Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Мещеряков, Оценки секционных кривизн римановых симметрических пространств, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 1, 157–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm931>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 16:27:08

ОЦЕНКИ СЕКЦИОННЫХ КРИВИЗН РИМАНОВЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

М. В. МЕЩЕРЯКОВ

Римановы симметрические пространства – хорошо изученный класс римановых многообразий. Тем не менее в литературе, видимо, отсутствует исследование вопроса об оценках их секционных кривизн, кроме случая симметрических пространств ранга 1, изучавшегося в связи с проблемой зашумленности кривизны (см. [1], [2]). Нашей целью будет вычисление критических значений секционной кривизны биинвариантных римановых метрик на некоммутативных компактных группах Ли и получение оценок секционной кривизны римановых симметрических пространств ранга, большего 1. Достаточно ограничиться случаем компактных пространств, так как при переходе к двойственному пространству меняется только знак кривизны. Напомним, что компактные симметрические пространства характеризуются неотрицательностью кривизны. Нулевое значение кривизны всегда достигается, если ранг пространства больше 1.

Пусть $\mathcal{G}$ – алгебра Ли компактной группы Ли G , снабженной биинвариантной римановой метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Секционная кривизна K_σ этой метрики вычисляется по классической формуле $4K_\sigma(x, y) = \langle [x, y], [x, y] \rangle$. Здесь $x, y \in \mathcal{G}$ образуют ортонормированный базис двумерной плоскости σ , и $[x, y]$ – коммутатор в алгебре Ли $\mathcal{G}$ (см. [3]). Пусть $G_2(\mathcal{G})$ – грассманиан двумерных плоскостей в $\mathcal{G}$ и $S = \{(x, y) : \langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle = 1, \langle x, y \rangle = 0\}$ – соответствующее многообразие Штифеля. Определим критические точки функции $K_\sigma : S \rightarrow \mathbb{R}$. Непосредственным вычислением доказывается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Точка $(x, y) \in S$ является критической точкой функции K_σ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия критичности в алгебре $\mathcal{G}$:*

$$[x, y] = z, \quad [y, z] = 4K_\sigma(x, y)x, \quad [z, x] = 4K_\sigma(x, y)y.$$

При $K_\sigma(x, y) > 0$ условия критичности означают, что x, y и z образуют базис трехмерной неабелевой подалгебры компактной алгебры Ли $\mathcal{G}$. Отсюда вытекает описание критических точек функции $K_\sigma : G_2(\mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 1. *Отличные от нуля критические значения функции секционной кривизны K_σ биинвариантной римановой метрики на абелевой компактной группе Ли достигаются на двумерных плоскостях σ , допускающих вложение в простую трехмерную подалгебру алгебры Ли $\mathcal{G}$.*

Трехмерные простые подгруппы группы G обладают важными геометрическими свойствами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Простые группы ранга 1 в компактной неабелевой группе Ли являются вполне геодезическими подмногообразиями постоянной положительной кривизны.*

ТЕОРЕМА 2. *Отличные от нуля критические значения секционной кривизны биинвариантной римановой метрики на неабелевой компактной группе Ли совпадают с кривизнами ее простых подгрупп ранга 1.*

Вычисление указанных в теореме 2 кривизн сводится к вычислению кривизны формы Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$ и определению нормировочных коэффициентов δ , связывающих форму Киллинга алгебры $\mathfrak{su}(2)$ с ограничением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на трехмерную простую подалгебру. Коэффициент δ зависит тем самым от вложения $\mathfrak{su}(2)$ в $\mathcal{G}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть $\varphi : \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathcal{G}$ – вложение в $\mathcal{G}$ и $\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \delta(-b(x, y))$, где b – форма Киллинга алгебры $\mathfrak{su}(2)$. Тогда секционная кривизна соответствующей подгруппы равна $1/8\delta$.*

Кривизна формы Киллинга алгебры $\mathfrak{su}(2)$ равна $1/8$. При умножении метрики на δ секционная кривизна умножается на $1/\delta$. Итак, $1/8\delta$ – искомая кривизна.

