Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Д. Коршунов, Некоторые нерешенные задачи дискретной математики и математической кибернетики, *УМН*, 2009, том 64, выпуск 5, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9322>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 16:22:21

УДК 510.5+519.1+519.7

Некоторые нерешенные задачи дискретной математики и математической кибернетики

А. Д. Коршунов

В области дискретной математики и математической кибернетики известно большое число нерешенных задач. Написание достаточно полного обзора по таким задачам связано с преодолением больших трудностей. Во-первых, спектр таких задач весьма широк и разнообразен. Во-вторых, степень трудности решения разных задач сильно отличаются друг от друга. Поэтому из множества задач даже в подробный и обстоятельный обзор следует включать не все задачи, а наиболее важные и существенные. Объективный отбор таких задач затруднителен.

В настоящую статью включены 13 нерешенных задач, относящихся к комбинаторной математике и теории сложности вычислений. Отобранные задачи отражают 50-летние исследования автора и по этой причине в определенной степени являются субъективными. Вместе с тем, эти задачи трудны и представляют значительный интерес для дискретной математики и математической кибернетики.

Библиография: 73 названия.

Ключевые слова: восстановление графа по подграфам, гамильтоновы циклы, дизъюнктивные нормальные формы, змея в булевом кубе, изоморфизм графов, нижние оценки, NP-полнота, полиномиальные задачи, протыкание кубов, сложно вычислимые булевы функции, совершенные двоичные коды, тройки Штейнера.

СОДЕРЖАНИЕ

1. NP-полные задачи	4
2. Изоморфизм неориентированных графов	5
3. Нижние оценки сложности схем, вычисляющих индивидуальные булевы функции	5
4. Сложность дизъюнктивных нормальных форм большинства булевых функций	6
5. Сложность покрытий числовых множеств арифметическими прогрессиями	8

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00611) и Программы фундаментальных исследований ОМН РАН “Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики” (проект “Новые методы дискретной и комбинаторной оптимизации”).

6. Протыкание подкубов n -мерного булева куба	9
7. Длина максимальной змеи в n -мерном булевом кубе	10
8. Гамильтоновы циклы в n -мерном булевом кубе	11
9. Проблема гамильтоновости двух средних слоев n -мерного куба	12
10. Совершенные двоичные $(n, 3)$ -коды	12
11. Пороговые булевы функции	13
12. Число систем троек Штейнера	14
13. Восстановление графа по подграфам	14
Список литературы	15

1. NP-полные задачи

Задача называется *полиномиальной*, если она может быть решена на одноренточной детерминированной машине Тьюринга с временной сложностью, не превосходящей $p(n)$, где n – объем входных данных задачи, а $p(n)$ – подходящий полином от n . Класс полиномиальных задач обозначается через P .

Задача называется *NP-трудной*, если существует одноренточная недетерминированная машина Тьюринга, на которой задача может быть решена с полиномиальной временной сложностью относительно объема входных данных задачи. Класс всех NP-трудных задач обозначается через NP .

Говорят, что задача L_1 *полиномиально* сводится к задаче L_2 , если существует метод решения задачи L_2 , который за полиномиальное время (относительно объема входных данных задачи L_1) можно преобразовать в метод решения задачи L_1 .

Задача из NP называется *NP-полной* (*универсальной*), если к ней полиномиально сводится любая задача из NP .

Эти и некоторые другие понятия, связанные с NP-полнотой, впервые ввел С. А. Кук в элегантной работе [1]. В ней был заложен фундамент теории NP-полноты и доказано, что одна конкретная задача из класса NP , называемая задачей о выполнимости, является NP-полной, т. е. такой, что всякая другая задача из класса NP может быть сведена к ней за полиномиальное время.

Следует отметить, что в то же время Л. А. Левин в [2] независимо доказал теорему о полиномиальной сводимости, аналогичную теореме Кука.

Вскоре Р. М. Карп опубликовал работу [3], в которой показано, что многие известные комбинаторные задачи также являются NP-полными.

