Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Петров, Предельное поведение некоторых случайных блужданий на строгих разбиениях, *УМН*, 2009, том 64, выпуск 6, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9318>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 18:35:42

Предельное поведение некоторых случайных блужданий на строгих разбиениях

Л. А. Петров

В статье строится однопараметрическое семейство марковских процессов с непрерывным временем $\mathbf{X}_\alpha(t)$, $t \geq 0$, на бесконечномерном упорядоченном симплексе

$$\Omega_+ := \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) : x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq 0, \sum_{i=1}^{\infty} x_i \leq 1 \right\}$$

и изучаются некоторые его свойства. Здесь α – параметр, который принимает действительные положительные значения.

Сначала опишем процесс $\mathbf{X}_\alpha(t)$ в терминах его генератора.

В топологии покоординатной сходимости Ω_+ является метризуемым сепарабельным компактом. Обозначим через $C(\Omega_+)$ алгебру непрерывных действительнозначных функций на Ω_+ с поточечными операциями и равномерной нормой. Положим $q_k(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i^{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$, $\mathbf{x} \in \Omega_+$. Функции q_k являются непрерывными и алгебраически независимыми. Любой бесконечный набор функций вида $\{q_{k_1}, q_{k_2}, \dots\}$ разделяет точки пространства Ω_+ . Следуя работе [1], будем называть функции q_k , $k = 1, 2, \dots$, *моментными координатами* на пространстве Ω_+ . Пусть $\mathcal{F}$ – коммутативная алгебра с единицей, свободно порожденная моментными координатами с *четными* номерами: $\mathcal{F} = \mathbb{R}[q_2, q_4, q_6, \dots]$. Зафиксируем произвольное значение параметра $\alpha \in (0, +\infty)$. Определим формальный дифференциальный оператор второго порядка A в алгебре $\mathcal{F}$ следующим образом:

$$A := \sum_{i,j=1}^{\infty} (2i+1)(2j+1)(q_{2i+2j} - q_{2i}q_{2j}) \frac{\partial^2}{\partial q_{2i} \partial q_{2j}} + 2 \sum_{i,j=1}^{\infty} (2i+2j-1)q_{2i-2}q_{2j-2} \frac{\partial}{\partial q_{2i+2j-2}} - \sum_{i=1}^{\infty} (2i+1) \left(2i + \frac{\alpha}{2} \right) q_{2i} \frac{\partial}{\partial q_{2i}}, \quad (1)$$

где для удобства полагаем $q_0 := 1$.

ТЕОРЕМА. 1) Оператор A замыкаем в $C(\Omega_+)$. 2) Его замыкание $\bar{A}$ порождает диффузионный процесс $\{\mathbf{X}_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$ на Ω_+ (под диффузионным процессом мы понимаем строго марковский процесс с непрерывными траекториями). 3) У процесса $\mathbf{X}_\alpha(t)$ существует единственная инвариантная вероятностная мера $\mathbf{P}^{(\alpha)}$. Процесс обратим относительно этой меры. 4) Спектр генератора $\bar{A}$ имеет вид $\{0\} \cup \{-t(t + \alpha/2 - 1) : t = 2, 3, \dots\}$. Собственное значение 0 простое, а кратность t -го равна количеству разбиений числа t в сумму нечетных слагаемых, больших единицы, т. е. числу решений уравнения $3n_3 + 5n_5 + 7n_7 + \dots = t$ в неотрицательных целых числах.

Процесс $\mathbf{X}_\alpha(t)$ на Ω_+ строится как предел случайных блужданий с растущим (но конечным) числом состояний. При этом один шаг n -го блуждания соответствует малому интервалу времени порядка n^{-2} . Перейдем к описанию случайных блужданий.

Пространство состояний n -го блуждания есть множество $\mathbb{S}_n$ всех разбиений числа $n = 0, 1, 2, \dots$ в сумму различных натуральных слагаемых (так называемых *строгих разбиений*), или, что то же самое, множество всех сдвинутых диаграмм Юнга с n клетками. отождествление строгих разбиений со сдвинутыми диаграммами Юнга описано, например, в [2].

