Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Горбачев, А. М. Степин, Об инвариантных мерах для многозначных отображений, *УМН*, 2009, том 64, выпуск 6, 173–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9319>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 12:59:24

Об инвариантных мерах для многозначных отображений

А. Н. Горбачев, А. М. Степин

1. Пусть Ω – пространство с заданной на нем σ -алгеброй измеримых множеств, R – измеримое многозначное отображение Ω в себя, Γ_R – график R .

Мера μ на $\Omega \times \Omega$ называется *инвариантной для R* , если $\mu(\Omega \times \Omega \setminus \Gamma_R) = 0$ и действия горизонтальной и вертикальной проекций (отображений $\pi_1, \pi_2: \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$, $\pi_1(t_1, t_2) = t_1$, $\pi_2(t_1, t_2) = t_2$) на меру μ совпадают (ср. [1]). Другими словами, $\mu(\pi_1^{-1}A \cap \Gamma_R) = \mu(\pi_2^{-1}A \cap \Gamma_R)$ для любого измеримого $A \subset \Omega$. Скажем, что многозначное отображение R пространства Ω в себя параметризовано измеримыми однозначными отображениями $r_1, r_2: \Omega \rightarrow \Omega$, если $\Gamma_R = (r_1(t), r_2(t))$, $t \in \Omega$.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Для многозначного отображения R на множестве Ω , параметризованного отображениями r_1 и r_2 , существует инвариантная мера μ тогда и только тогда, когда существует мера η на Ω такая, что $r_{1*}\eta = r_{2*}\eta$.

Пусть $\tilde{\Gamma}_R: \Omega \rightarrow \Omega \times \Omega$, $\tilde{\Gamma}_R(t) = (r_1(t), r_2(t))$. Тогда мера $\tilde{\Gamma}_R*\eta$ инвариантна для R . Мере η будем называть (r_1, r_2) -инвариантной для многозначного отображения R . Пусть k и l взаимно просты. Линейное (k, l) -отображение S^1 – это многозначное отображение $S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ в себя с параметризацией $r_1(t) = kt \pmod{1}$, $r_2(t) = lt \pmod{1}$.

2. Пусть $r_1, \dots, r_n$ – однозначные непрерывные отображения компактного топологического пространства Ω . Рассмотрим систему уравнений:

$$r_{1*}\nu = r_{2*}\nu = \dots = r_{n*}\nu, \quad (I)$$

где η – вероятностная мера на Ω . В том случае, когда $n = 2$, любое решение системы (I) по определению есть (r_1, r_2) -инвариантная мера для многозначного отображения, параметризованного отображениями r_1 и r_2 .

ТЕОРЕМА 1. Если полугруппа $S = \langle r_1, \dots, r_n \rangle$ правоаменабельна и в S выполнен правый закон сокращения, то существует последовательность элементов групповой алгебры A полугруппы S ($A = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i s_i, s_i \in S, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}$) такая, что ее действие на произвольную конечную меру на Ω имеет предельную точку – решение системы (I).

Полугруппа S обладает аменабельной группой левых частных $G = S^{-1}S$, которая локально “задвигается” в S правыми сдвигами [2].

Пусть $K = \{r_1^{-1}r_2, \dots, r_1^{-1}r_n\} \subset G$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $F_{\varepsilon, K} \subset G$ такое, что $|F_{\varepsilon, K} \triangle kF_{\varepsilon, K}| < \varepsilon |F_{\varepsilon, K}|$ для любого $k \in K$. Для произвольной конечной меры ν на Ω построим последовательность $\nu_N = \frac{1}{|F_{1/N, K}|} \sum_{x \in F_{1/N, K}} (xg_N)_*\nu$, где g_N

задвигает $F_{1/N, K}$ в S . Из ν_N можно выделить подпоследовательность ν_{N_j} , слабо сходящуюся к некоторой нормированной мере $\tilde{\nu}$. При этом для любого $j = 2, \dots, n$ $r_{1*}\nu_{N_j} - r_{j*}\nu_{N_j} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow 0$. Переходя к пределу по N_j , получаем: $r_{1*}\tilde{\nu} = r_{j*}\tilde{\nu}$ для любого $j = 2, \dots, n$. Тем самым $\tilde{\nu}$ – решение системы (I).

Приведем пример отображений $r_1, \dots, r_n$ с полугруппой $S = \langle r_1, \dots, r_n \rangle$ таких, что существует решение системы (I), не являющееся S -инвариантной мерой.