В 1979 г. вышла в свет богатая содержанием монография М. Гэри и Д. Джонсона [4] по теории полиномиальной сводимости дискретных задач. В ней содержится уникальное приложение, в котором собрано более трехсот NP-полных задач из различных областей науки. К настоящему времени список таких задач существенно расширен.

Из NP-полноты задачи о выполнимости следует, что если эта задача может быть решена за полиномиальное время, то и любая задача из класса NP полиномиально разрешима, и если какая-то задача из класса NP трудноразрешима, то любая NP-полная задача также должна быть трудноразрешимой.

Таким образом, если бы удалось доказать, что хотя бы какая-то одна NP-полная задача принадлежит классу P , то тем самым было бы доказано, что $P = NP$,

и можно было бы надеяться на возможность построения эффективных алгоритмов для решения многих дискретных задач. Однако до сих пор таких задач не обнаружено.

Проблема состоит в доказательстве того, что некоторая конкретная NP-полная задача не принадлежит классу P.

2. Изоморфизм неориентированных графов

Пусть NP1 обозначает класс задач из NP, которые не являются ни полиномиальными, ни NP-полными (см. предыдущий раздел). Непустота класса NP1 (в предположении, что $P \neq NP$) следует из работы [1]. Возникает вопрос: существуют ли “естественные” задачи, являющиеся кандидатами на принадлежность классу NP1?

Некоторое время таким кандидатом была задача СОСТАВНОЕ ЧИСЛО, которая формулируется следующим образом [2].

УСЛОВИЕ. *Задано произвольное положительное число N .*

ВОПРОС. *Существуют ли такие целые числа m и n ($m, n > 1$), что $N = mn$?*

В 2004 г. в [3] доказано, что задача СОСТАВНОЕ ЧИСЛО является полиномиальной, т. е. не принадлежит классу NP1.

До сих пор неизвестен статус задачи ИЗОМОРФИЗМ ГРАФОВ, т. е. неизвестно, является ли полиномиальной, NP-полной или принадлежит классу NP1 следующая задача.

УСЛОВИЕ. *Заданы неориентированные графы $G_1 = (V, E_1)$ и $G_2 = (V, E_2)$.*

ВОПРОС. *Верно ли, что графы G_1 и G_2 изоморфны, т. е. существует ли взаимно однозначное отображение вершин графа G_1 на вершины графа G_2 такое, что две вершины в G_1 смежны тогда и только тогда, когда смежны их образы в G_2 ?*

Проблема состоит в ответе на этот вопрос.

ЗАМЕЧАНИЕ. Известно, что задача ИЗОМОРФИЗМ ГРАФОВ является полиномиальной для некоторых специальных классов графов, например, для плоских графов [4].

3. Нижние оценки сложности схем, вычисляющих индивидуальные булевы функции

Проблема нижних оценок сложности вычислений, имеющая более чем полувековую историю, – одна из наиболее трудных в дискретной математике. Она представляет большой интерес как для теории, так и для практики.

В прикладном плане решение проблемы нижних оценок сложности вычислений способствовало бы разработке более эффективных алгоритмов и созданию методики по оценке качества алгоритмов и программ.

Проблема нижних оценок сложности вычислений состоит, например, в том, чтобы установить хорошие нижние оценки сложности вычислений конкретных

функций. Несмотря на значительные усилия многих математиков в течение нескольких десятилетий, нет заметного прогресса в решении этой проблемы.

Так обстоит дело в случае вычисления функций булевыми схемами, которые определяются следующим образом.

Пусть $\mathcal{E} = \{f_1, \dots, f_r\}$ – произвольное множество булевых функций, называемое *базисом*. *Булевой схемой* (схемой из функциональных элементов) называется ориентированный граф без циклов с помеченными дугами и вершинами, множество вершин которого разбито на два подмножества. Вершины одного подмножества называются входами схемы. Им не инцидентны входящие дуги, и каждой такой вершине приписана буква алфавита переменных $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, каждой вершине второго подмножества приписан символ из базиса $\mathcal{E}$ (одна или несколько вершин объявляются выходами схемы). Число дуг, которые направлены в вершину, помеченную символом f_i , равно числу переменных функции f_i . Вершина с входящими в нее дугами называется функциональным (булевым) элементом. Каждый функциональный элемент реализует (вычисляет) функцию, которая ему приписана, а на выходе схемы вычисляется исходная булева функция.

