Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Житлухин, Максимальное неравенство для скошенного броуновского движения, *УМН*, 2009, том 64, выпуск 5, 175–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9321>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 13:30:52

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Максимальное неравенство для скошенного броуновского движения

М. В. Житлухин

Пусть $B = (B_t)_{t \geq 0}$ — стандартное броуновское движение. В работах [1]–[3] было доказано, что для произвольного момента остановки τ

$$\mathbb{E} \max_{s \leq \tau} |B_s| \leq \sqrt{2\mathbb{E}\tau}, \quad (1)$$

$$\mathbb{E} \left[\max_{s \leq \tau} B_s - \min_{s \leq \tau} B_s \right] \leq \sqrt{3\mathbb{E}\tau}. \quad (2)$$

Мы обобщим эти неравенства на случай скошенного броуновского движения, т. е. на случай процесса $X^\nu = (X_t^\nu)_{t \geq 0}$, удовлетворяющего уравнению

$$X_t^\nu = B_t + \nu L_t^0,$$

где L_t^0 — локальное время процесса X_t^ν в нуле. В [4] показано, что при $\nu \in [0, 1]$ это уравнение имеет единственное решение, называемое *скошенным броуновским движением* (*skew Brownian motion*).

Основным результатом настоящей работы является следующее максимальное неравенство.

ТЕОРЕМА. Для любого $\nu \in (-1, 1)$ и любого момента остановки τ выполнено неравенство

$$\mathbb{E} \left[\max_{s \leq \tau} X_s^\nu - \min_{s \leq \tau} X_s^\nu \right] \leq \sqrt{K_\nu \mathbb{E}\tau} \quad (3)$$

с константой K_ν , допускающей представление $K_\nu = I_\nu + I_{-\nu}$, где

$$I_\nu = \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[\frac{R_\nu^2(1+\nu)}{1-\nu} - 2R_\nu - (1+\nu) \int_{R_\nu}^0 \frac{(1+\nu)x + \nu - 1}{2\nu e^x - \nu - 1} dx \right],$$

а R_ν является единственным отрицательным решением уравнения

$$\frac{4\nu}{(1+\nu)^2} e^{R_\nu} - 1 = R_\nu.$$

Неравенство (3) является точным в том смысле, что для любого $T \geq 0$ существует момент остановки τ с $\mathbb{E}\tau = T$ такой, что

$$\mathbb{E} \left[\max_{s \leq \tau} X_s^\nu - \min_{s \leq \tau} X_s^\nu \right] = \sqrt{K_\nu \mathbb{E}\tau}.$$

Рис. 1. График K_ν

В случае $\nu \neq 0$ интеграл в выражении для I_ν может быть записан через дилוגарифм $f(x) = \int_x^1 \frac{\ln t}{1-t} dt$ (см. [5; § 27.7]):

$$\int_{R_\nu}^0 \frac{(1+\nu)x + \nu - 1}{2\nu e^x - \nu - 1} dx = f\left(\frac{\nu+1}{2\nu} e^{-R_\nu}\right) - f\left(\frac{\nu+1}{2\nu}\right) + \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} - \ln \frac{1+\nu}{2\nu}\right) \ln \frac{(\nu+1)e^{-R_\nu} - 2\nu}{1-\nu}$$

(следует отметить, что при $\nu < 0$ слагаемые в этой формуле комплексные, но их сумма действительная).

В случае $\nu = 0$ (т. е. когда $X_t^\nu = B_t$) из формулы для K_ν легко получить значение $K_0 = 3$, что согласуется с (2). В случае $\nu = 1$ предельным переходом получается значение $K_1 = 2$. В этом случае $\text{Law}(X_t^\nu) = \text{Law}(|B_t|)$ и неравенство (3) превращается в (1).

Доказательство теоремы основывается на решении вспомогательной задачи об оптимальной остановке: найти цену

$$V^{\nu,c} = \sup_\tau \mathbb{E} \left[\max_{s \leq \tau} X_s^\nu - \min_{s \leq \tau} X_s^\nu - c\tau \right],$$

где $c > 0$ – произвольная константа (стоимость за единицу наблюдения) и супремум берется по всем моментам остановки τ с $\mathbb{E}\tau < \infty$.

Эта задача решается сведением ее к задаче Стефана с подвижными границами (похожий метод был использован в [2] для процессов Бесселя; обобщение этого метода содержится в [6]).

Список литературы

- [1] L. E. Dubins, G. Schwarz, *Colloque Paul Lévy sur les processus stochastiques* (Palaiseau, 1987), *Astérisque*, **157–158**, 1988, 129–145. [2] Л. Е. Дубинс, Л. А. Шепп, А. Н. Ширяев, *Теория вероятн. и ее примен.*, **38:2** (1993), 288–330; англ. пер.: L. E. Dubins, L. A. Shepp, A. N. Shiryaev, *Theory Probab. Appl.*, **38:2** (1993), 226–261. [3] L. E. Dubins, D. Gilat, I. Meilijson, [arXiv: 0807.3571v1](https://arxiv.org/abs/0807.3571v1). [4] J. M. Harrison, L. A. Shepp, *Ann. Probab.*, **9:2** (1981), 309–313. [5] М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, Наука, М., 1979; пер. с англ.: *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, National Bureau of Standards Appl. Math. Ser., **55**, eds. M. Abramowitz, I. A. Stegun, U. S. Government Printing Office, Washington, DC, 1964. [6] G. Peskir, A. Shiryaev, *Optimal stopping and free-boundary problems*, Lectures Math. ETH Zürich, Birkhäuser, Basel, 2006.

М. В. Житлухин (M. V. Zhitlukhin)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: zhitlukhin@gmail.com

Представлено А. В. Булинским
Принято редколлегией
09.08.2009