ПРИМЕР. На $S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ рассмотрим отображения $r_i(t) = 2^{n-i}3^i t \pmod{1}$, $i = 0, \dots, n$. Возьмем меру η , инвариантную для отображения $t \rightarrow (3/2)t$ [3]. Тогда $T_{2*}\eta = T_{3*}\eta$, где $T_2: t \rightarrow 2t$ и $T_3: t \rightarrow 3t$. Имеем: $r_{i*}\eta = (\tilde{r}_i T_2)_*\eta = (\tilde{r}_i T_3)_*\eta =$

$r_{i+1}*\eta$, где $\tilde{r}_i(t) = 2^{n-i}3^i t \pmod{1}$. Тем самым η удовлетворяет системе уравнений (1). Мера η абсолютно непрерывна относительно меры Лебега [3] и не совпадает с ней, следовательно, $r_{i*}\eta \neq \eta$ для всех $i = 1, \dots, n$, и η не является S -инвариантной.

3. Пусть P – непустое компактное подмножество локально выпуклого пространства E , μ – вероятностная мера на P . Говорят, что точка $p \in E$ *представлена посредством меры μ* (или *мера μ представляет точку p*), если $f(p) = \int_P f d\mu$ для любого непрерывного линейного функционала f на E . *Крайней точкой* множества P называется точка, которая не может быть линейной комбинацией других элементов P . Обозначение для множества крайних точек: $\text{ex } P$.

ТЕОРЕМА 2. *Существуют многозначное отображение F с множеством инвариантных мер M , мера $t \in M$ и две различные сосредоточенные на $\text{ex } M$ меры, представляющие t .*

Рассмотрим линейное $(2, 3)$ -отображение F (с графиком Γ_F) $S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ в себя. В качестве искомой меры t возьмем абсолютно непрерывную меру с постоянной плотностью на Γ_F . Пусть $A = \alpha_s$ и $\tilde{A} = \tilde{\alpha}_s$ – совокупности однозначных отображений S^1 в себя, задаваемые следующим образом:

$$\alpha_s: \quad r_1(t) = 2(t+s); \quad r_2(t) = 3(t+s), \quad t \in [0, 1/2),$$

$$\tilde{\alpha}_s: \quad r_1(t) = 2(t+s), \quad t \in [0, 1/2); \quad r_2(t) = \begin{cases} 3(t+s), & t \in [0, 1/4) \cup [1/3, 1/2), \\ 3(t+s) + 1/2, & t \in [1/4, 1/3). \end{cases}$$

Для каждого $s \in [0, 1)$ отображения α_s и $\tilde{\alpha}_s$ растягивающие с конечным числом точек разрыва и дважды дифференцируемые в точках непрерывности, следовательно, для них существуют (см. [3]) инвариантные меры μ_s и $\tilde{\mu}_s$ соответственно (на их графиках). При этом меры μ_s и $\tilde{\mu}_s$ инвариантны для F и эргодичны для α_s и $\tilde{\alpha}_s$ соответственно и, значит, являются крайними точками множества инвариантных мер F . Кроме того, меры μ_s и $\tilde{\mu}_s$ попарно различны, так как у них различные носители.

При этом $\int_0^1 \mu_s ds$ и $\int_0^1 \tilde{\mu}_s ds$ ($\left(\int_0^1 \mu_s ds\right)(A) = \int_0^1 \mu_s(A) ds$, $\left(\int_0^1 \tilde{\mu}_s ds\right)(A) = \int_0^1 \tilde{\mu}_s(A) ds$) имеют постоянную плотность на Γ_F .

Тем самым получено два представления точки t мерами, сосредоточенными на различных подмножествах $\text{ex } M$, что и требовалось.

По теореме Шоке–Мейе [4] компактное выпуклое множество P является симплексом тогда и только тогда, когда для любого p из P существует единственная максимальная мера μ_p , которая представляет p . Учитывая, что мера, сосредоточенная на $\text{ex } P$, максимальна [4], получаем:

СЛЕДСТВИЕ 1. *Существуют многозначные отображения, множество инвариантных мер каждого из которых не является симплексом Шоке.*

Список литературы

- [1] А. М. Вершик, *Зап. науч. сем. ЛОМИ*, **72** (1977), 26–61. [2] Р. И. Григорчук, А. М. Степин, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1998, №3, 12–16. [3] А. Lasota, J. A. Yorke, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **186** (1973), 481–488. [4] Р. Фелпс, *Лекции о теоремах Шоке*, Мир, М., 1968.

А. Н. Горбачев (A. N. Gorbachev)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: alex.gorbachev@gmail.com

Представлено Д. В. Аносовым

Принято редколлегией
09.08.2009

А. М. Степин (A. M. Stepin)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова