Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Ягодковский, Двойственные многозначные группы,
УМН, 2009, том 64, выпуск 5, 183–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9316>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 10:46:06

Двойственные многозначные группы

П. В. Ягодовский

Цель заметки – построение двойственности в теории многозначных групп. Используя связи многозначных групп с алгебраической комбинаторикой, с теорией обычных групп и их представлений, мы проводим исследование связи построенной двойственности с классическими двойственностями в этих областях – двойственностями Понтрягина и Кавады–Дельсарта. Построенная двойственность является первым шагом в изучении для многозначных групп проблемы, которую (для более общего класса объектов) в работе [1] А. М. Вершик назвал проблемой о дилатации коумножений.

Говорят, что множество A несет на себе структуру n -значной группы, если задано умножение $\mu: A \times A \rightarrow (A)^n$, удовлетворяющее естественным обобщениям аксиом ассоциативной группы. (Подробнее см., например, [2]. Понятие m -значной группы было введено В. М. Бухштабером в начале 1990-х годов.) В частности, для каждого элемента a группы должен существовать хотя бы один элемент b , обратный ему, т. е. такой, что в произведении $\mu(a, b)$ содержится единица группы. Многозначная группа называется коммутативной, если $\mu(a, b) = \mu(b, a)$ для всех $a, b \in A$. Пусть C_{ab}^d – число вхождений элемента d в произведение $\mu(a, b)$. Алгебра $\mathbb{C}(A)$ с выделенным базисом, элементы которого отождествлены с элементами группы A , называется групповой алгеброй n -группы A , если ее структурные константы p_{ab}^d в выделенном базисе удовлетворяют равенству $p_{ab}^d = C_{ab}^d/n$. Легко видеть, что групповые алгебры многозначных групп удовлетворяют условию постоянства значности (т. е. $\sum_k p_{ij}^k = 1$ для всех допустимых значений i и j). Важными примерами многозначных групп являются: 1) косетная группа – многозначная группа на множестве орбит действия на (обычной) группе G группы $H \subset \text{Aut}(G)$ с естественной групповой операцией; 2) группа характеров – многозначная группа на множестве характеров неприводимых представлений данной (обычной) группы G с естественной групповой операцией.

Пусть $P \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ – некоторая матрица, в которой элемент в i -й строке на j -м месте будет обозначаться через $p_i(j)$. Пусть x_i , $i = 1, \dots, n$, обозначает i -ю строку матрицы P . Пусть $A(P)$ – линейное пространство линейных комбинаций символов $x_1, \dots, x_n$ с коэффициентами из $\mathbb{C}$. Для произвольной пары элементов x_i и x_j рассмотрим Адамарово (покомпонентное) произведение соответствующих им строк, результат которого разложим по базису $x_1, \dots, x_n$, состоящему из строк матрицы P . Пусть p_{ij}^k – коэффициент при x_k в этом разложении. Положим $x_i \cdot x_j = \sum_{k=1}^n p_{ij}^k x_k$. Легко видеть, что эта формула превращает $A(P)$ в коммутативную алгебру. Определим теперь двойственную по отношению к $A(P)$ алгебру $A^*(P)$ формулой $A^*(P) = A(P^t)$.

Рассуждения § 2.5 монографии [3], проведенные там для $\mathbb{C}$ -алгебр, позволяют установить следующие факты: здесь все неприводимые представления алгебры $A(P)$ являются одномерными и имеют вид $\Delta_j: x_i \rightarrow p_i(j)$, а сама алгебра $A(P)$ изоморфна $\mathbb{C} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}$ (здесь n слагаемых). Однако, разные матрицы P одинакового размера приводят к алгебрам, отличающимся своими выделенными базисами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Следующие условия эквивалентны: 1) алгебра $A(P)$ имеет единицу в числе элементов выделенного базиса; 2) алгебра $A^*(P)$ удовлетворяет условию постоянства значности; 3) одна из строк матрицы P состоит из единиц.

Конечномерная коммутативная алгебра над $\mathbb{C}$ с выделенным базисом $x_1, \dots, x_n$ и единицей x_1 называется псевдогрупповой, если выполнены условия: 1) для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ существует единственное $i' \in \{1, \dots, n\}$ такое, что: $p_{ii'}^k \neq 0$; 2) антилинейное линейное преобразование алгебры, продолжающее соответствие $x_i \rightarrow x_{i'}$, является ее автоморфизмом; 3) $\forall i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ $p_{ij}^k \in \mathbb{R}$ и $p_{ii'}^1 > 0$; 4) эта алгебра удовлетворяет условию постоянства значности. Псевдогрупповые алгебры с неотрицательными и рациональными структурными константами являются групповыми

алгебрами коммутативных конечных многозначных групп, называемых *инволютивными*. Так, косетные группы и группы характеров являются инволютивными.

