Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Шамолин, Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле, *УМН*, 2010, том 65, выпуск 1, 189–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9320>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 15:50:45

Случай полной интегрируемости в динамике четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле

М. В. Шамолин

Статья продолжает исследование по поиску новых интегрируемых случаев в динамике четырёхмерного твёрдого тела на $\mathbb{R}^4 \times \mathfrak{so}(4)$ в неконсервативном поле сил [1]–[3]. Ранее автором был предъявлен случай полной интегрируемости уравнений движения динамически симметричного тела при выполнении равенства $I_1 \neq I_2 = I_3 = I_4$ [1]. В данной же работе полностью разобран случай другой логически возможной динамической симметрии.

Пусть четырёхмерное твёрдое тело Ξ с гладкой границей $\partial\Xi$ является динамически симметричным (в некоторой системе координат $Dx_1x_2x_3x_4$ оператор инерции имеет вид $\text{diag}\{I_1, I_1, I_3, I_3\}$). Таким образом, двумерные плоскости Dx_1x_2 и Dx_3x_4 – плоскости динамической симметрии тела.

Неконсервативная сила (сопротивления) $\mathbf{S} = \{S_1, S_2, 0, 0\}$ и координаты точки ее приложения $N = (0, 0, x_{3N}, x_{4N})$ в системе $Dx_1x_2x_3x_4$ вместе с соотношениями $S_1 = \sigma \sin \gamma$, $S_2 = -S \cos \gamma$, $\gamma = \text{const}$, $x_{3N} = R \cos \beta_1$, $x_{4N} = R \sin \beta_1$ (γ – угол в плоскости Dx_1x_2 и β_1 – угол в плоскости Dx_3x_4) позволяют получить динамическую часть уравнений движения на $\mathbb{R}^4 \times \mathfrak{so}(4)$.

Если прямая CD (C – центр масс) лежит в плоскости Dx_1x_2 и вектор $\mathbf{DC}$ определяет положение центра масс: $\mathbf{DC} = \{\sigma \sin \gamma, -\sigma \cos \gamma, 0, 0\}$, то вектор скорости $\mathbf{v}_D$ точки D можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{v}_D = \{v \cos \alpha \sin \beta_2, v \cos \alpha \cos \beta_2, v \sin \alpha \cos \beta_1, v \sin \alpha \sin \beta_1\}, \quad |\mathbf{v}_D| = v$$

(β_2 – угол в плоскости Dx_1x_2).

Пусть Ω – тензор угловой скорости тела, $\Omega \in \mathfrak{so}(4)$. Та часть уравнений движения, которая отвечает алгебре $\mathfrak{so}(4)$, имеет вид [4]–[6]: $\dot{\Omega}\Lambda + \Lambda\dot{\Omega} + [\Omega, \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M$, где $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$, $\lambda_1 = (-I_1 + I_2 + I_3 + I_4)/2$, $\dots$, $\lambda_4 = (I_1 + I_2 + I_3 - I_4)/2$, а M – момент внешних сил, действующих на тело в $\mathbb{R}^4$, спроектированный на $\mathfrak{so}(4)$, $[\cdot]$ – коммутатор в $\mathfrak{so}(4)$. Кососимметрическую матрицу $\Omega \in \mathfrak{so}(4)$ удобно представлять в следующих естественных координатах:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ – компоненты угловой скорости в проекциях на алгебру $\mathfrak{so}(4)$.

При вычислении момента внешней силы необходимо построить отображение $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathfrak{so}(4)$, переводящее пару векторов из $\mathbb{R}^4$ в некоторый элемент из алгебры $\mathfrak{so}(4)$.

Очевидно, что имеются два циклических интеграла: $\omega_1 = \omega_1^0 = \text{const}$, $\omega_6 = \omega_6^0 = \text{const}$. Будем рассматривать динамику системы на нулевых их уровнях: $\omega_1^0 = \omega_6^0 = 0$.

Для получения явного вида динамических уравнений определим две функции воздействия среды R и S (используя при этом аналогичную информацию о свойствах движения трехмерных тел [3], [7]): $R = R(\alpha) = A \sin \alpha$, $S = S_v(\alpha) = Bv^2 \cos \alpha$; $A, B > 0$. Тогда редуцированные уравнения переписутся как $\dot{\omega}_2 = -n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha \times \sin \beta_1 \cos \gamma$, $\dot{\omega}_3 = -n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta_1 \sin \gamma$, $\dot{\omega}_4 = n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta_1 \cos \gamma$, $\dot{\omega}_5 = n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta_1 \sin \gamma$ ($n_0^2 = AB/(I_1 + I_3)$).

