m$, $(X, A)^\sigma = \{(x_1, \dots, x_m) \in X^m, x_i \in A, \text{ если } i \notin \sigma\}$. Тогда K -степень – это топологическое пространство $(X, A)^K = \bigcup_{\sigma \in K} (X, A)^\sigma \subset X^m$. Очевидно, что A^m канонически вложено в $(X, A)^K$.

Для каждого симплициального комплекса K рассмотрим функтор $\mathcal{G}_K$ из категории топологических пар в себя. Паре (X, A) он сопоставляет пару $((X, A)^K, A^m)$. Возникает естественный вопрос: как описать композицию двух таких функторов? Чтобы ответить на него, введем операцию композиции симплициальных комплексов.

Пусть K_1, K_2 – симплициальные комплексы. Построим новый комплекс $K = K_1 \circ K_2$ на декартовом произведении $V(K_1) \times V(K_2)$. Обозначим через p_1 и p_2 канонические проекции $V(K)$ на $V(K_1)$ и $V(K_2)$ соответственно. Тогда систему симплексов K определим по правилу: $\sigma \in K$ тогда и только тогда, когда $p_1(\sigma) \in K_1$ и $p_2(p_1^{-1}(v) \cap \sigma) \in K_2$ для всех вершин $v \in V(K_1)$. Построенный комплекс назовем композицией комплексов K и L . Обозначим пару (X, A) через Θ , пусть также $\Theta^K = \mathcal{G}_K(\Theta) = ((X, A)^K, A^m)$. K -степень можно рассматривать как пространство отображений. Скажем, что задано отображение симплициального комплекса K в топологическую пару (X, A) , если задано отображение $p: V(K) \rightarrow X$ такое, что $\{v \in V(K) \mid p(v) \notin A\} \in K$. Тогда пространство всех отображений комплекса K в пару (X, A) с топологией, индуцированной из X^m , совпадает с K -степенью. Следующее утверждение является аналогом классического экспоненциального закона для пространств отображений в случае K -степеней.

ТЕОРЕМА 1 (экспоненциальный закон для K -степеней топологических пар). *Имеется место естественный изоморфизм функторов $\mathcal{G}_K \circ \mathcal{G}_L \cong \mathcal{G}_{K \circ L}$. В введенных обозначениях $(\Theta^L)^K \cong \Theta^{K \circ L}$ для любой топологической пары Θ .*

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть K, L и N – произвольные симплициальные комплексы. Тогда: 1) $(K \circ L) \circ N = K \circ (L \circ N)$ (ассоциативность); 2) $(K * L) \circ N = (K \circ N) * (L \circ N)$ (дистрибутивность справа по отношению к операции джойна); 3) $(K \sqcup L) \circ N = (K \circ N) \sqcup (L \circ N)$ (дистрибутивность справа по отношению к операции дизъюнктного объединения); 4) $\text{pt} \circ K = K \circ \text{pt} = K$; 5) $\Delta_{n-1} \circ K = K * \dots * K$ (n раз), где Δ_{n-1} – полный симплициальный комплекс на n вершинах.

Пусть A и B – конечные частично упорядоченные (ч. у.) множества, а ч. у. множество $A \otimes B$ – их порядковое произведение, т. е. декартово произведение, снабженное лексикографическим порядком (детали см. в [3]). Каждому конечному ч. у. множеству $\mathcal{L}$ сопоставляется симплициальный комплекс $\text{ord}(\mathcal{L})$. Вершинами этого симплициального комплекса являются элементы $\mathcal{L}$, а симплексами – цепи в ч. у. множестве $\mathcal{L}$ (см., например, [1]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. $\text{ord}(A \otimes B) = \text{ord}(A) \circ \text{ord}(B)$.

Рассмотрим симплициальный комплекс K . Его f -полиномом называется многочлен $f_K(t) = f_0 + f_1 t + \dots + f_n t^n$, где $f_i = \#\{\sigma \in K \mid |\sigma| = i\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть K и L – симплициальные комплексы. Тогда $f_{K \circ L}(t) = f_K(f_L(t) - 1)$ – результат подстановки $f_L(t) - 1$ в f_K .