Сложностью схемы называется число ее вершин, помеченных символами из $\mathcal{E}$.

В случае полных базисов $\mathcal{E}$ известны лишь линейные (относительно числа переменных вычисляемой булевой функции) нижние оценки сложности минимальных булевых схем.

Трудности решения проблемы нижних оценок сложности схем побудили рассматривать более слабые модели вычислений, а именно булевы схемы с ограничениями, схемы в неполных базисах и т. д. В результате исследований для таких схем удалось получить более высокие нижние оценки их сложности (см., например, работы [1]–[4]).

Высокие нижние оценки (более чем полиномиальные) получены А. А. Разборовым [5], [6] и А. Е. Андреевым [7], [8] для сложности минимальных булевых схем в базисе $\{\&, \vee\}$, которые вычисляют такие известные булевы функции, как перманент квадратных булевых матриц, функции, распознающие наличие клики заданного размера в неориентированных графах, и некоторые другие функции (в любом полном базисе эти функции вычисляются просто).

Задача состоит в указании конкретных булевых функций от n переменных и доказательстве того, что сложность вычисления этих функций произвольными булевыми схемами не меньше n^3 , n^4 и т. д.

4. Сложность дизъюнктивных нормальных форм большинства булевых функций

Литералом называется булева переменная или ее отрицание.

Элементарной конъюнкцией называется логическое произведение различных литералов, в котором отсутствуют литералы вида x и $\bar{x}$.

Дизъюнктивной нормальной формой (д. н. ф.) называется дизъюнкция различных элементарных конъюнкций. Ясно, что каждая д. н. ф. задает (реализует) некоторую булеву функцию, т. е. функцию, определенную на множестве

двоичных наборов и принимающую на каждом из этих наборов значение 0 или 1.

Д. н. ф. D , задающая булеву функцию f , называется *кратчайшей*, если в D содержится наименьшее число конъюнкций среди всех д. н. ф., задающих f .

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ – произвольная булева функция от n переменных; $m(f)$ – сложность (число конъюнкций в кратчайшей д. н. ф.) функции f , и пусть

$$m(n) = \max m(f(x_1, \dots, x_n)),$$

где максимум берется по всем булевым функциям от n переменных. О. Б. Лупанов в [1] показал, что $m(n) = 2^{n-1}$. Этот максимум достигается на следующих функциях:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= x_1 + \dots + x_n \equiv 0 \pmod{2}, \\ f_2(x_1, \dots, x_n) &= x_1 + \dots + x_n + 1 \equiv 0 \pmod{2}. \end{aligned}$$

Вместе с тем В. В. Глаголев в [2] показал, что для почти каждой булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ справедливо неравенство

$$m(f(x_1, \dots, x_n)) > \frac{1 - \varepsilon_n}{\log_2 n \cdot \log_2 \log_2 n} \cdot 2^{n-1},$$

где $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Позднее С. Е. Кузнецов [3] улучшил эту оценку до следующей:

$$m(f(x_1, \dots, x_n)) > \frac{1 - \varepsilon_n}{\log_2 n \cdot \log_2 \log_2 n} \cdot 2^n, \quad (1)$$

где $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, для почти всех булевых функций от n переменных сложности их кратчайших д. н. ф. заключены в интервале

$$\left[\frac{1 - o(1)}{\log_2 n \cdot \log_2 \log_2 n} \cdot 2^n, 2^{n-1} \right].$$

Однако оказалось, что случаи, когда сложность $m(f(x_1, \dots, x_n))$ близка к 2^{n-1} , являются нетипичными. Этот факт установил В. В. Глаголев в [4]: для почти каждой булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ справедливо неравенство

$$m(f(x_1, \dots, x_n)) \leq \frac{c \log_2 \log_2 n}{\log_2 n} \cdot 2^n.$$

В 1969 г. автор в [5] усилил этот результат до следующего: для почти каждой булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ справедливо неравенство

$$m(f(x_1, \dots, x_n)) < \frac{2^{n+2}}{\log_2 n}.$$

Аналогичный результат другим методом получил А. А. Сапоженко [6].