Случайные блуждания на $\mathbb{S}_n$, $n = 1, 2, \dots$, строятся в рамках формализма, развитого в работах [1], [3] и др. В нашей конкретной ситуации также используются

результаты работы [4]. Впервые в литературе подобные марковские цепи (на множестве *всех* разбиений) были рассмотрены в работе [5]. Следуя [1], будем называть наши блуждания *марковскими цепями вверх/вниз*. Формализм состоит в следующем. Для каждой борелевской вероятностной меры P на Ω_+ существует канонически с ней связанная последовательность вероятностных мер M_n на $\mathbb{S}_n$. Она называется *когерентным семейством* мер и однозначно определяет меру P . Также можно канонически задать последовательность T_n марковских цепей вверх/вниз, где T_n – соответствующий оператор в пространстве всех функций на $\mathbb{S}_n$. Обозначим это пространство через $\text{Fun}(\mathbb{S}_n)$. Мера M_n является инвариантной мерой для T_n ; цепь эргодична и обратима относительно этой меры. Более подробно о построении мер M_n и цепей T_n см. в [1; § 1].

Найден предел цепей T_n при $n \rightarrow \infty$ в специальном случае меры P на Ω_+ . Эта мера $P = P^{(\alpha)}$ (которая участвует в теореме) определяется по *мультипликативному когерентному семейству* мер $\{M_n^\alpha\}$, зависящему от параметра $\alpha \in (0, +\infty)$. Семейство $\{M_n^\alpha\}$ было введено А. М. Бородиным в работе [6]. Предел цепей T_n и есть процесс $X_\alpha(t)$ на Ω_+ .

Опишем, в каком смысле случайные блуждания T_n сходятся к $X_\alpha(t)$. Для каждого $n = 1, 2, \dots$ рассмотрим вложение $\iota_n: \mathbb{S}_n \hookrightarrow \Omega_+$, $\iota_n(\lambda) = (\lambda_1/n, \lambda_2/n, \dots) \in \Omega_+$, где $\lambda \in \mathbb{S}_n$. Пусть $\pi_n: C(\Omega_+) \rightarrow \text{Fun}(\mathbb{S}_n)$ – соответствующая ι_n проекция пространств функций, т. е. $(\pi_n f)(\lambda) := f(\iota_n(\lambda))$, где $f \in C(\Omega_+)$ и $\lambda \in \mathbb{S}_n$. Путем алгебраических вычислений, которые и составляют основную работу по построению процесса, можно показать, что операторы $n^2(T_n - 1)$ сходятся к оператору A , определенному выше, в том смысле, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\lambda \in \mathbb{S}_n} | (n^2(T_n - 1)\pi_n f)(\lambda) - (\pi_n A f)(\lambda) | = 0 \quad \text{для всех } f \in \mathcal{F}.$$

Из этого факта и общих теорем [7; теорема 5.3] и [8; гл. 1, теорема 6.5] об аппроксимации непрерывной полугруппы дискретными следует, что $T_n^{[n^2 t]} \rightarrow T(t)$, или, более подробно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\lambda \in \mathbb{S}_n} | (T_n^{[n^2 t]} \pi_n f)(\lambda) - (\pi_n T(t) f)(\lambda) | = 0 \quad \text{для всех } f \in C(\Omega_+)$$

равномерно по $t \in [0, t_0]$ для всех $t_0 \geq 0$, где $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ – полугруппа процесса $X_\alpha(t)$, порожденная оператором $\bar{A}$.

Из сходимости дискретных полугрупп $\{1, T_n, T_n^2, \dots\}$ к непрерывной полугруппе $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ можно получить все остальные утверждения нашей теоремы.

Автор выражает благодарность Г. Ольшанскому за постановку задачи и постоянное внимание к работе, а также В. Иванову за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] A. Borodin, G. Olshanski, *Probab. Theory Related Fields*, **144**:1–2 (2009), 281–318; [arXiv:0706.1034v1](#). [2] И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла*, Мир, М., 1985. [3] S. Kerov, A. Okounkov, G. Olshanski, *Internat. Math. Res. Notices*, **1998**:4 (1998), 173–199. [4] В. Н. Иванов, *Записки науч. сем. ПОМИ*, **240** (1997), 115–135. [5] J. Fulman, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **357**:2 (2005), 555–570. [6] А. М. Бородин, *Записки науч. сем. ПОМИ*, **240** (1997), 44–52. [7] H. F. Trotter, *Pacific J. Math.*, **8** (1958), 887–919. [8] S. N. Ethier, T. G. Kurtz, *Markov processes. Characterization and convergence*, Wiley, New York, 1986.

Л. А. Петров (L. A. Petrov)
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН
E-mail: lenia.petrov@gmail.com

Представлено Р. А. Минлосом
Принято редколлегией
09.08.2009