Ограничимся в дальнейшем случаем полупростых алгебр Ли, где вычисление δ опирается на теорию представлений алгебры $\mathfrak{su}(2)$. Выбор метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathcal{G}$ подчиним условию нормировки: длина старшего вектора системы корней алгебры $\mathcal{G}$ равна $\sqrt{2}$. Вместо формы Киллинга $b(x, y) = 4 \operatorname{Tr} xy$ на $\mathfrak{su}(2)$ возьмем форму $b_0(x, y) = -\operatorname{Tr} xy$. Форма b_0 удовлетворяет условию нормировки, и ее кривизна равна $1/2$. В этих предположениях число δ будет натуральным

числом, называемым индексом Дынкина подалгебры (см. [5]). Аналогично определяется индекс $i(\rho)$ линейного представления ρ простой алгебры Ли. Индекс j_φ вложения $\varphi: \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathcal{G}$, согласно [5], равен отношению индекса $i(ad \mid \mathfrak{su}(2))$ ограничения присоединенного представления ad алгебры $\mathcal{G}$ к индексу самого ad . Разлагая $ad \mid \mathfrak{su}(2)$ в сумму неприводимых представлений $\rho_1, \dots, \rho_m$, получаем $j_\varphi = \sum_{s=1}^m i(\rho_s)/i(ad)$. Но $i(\rho_s) = 1/6 n_s(n_s + 1)(n_s + 2)$, где n_s — числовая отметка на схеме Дынкина алгебры $\mathfrak{su}(2)$, задающая представление ρ_s (см. [5]). Отсюда приходим к формуле для секционной кривизны подалгебры $\varphi(\mathfrak{su}(2))$:

$$K_\sigma = 3i(ad) \bigg/ \sum_{s=1}^m n_s(n_s + 1)(n_s + 2).$$

В полупростой алгебре Ли всегда имеются подалгебры индекса 1. Поэтому максимумы секционной кривизны реализуются на таких подалгебрах. Более того, сравнение этого факта с классификацией глобально минимальных поверхностей реализующего типа в односвязных компактных группах Ли, найденной А. Т. Фоменко (см. [1]), приводит к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 3. *Глобально минимальные поверхности реализующего типа в компактной односвязной группе Ли имеют кривизну, равную максимуму секционных кривизн бивариантной метрики.*

Указанный в теореме 3 максимум, как и другие критические значения K_σ , дает

ТЕОРЕМА 4. *Отличные от нуля критические значения секционной кривизны метрики Киллинга полупростой компактной группы Ли вычисляются по формуле*

$$K_\sigma = 3 \bigg/ \sum_{s=1}^m n_s(n_s + 1)(n_s + 2).$$

Максимальное значение K_σ равно $1/2i(ad)$.

Индекс присоединенного представления простой компактной алгебры Ли можно вычислить, зная отношение длин корней, пользуясь некоторыми соображениями из [6] (см. § 4, гл. I).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Значения $i(ad)$ простых алгебр Ли даются следующим списком: $A_n(2(n+1))$, $B_n(2(2n-1))$, $C_n(4(n+1))$, $D_n(4(n-1))$, $G_2(8)$, $F_4(18)$, $E_6(24)$, $E_7(36)$, $E_8(60)$.*

В скобках указаны значения индекса $i(ad)$.

Поскольку симметрические пространства вкладываются как вполне геодезические подмногообразия в их группы изометрий (картановская модель), то из теоремы 4 вытекает

ТЕОРЕМА 5. *Секционная кривизна неприводимого компактного (соответственно, некомпактного) симметрического пространства не больше (соответственно, не меньше) чем $\pm 1/i(ad)$ при условии, что метрика пространства индуцируется формой Киллинга.*

Полученные оценки кривизны позволяют выписать явные оценки значений объемов глобально минимальных поверхностей в симметрических пространствах (см. приложение в [7]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Фоменко А. Т. Вариационные методы в топологии. М.: Наука, 1982. [2] Валиев Ф. М. // Сиб. матем. журн. 1979. Т. 20. № 2. С. 248–262. [3] Милнор Дж. Теория Морса. М.: Мир, 1965. [4] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1, 2. М.: Наука, 1981. [5] Винберг Э. Б., Горбачев В. В., Онищик А. Л. // Итоги науки и техники. Современ. пробл. матем. Фундам. напр. Т. 41. М.: ВИНТИ, 1989. С. 5–258. [6] Спрингер Т. А., Штейнберг Р. // Семинар по алгебраическим группам. М.: Мир, 1973. С. 162–262. [7] Дао Чонг Тхи, Фоменко А. Т. Минимальные поверхности и проблема Плато. М.: Наука, 1987.

Принято редколлегией
30.10.1995