Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Павлов, Теорема типа больших уклонений для критерия хи-квадрат, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 1, 159–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm932>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 18:31:38

ТЕОРЕМА ТИПА БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ КРИТЕРИЯ ХИ-КВАДРАТ

А. В. Павлов

В заметке найдена асимптотика ошибки второго рода для критерия хи-квадрат в случае фиксированных простой гипотезы и простой альтернативы при асимптотически постоянной ошибке первого рода. Асимптотика приведена в форме $\exp[-n\Lambda(1+o(1))]$, где n – число опытов. Точный вид константы Λ следует из теоремы 1. Значение константы Λ может быть легко вычислено. Вид константы Λ может быть использован для выбора асимптотически оптимального разбиения оси $(-\infty, \infty)$ на непересекающиеся множества, задающие статистику хи-квадрат, причем из теоремы 1 следует, что критерий хи-квадрат является весьма асимптотически эффективным, так как константа Λ принимает большое значение для широкого класса разбиений. С помощью подхода, приведенного в данной статье, возможно получение аналогичных результатов для других критериев.

Методы доказательства теоремы 1 существенно опираются на применение условного биномиального распределения к теореме о больших отклонениях для асимптотически нормальных случайных сумм, приведенной в [1].

Определим статистику хи-квадрат. Рассмотрим разбиение оси $(-\infty, \infty)$ на непересекающиеся множества $\{\Delta_i, i = 1, \dots, k\}$. Пусть $dP_0(t)$ – произвольная мера, такая что $\int_{\Delta_i} dP_0(t) = p_0(\Delta_i) \neq 0, i = 1, \dots, k$. Пусть

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k [\nu(\Delta_i) - np_0(\Delta_i)]^2 / np_0(\Delta_i),$$

где $\nu(\Delta_i)$ – число элементов выборки $\{x_i = \xi_i(\omega), i = 1, \dots, n\}$, принадлежащих $\Delta_i, i = 1, \dots, k$. Случайные величины $\{\xi_i\}$ независимы и одинаково распределены. Мы предполагаем, что гипотеза о совпадении набора $\{p_0(\Delta_i), i = 1, \dots, k\}$ с набором вероятностей $\{p_1(\Delta_i) = P\{\xi_1 \in \Delta_i\}, i = 1, \dots, k\}$ не верна и оцениваем вероятность ошибки второго рода $P\{\chi^2 \in [0, \gamma]\}$ для фиксированной критической области (γ, ∞) , предполагаем, что истинный набор вероятностей для выборки $\{x_i = \xi_i\}$ известен и $p_1(\Delta_i) \neq 0, i = 1, \dots, k$. Обозначим

$$p(i) = p_1(\Delta_i) / \left(1 - \sum_{j=1}^{i-1} p_1(\Delta_j)\right),$$

$$\Delta p(i) = p_0(\Delta_i) - p_1(\Delta_i) \left[\left(1 - \sum_{j=1}^{i-1} p_0(\Delta_j)\right) / \left(1 - \sum_{j=1}^{i-1} p_1(\Delta_j)\right) \right];$$

$$H(r + \alpha) = (r + \alpha) \ln((r + \alpha)/r) - (q - \alpha) \ln((q - \alpha)/q) \geq 2\alpha^2, \quad q + r = 1,$$

где $H(r + \alpha)$ – функция больших отклонений [1, с. 131], [2, с. 539]. В теореме 1 роль r будут играть $p_1(\Delta_1)$ и $p(i)$.

ТЕОРЕМА 1. Если набор вероятностей $\{p_1(\Delta_i) = P\{\xi_1 \in \Delta_i\}, i = 1, \dots, k\}$ для выборки из n независимых одинаково распределенных случайных величин $\{\xi_i\}$ не совпадает с набором вероятностей $\{p_0(\Delta_i), i = 1, \dots, k\}, k > 2$, то

$$P\{\chi^2 \in [0, \gamma]\} = \exp[-\Lambda n(1 + o(1))],$$

где

$$\Lambda = H(p_1(\Delta_1) + [p_0(\Delta_1) - p_1(\Delta_1)]) + \sum_{i=2}^{k-1} \left(1 - \sum_{j=1}^{i-1} p_0(\Delta_j)\right) H(p(i) + \Delta p_i).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем два вектора $\overline{\kappa} = (\kappa_1, \dots, \kappa_k)$ и $\overline{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_k)$