ТЕОРЕМА 1. *Следующие условия эквивалентны: 1) алгебра $A(P)$ является псевдогрупповой; 2) алгебра $A^*(P)$ является псевдогрупповой; 3) существуют диагональные матрицы D_1 и D_2 с действительными положительными элементами на своих главных диагоналях такие, что матрица $\hat{P} = D_1 P D_2$ является унитарной, она отличается от матрицы $\tilde{P}$ лишь перестановкой строк и имеет один столбец и одну строку, состоящие из действительных положительных чисел.*

Две коммутативные инволютивные многозначные группы M и M^* называются *двойственными*, если их групповые алгебры двойственны, т.е. если $\mathbb{C}(M) \cong A(P)$ и $\mathbb{C}(M^*) \cong A^*(P)$. Но не у каждой группы M существует M^* : если у алгебры $A^*(P)$ некоторые структурные константы отрицательны или иррациональны, то она не является групповой алгеброй какой-либо многозначной группы.

В алгебраической комбинаторике (см. [3]) доказывается, что для любой C -алгебры $\mathcal{C}$ существует матрица $\tilde{P}$ (называемая *собственной*) такая, что $\mathcal{C} \cong A(\tilde{P})$. В работе [4] введено понятие комбинаторной алгебры – C -алгебры специального вида – и доказана эквивалентность между категориями групповых алгебр конечных инволютивных многозначных групп и конечномерных комбинаторных алгебр. Из этого соответствия вытекает, что если комбинаторная алгебра $\mathcal{C}(M)$ отвечает многозначной группе M и $\mathcal{C}(M) \cong A(\tilde{P})$, то $\mathbb{C}(M) \cong A(P)$ и $\tilde{P} = \text{diag}(1/p_{11}', \dots, 1/p_{nn}') \cdot P$. Это соответствие можно продолжить до эквивалентности между категориями псевдогрупповых алгебр и конечномерных коммутативных C -алгебр.

ТЕОРЕМА 2. *Двойственным псевдогрупповым алгебрам $A(P)$ и $A^*(P)$ отвечают двойственные (по Каваде–Дельсарту) коммутативные C -алгебры $\mathcal{C}(P)$ и $\mathcal{C}^*(P)$. Так, двойственным коммутативным инволютивным многозначным группам отвечают двойственные (по Каваде–Дельсарту) коммутативные комбинаторные алгебры.*

ПРИМЕРЫ. 1. Если M – обычная абелева группа, то существует ее двойственная (в смысле нашего определения) группа M^* – это двойственность Понтрягина. 2. Если M – косетная группа абелевой группы G по группе $H \subset \text{Aut } G$, то M^* – тоже косетная группа той же группы G по группе $H \subset \text{Aut } G$. 3. Если M – косетная группа неабелевой группы G по $G \subset \text{Aut } G$ (имеется в виду, что G действует на себе сопряжениями), то M^* будет группой характеров группы G . Двойственность из этого примера имеет важное физическое приложение (см. [5]). 4. Если M – косетная группа неабелевой группы G по $H \subset \text{Aut } G$, где каждая орбита действия группы H на G представляет собой один класс или объединение нескольких классов сопряженных элементов, то двойственная группа M^* существует. 5. Известны примеры ассоциативных схем (см. [3]), у которых часть параметров Крейна иррациональна. Многозначные группы, комбинаторные алгебры которых являются алгебрами смежности таких схем, не имеют двойственных.

Автор выражает глубокую благодарность своему учителю члену-корреспонденту РАН проф. В. М. Бухштаберу за многолетнее внимание и поддержку в работе.

Список литературы

- [1] А. М. Вершик, *Функц. анализ и его прил.*, **41:2** (2007), 24–43. [2] V. M. Buchstaber, *Mosc. Math. J.*, **6:1** (2006), 57–84. [3] Э. Баннаи, Т. Ито, *Алгебраическая комбинаторика*, Мир, М., 1987. [4] В. М. Бухштабер и др., *Функц. анализ и его прил.*, **30:3** (1996), 12–18. [5] V. M. Buchstaber, M. I. Monastyrsky, *J. Phys. A*, **36:28** (2003), 7679–7692.

П. В. Ягдовский (P. V. Yagodovskii)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
27.08.2009