Наконец, в [7], [8] автором был предложен метод построения д. н. ф., из которого извлекается следующий результат: для почти любой булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ сложность кратчайшей д. н. ф. $m(f(x_1, \dots, x_n))$ удовлетворяет неравенству

$$m(f(x_1, \dots, x_n)) < 2.63 \cdot \frac{2^n}{\log_2 n \cdot \log_2 \log_2 n}. \quad (2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. После выхода в свет статьи [7] появилась публикация А. Е. Андреева [9], в которой приведен (без полного доказательства) результат, аналогичный результату из [7].

Из (1) и (2) следует, что сложность кратчайших д. н. ф. почти каждой булевой функции от n переменных по порядку равна $2^n / (\log_2 n \cdot \log_2 \log_2 n)$. Вместе с тем Р. Г. Нигматуллин [10] с использованием введенного им вариационного принципа доказал, что для почти всех булевых функций $f(x_1, \dots, x_n)$ величины $m(f(x_1, \dots, x_n))$ асимптотически совпадают.

Проблема состоит в нахождении явного вида этой асимптотики при $n \rightarrow \infty$.

5. Сложность покрытий числовых множеств арифметическими прогрессиями

Пусть $M_n = \{1, \dots, n\}$, R – произвольное подмножество из M_n и $A(R)$ – минимальное число арифметических прогрессий, теоретико-множественная сумма которых совпадает с R . Величина $A(R)$ называется *сложностью* покрытия множества R арифметическими прогрессиями.

Первые результаты по определению величины $A(R)$ получили С. С. Кислицын и А. А. Сапоженко. В [1] они установили следующие факты:

а) для почти каждого подмножества R из M_n справедливо неравенство

$$A(R) \geq \frac{n}{3 \log_2 n}; \quad (1)$$

б) для почти каждого подмножества R из M_n справедливо неравенство

$$a(R) < \frac{n \ln 2 \cdot \log_2 \log_2 n}{2 \log_2 n} (1 + o(1)).$$

Позднее оценка (1) была улучшена в работе [2] до следующей: для почти каждого подмножества R из M_n справедливо неравенство

$$A(R) \geq \frac{n}{2 \log_2 n - 1}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В. В. Глаголев [3] рассмотрел эту задачу со следующим дополнительным ограничением: все прогрессии, образующие покрытие множества R , должны иметь одну и ту же разность. Им было показано, что в наилучшем покрытии “самого плохого подмножества из M_n ” число арифметических прогрессий асимптотически равно $n/4$.

А. Д. Коршунов в [4] усилил результаты из [1], [2] до следующих:

а) для почти каждого подмножества R из M_n справедливо неравенство

$$A(R) \geq \frac{n}{\log_2 n} (1 - \varepsilon(n)), \quad (2)$$

где $\varepsilon(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;

б) для почти каждого подмножества R из M_n справедливо неравенство

$$a(R) < \frac{1.6n}{\log_2 n} (1 + o(1)). \quad (3)$$

Из утверждений (2) и (3) следует, что сложность покрытия почти каждого подмножества R из M_n арифметическими прогрессиями по порядку равна $n/\log_2 n$.

Проблема состоит в нахождении асимптотического поведения величины $A(R)$ для почти всех подмножеств R из M_n при $n \rightarrow \infty$.

6. Протыкание подкубов n -мерного булева куба

Пусть E^n обозначает n -мерный булев (единичный) куб, т. е. неориентированный граф с 2^n вершинами, которые помечены двоичными наборами длины n . В этом графе вершины $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ смежны (соединены ребром) тогда и только тогда, когда наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ различаются точно в одной координате.

Множество вершин $\{\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_{2^k}\}$ из E^n , которые не отличаются друг от друга в $n - k$ произвольно выбранных координатах, а значения остальных координат произвольны, называется k -мерным подкубом (интервалом ранга $n - k$) в E^n .

В начале 1960-х годов О. Б. Лупанов сформулировал следующую задачу о протыкании k -мерных подкубов в E^n . При каждом фиксированном k , $0 \leq k \leq n$, найти в E^n минимальное по размеру множество вершин $B(n, k)$, протыкающее все k -мерные подкубы в E^n .