$$\begin{aligned}\kappa_i &= (\nu(\Delta_i) - np_0(\Delta_i))^2 / np_0(\Delta_i), \\ G_i(x_i) &= P\{\kappa_i \leq x_i\}, \quad i = 1, \dots, k; \\ \beta_i &= I_i(1) + \dots + I_i(\nu(i)), \quad \nu(i) = n - \nu(\Delta_1) - \dots - \nu(\Delta_i), \\ &\quad i = 2, \dots, k-2, \quad \beta_1 = \nu(\Delta_1),\end{aligned}$$

где при фиксированном i последовательность $\{I_i(j), j = 1, 2, \dots\}$ состоит из независимых одинаково распределенных случайных величин таких, что $I_i(1) = 1$ с вероятностью $p(i) = p_1(\Delta_i) / (1 - \sum_{j=1}^{i-1} p_1(\Delta_j))$ и $I_i(1) = 0$ с вероятностью $1 - p(i)$, $i = 2, \dots, k-2$. Пусть A – событие:

$$A = \{np_0(\Delta_i) - cn^{1/2} < \nu(i) < np_0(\Delta_i) + cn^{1/2}, i = 1, \dots, k-1\}.$$

Очевидно, при некоторой константе c $A \in \{\chi^2 \in [0, \gamma]\}$.

Выполнено тождество

$$\begin{aligned}P\{\kappa_i \leq x_i \mid \kappa_1 = x_1 \cap \dots \cap \kappa_{i-1} = x_{i-1} \cap A\} \\ = P\left\{\left[\beta_i - p(i)\nu_x(i) \leq (np_0(\Delta_i))^{1/2}x_i \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{j=1}^{i-1} x_j p(i)(np_0(\Delta_j))^{1/2} + np_0(\Delta_i) - np(i)\left(1 - \sum_{j=1}^{i-1} p_0(\Delta_j)\right)\right] \cap A\right\}, \\ i = 2, \dots, k-2,\end{aligned}$$

где

$$\nu_x(i) = \nu(i) = n \sum_{j=i}^n p_0(\Delta_j) - \sum_{j=1}^{i-1} x_j (np_0(\Delta_j))^{1/2}.$$

Обозначим коэффициенты при $n^{1/2}$ в правой части неравенства через $c_i(x_1, \dots, x_i)$, а разность $p_0(\Delta_i) - p(i)(1 - \sum_{j=1}^{i-1} p_0(\Delta_j))$ – через Δp_i . Несложно проверить, что [3], [4]

$$\begin{aligned}P\{\chi^2 \in [0, \gamma]\} &= \int_{J \cap 0 \leq x_1^2 \leq \gamma} dG_1(c_1(x_1)n^{1/2} + n[p_0(\Delta_1) - p_1(\Delta_1)]) \\ &\times \int_{0 \leq x_2^2 < \gamma - x_1^2 \cap J} dF_2(c_2(x_1, x_2)n^{1/2} + n\Delta p_2) \\ &\times \int \dots \int_{0 \leq x_{k-1}^2 \leq \gamma - x_1^2 - \dots - x_{k-2}^2 \cap J} dF_{k-1}(c_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1})n^{1/2} + n\Delta p_{k-1}),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}J &: \{(A_1 x_1 + \dots + A_{k-1} x_{k-1})^2 < \gamma - x_1^2 - \dots - x_{k-1}^2\}, \\ A_j &= (p_1(\Delta_j)/p_0(\Delta_j))^{1/2}, \quad j = 1, \dots, k-1, \\ F_j(t) &= P\{\beta_j - p(i)\nu_x(i) \leq t\}.\end{aligned}$$

Применяя теорему об больших отклонениях [1, с. 205], получаем, что все члены с $n^{1/2}$ для нашей асимптотики не существенны и теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1986. [2] Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1989. [3] Павлов А. В. // Теория вероятн. и ее примен. 1990. Т. 35. С. 716–726. [4] Павлов А. В. Задачи по математической статистике. М.: Изд-во МИРЭА, 1993. ISBN 5-230-12148-3.