Операция K -степени имеет естественное обобщение (см. [2]). Пусть заданы симплициальный комплекс K на m вершинах и последовательность топологических пар $(X, A) = ((X_1, A_1), \dots, (X_m, A_m))$, $A_i \subseteq X_i$, $A_i \neq \emptyset$. Тогда их K -произведение определяется как $(X_i, A_i)_{i=1, \dots, m}^K = \{(x_1, \dots, x_m) \mid x_i \in X_i, \{i \mid x_i \notin A_i\} \in K\}$. Теорема 1 допускает естественное обобщение на случай K -произведений.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть заданы симплициальные комплексы K_1 на m_1 вершинах и K_2 на m_2 вершинах. Пусть также заданы $m_1 m_2$ топологических пар (X_{ij}, A_{ij}) , $i = 1, \dots, m_1$, $j = 1, \dots, m_2$. Для каждого $i = 1, \dots, m_1$ рассмотрим пару пространств $(Y_i, B_i) = ((X_{ij}, A_{ij})_{j=1, \dots, m_2}^L, A_{i1} \times \dots \times A_{im_2})$. Тогда $(X_{ij}, A_{ij})_{i=1, \dots, m_1, j=1, \dots, m_2}^{K \circ L} \cong (Y_i, B_i)_{i=1, \dots, m_1}^K$.

Пусть A – коммутативная алгебра над кольцом R с коединицей $\varepsilon: A \rightarrow R$. Для каждого комплекса K рассмотрим функтор Стенли–Райснера $\mathcal{F}_K$, действующий из категории алгебр с коединицей в себя. Алгебре (A, ε) он сопоставляет обратный предел диаграммы $\Lambda(A)$, состоящей из алгебр $A^{\otimes \sigma} = \bigotimes_{i \in \sigma} A_i$ и гомоморфизмов $H_{\tau \subset \sigma} = \bigotimes_{i \in \tau} \text{id}_{A_i} \otimes \bigotimes_{i \in \sigma \setminus \tau} \varepsilon_i: A^{\otimes \sigma} \rightarrow A^{\otimes \tau}$, где $\sigma, \tau \in K$, $\tau \subset \sigma$, а алгебры (A_i, ε_i) – копии алгебры (A, ε) . Коединица в обратном пределе задана каноническим отображением $\tilde{\varepsilon}: \varprojlim \Lambda(A) \rightarrow A^{\otimes \emptyset} \cong R$. Также мы будем использовать обозначение $\mathcal{F}_K(A) = A^K$, где A – алгебра с коединицей.

ТЕОРЕМА 2 (экспоненциальный закон для K -степеней алгебр). Пусть K и L – симплициальные комплексы. Тогда существует естественный изоморфизм функторов $\mathcal{F}_K \circ \mathcal{F}_L \cong \mathcal{F}_{K \circ L}$. По-другому это можно записать в виде $(A^L)^K \cong A^{K \circ L}$, где A – коммутативная алгебра с коединицей.

Известен (см. [4]) следующий факт: если $A = R[v]$ – кольцо многочленов от одной переменной, а коединица ε задана правилом $\varepsilon(p) = p(0)$, то $A^K \cong R[K]$ – кольцо Стенли–Райснера комплекса K . Это соображение и теорема 2 позволяют описать кольцо Стенли–Райснера композиции симплициальных комплексов.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть K и L – симплициальные комплексы, $\varepsilon_L: R[L] \rightarrow R = R[\emptyset]$ – гомоморфизм колец Стенли–Райснера, индуцированный вложением $\emptyset \hookrightarrow L$. Аналогично определена коединица $\varepsilon_{K \circ L}: R[K \circ L] \rightarrow R = R[\emptyset]$. Тогда $(R[K \circ L], \varepsilon_{K \circ L}) \cong (R[L], \varepsilon_L)^K$.

Я благодарен своему научному руководителю чл.-корр. РАН В. М. Бухштаберу за формулировки задач и плодотворные обсуждения.

Список литературы

- [1] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Торические действия в топологии и комбинаторике*, МЦНМО, М., 2004. [2] D. J. Anick, *Algebraic topology* (Aarhus, 1982), Lecture Notes in Math., **1051**, Springer, Berlin, 1984, 331–350. [3] R. P. Stanley, *Enumerative combinatorics*. Vol. I, Wadsworth & Brooks/Cole, Monterey, CA, 1986. [4] T. Panov, N. Ray, R. Vogt, *Categorical decomposition techniques in algebraic topology* (Isle of Skye, 2001), Progr. Math., **215**, Birkhäuser, Basel, 2004, 261–291.

А. А. Айзенберг (А. А. Aizenberg)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: ayzenberga@gmail.com

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
24.06.2009