Легко видеть, что при любом $n = 1, 2, \dots$

$$|B(n, 0)| = 2^n, \quad |B(n, 1)| = 2^{n-1}, \quad |B(n, n-1)| = 2, \quad |B(n, n)| = 1$$

и

$$|B(n, k)| \geq 2^{n-k} \quad \text{при произвольном } k, \quad 0 \leq k \leq n.$$

О. Б. Лупанов показал (не опубликовано), что при $n \rightarrow \infty$

$$|B(n, n-2)| \sim \log_2 n.$$

Случай $k = 2$ рассмотрела Е. А. Косточка. Она в [1] показала, что

$$|B(n, 2)| = \left\lfloor \frac{2^n}{3} \right\rfloor.$$

В случае произвольного k , $3 \leq k \leq n-3$, Э. И. Нечипорук в [2] (см. также [3]) доказал, что

$$|B(n, k)| < 2^{n-k} \left(\ln \binom{n}{k} + 1 \right) + 1. \quad (1)$$

Наконец, В. К. Леонтьев [4] показал, что в случае больших n и при произвольном k , $3 \leq k \leq n-3$, для размера $B(n, k)$ справедливо неравенство

$$|B(n, k)| \geq 2^{n-k-2} \log_2 n. \quad (2)$$

Поскольку верхняя и нижняя оценки (1), (2) для $|B(n, k)|$ при многих k существенно отличаются друг от друга (например, при $k = \lfloor n/2 \rfloor$ и $n \rightarrow \infty$), то остается нерешенной задача о нахождении точного (или асимптотического) значения величины $|B(n, k)|$ при $n \rightarrow \infty$ и произвольном k , $3 \leq k \leq n-3$.

7. Длина максимальной змеи в n -мерном булевом кубе

Пусть $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i|$ есть расстояние Хемминга между вершинами $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ из E^n . Конечная последовательность $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_m$ вершин в n -мерном булевом кубе E^n называется *змеей*, если

- 1) $\rho(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_{i+1}) = 1$ при каждом $i = 1, \dots, m-1$ и $\rho(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_m) = 1$,
- 2) $\rho(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_j) > 1$ при любых i и j таких, что $|i - j| > 1$ и $|m - j| \neq |m - 1|$.

Иначе говоря, змея в E^n является простым циклом без хорд. Число вершин змеи называется ее *длиной*.

Пусть $l(n)$ обозначает длину максимальной змеи в E^n . Задача состоит в нахождении величины $l(n)$.

В настоящее время величина $l(n)$ известна только при $n = 2, 3, 4, 5, 6$ и 7 . В общем случае величина $l(n)$ неизвестна.

Впервые задача об определении длины максимальной змеи в E^n была сформулирована в работе [1] в связи с построением кодов, исправляющих ошибки, для специальных аналого-цифровых систем. В дальнейшем эта задача рассматривалась в связи с выяснением трудностей минимизации дизъюнктивных нормальных форм булевых функций локальными алгоритмами [2].

Определением величины $l(n)$ занимались многие исследователи. К настоящему времени опубликовано более 50 работ.

Сначала коснемся нижних оценок для $l(n)$. В [1] показано, что $l(n) > c \cdot 2^{n/2}$, где c – абсолютная положительная константа. Дальнейшее продвижение в существенном повышении нижней оценки для $l(n)$ содержится в работе Ю. Л. Васильева [3]. Им показано, что

$$l(n) > \begin{cases} \frac{2^n}{n}, & \text{если } n \text{ является степенью } 2, \\ (1 - \varepsilon(n)) \frac{2^{n-1}}{n} & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $\varepsilon(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

А. А. Евдокимов в [4] доказал, что

$$l(n) \geq 2^{n-11} - 4.$$

Более точная оценка вида

$$l(n) \geq 4.2(2^{n-1} - 1)$$

была установлена им в [5].

В настоящее время наилучшей нижней оценкой для $l(n)$ является оценка

$$l(n) \geq \frac{27}{256} \cdot 2^n, \tag{1}$$

опубликованная в [6].