Несколько расширим задачу. Предположим, что в плоскости Dx_1x_2 действует следующая сила $\mathbf{T}$, линия действия которой проходит через центр масс C . При этом рассмотрим класс движений, при котором во все моменты времени выполнены условия (неинтегрируемые связи): $v = \text{const}$, $\beta_2 = \text{const}$ [3].

В результате замены угловых скоростей по формулам $z_1 = \omega_3 \cos \beta_1 + \omega_5 \sin \beta_1$, $z_2 = \omega_3 \sin \beta_1 - \omega_5 \cos \beta_1$, $z_3 = \omega_2 \cos \beta_1 + \omega_4 \sin \beta_1$, $z_4 = \omega_2 \sin \beta_1 - \omega_4 \cos \beta_1$, $w_1 = -z_1 \sin \beta_2 + z_3 \cos \beta_2$, $w_2 = z_3 \sin \beta_2 + z_1 \cos \beta_2$, $w_3 = z_2 \sin \beta_2 - z_4 \cos \beta_2$, $w_4 = z_4 \sin \beta_2 + z_2 \cos \beta_2$ у редуцированной системы шестого порядка появляется независимая подсистема третьего порядка

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -w_3 + \sigma n_0^2 v \sin \alpha, \\ \dot{w}_3 &= n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha \cos(\gamma + \beta_2) - w_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ \dot{w}_1 &= w_3 w_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},\end{aligned}\quad (1)$$

а также может быть выделена система второго порядка

$$\dot{w}_4 = -n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin(\gamma + \beta_2) + w_1 w_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \dot{w}_2 = -w_4 w_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (2)$$

и уравнение

$$\dot{\beta}_1 = w_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \quad (3)$$

Как было доказано ранее [3], [7], система (1), (3) обладает тремя, вообще говоря, независимыми первыми интегралами следующего вида:

$$\begin{aligned}\Phi_1(w_1, w_3, \sin \alpha) &= (w_1 \sin \alpha)^{-1} \\ &\times (w_1^2 + w_3^2 - \sigma n_0^2 v w_3 \sin \alpha + n_0^2 v^2 \cos(\gamma + \beta_2) \sin^2 \alpha) = C_1 = \text{const},\end{aligned}\quad (4)$$

$$\Phi_2(w_1, w_3, \sin \alpha) = C_2 = \text{const}, \quad (5)$$

$$\Phi_3(w_1, w_3, \sin \alpha, \beta_1) = C_3 = \text{const}. \quad (6)$$

Все три указанных первых интеграла являются трансцендентными функциями своих фазовых переменных, выражающимися через элементарные функции [3], [8].

В силу указанных редукций в рассматриваемой системе шестого порядка для полного ее интегрирования достаточно указать еще один первый интеграл, независимый с интегралами (4)–(6).

После замены переменных

$$w_* = w_3 \sin(\gamma + \beta_2) + w_4 \cos(\gamma + \beta_2), \quad w_{**} = w_1 \sin(\gamma + \beta_2) - w_2 \cos(\gamma + \beta_2) \quad (7)$$

система (2) может быть приведена к виду $dw_*/d\beta_1 = -w_{**}$, $dw_{**}/d\beta_1 = w_*$, который предполагает наличие аналитического первого интеграла: $w_*^2 + w_{**}^2 = C_4 = \text{const}$.

Итак, исследуемая динамическая система вполне интегрируема в классе, вообще говоря, трансцендентных функций (имеющих существенно особые точки).

Список литературы

- [1] М. В. Шамолин, *Докл. РАН*, **375**:3 (2000), 343–346. [2] Д. В. Георгиевский, М. В. Шамолин, *Докл. РАН*, **380**:1 (2001), 47–50. [3] М. В. Шамолин, *Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела*, Изд-во “Экзамен”, М., 2007. [4] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы и приложения*, Наука, М., 1979. [5] В. В. Трофимов, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1984, №6, 31–33. [6] О. И. Богоявленский, *Докл. АН СССР*, **287**:5 (1986), 1105–1108. [7] М. В. Шамолин, *Докл. РАН*, **364**:5 (1999), 627–629. [8] М. В. Шамолин, *УМН*, **53**:3 (1998), 209–210.