Другие нижние оценки, не превосходящие (1), опубликовали: Н. Л. Abbott (1965), R. C. Singleton (1966), L. Danzer & V. Klee (1967), J. Wojciechowski (1989), R. Röpling-Lenhart (1991) и другие.

Теперь перейдем к освещению верхних оценок для $l(n)$. Легко видеть, что

$$l(n) \leq \frac{n}{n-1} \cdot 2^{n-1}. \quad (2)$$

В самом деле, пусть произвольная змея в E^n состоит из наборов множества $M = \{\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_m\}$. Тогда число ребер в E^n , которые соединяют вершины из M с вершинами из $E^n \setminus M$, равно $m(n-2)$. Вместе с тем поскольку степень каждой вершины из E^n равна n , а некоторые ребра соединяют вершины из $E^n \setminus M$, имеем

$$m(n-2) \leq n|E^n \setminus M| = n(2^n - m).$$

Следовательно,

$$m \leq \frac{n}{n-1} 2^{n-1},$$

т. е. справедливо (2). Оценка (2) содержится в [1].

Лучшие верхние оценки для $l(n)$ получали многие исследователи. Первую оценку, меньшую 2^{n-1} , получил В. В. Глаголев. В [7] им показано, что при любом $n \geq 5$

$$l(n) < 2^{n-1}.$$

Наилучшая известная оценка содержится в работе [8]:

$$l(n) \leq 2^{n-1} \left(1 - \frac{1}{89\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right). \quad (3)$$

Другие верхние оценки для $l(n)$, не меньшие оценки (3), опубликовали: L. Danzer & V. Klee (1967), R. J. Douglas (1969), A. A. Евдокимов (1971), K. Deimer (1985), H. S. Snevily (1994), П. Г. Емельянов (1995), P. G. Emelyanov & A. Lukito (2000) и другие.

Поскольку нижняя и верхняя оценки (1), (3) для $l(n)$ совпадают только с точностью до порядка, остается нерешенной задача о нахождении асимптотического поведения величины $l(n)$ при $n \rightarrow \infty$.

8. Гамильтоновы циклы в n -мерном булевом кубе

Пусть E^n – n -мерный булев куб. Замкнутый маршрут без самопересечений в E^n называется *гамильтоновым* циклом, если в нем содержатся все вершины из E^n .

Пусть $h(n)$ обозначает число гамильтоновых циклов в E^n . Задача определения числа $h(n)$ при любом $n \geq 2$ поставлена в [1]. Она изучалась многими исследователями (см., например, работы [2]–[4]).

Тривиальная верхняя оценка

$$h(n) < n^{2^n}$$

следует из того, что если в E^n зафиксировать произвольную вершину (например, вершину $\tilde{0} = (0, \dots, 0)$) и гамильтоновы циклы получать методом последовательного удлинения простых цепей (начинающихся в вершине $\tilde{0}$), то на каждом шаге имеющуюся цепь можно удлинять не более чем n способами.

Более точную верхнюю оценку для $h(n)$ получили А. Л. Пережогин и В. Н. Поталов. В работе [5] они показали, что при $n \rightarrow \infty$

$$\ln h(n) \leq 2^n (\ln n - 1 + o(1)). \quad (1)$$

Наилучшая нижняя оценка для $h(n)$ содержится в работе [6]. В ней показано, что

$$\ln h(n) \geq 2^n (\ln n + \ln \ln 2 - 10 \ln \ln \ln n - o(1)). \quad (2)$$

Из верхней и нижней оценок (1) и (2) для $\ln h(n)$ следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\ln h(n) \sim 2^n \ln n.$$

Остаются нерешенными следующие более сложные задачи:

- а) определить порядок функции $h(n)$;
- б) найти асимптотику функции $h(n)$.

9. Проблема гамильтоновости двух средних слоев n -мерного куба

Весом вершины $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ в булевом кубе E^n называется число единиц в $\tilde{\alpha}$. При нечетном $n \geq 3$ обозначим через G_n такой подграф в E^n , в котором имеется $\binom{n}{(n-1)/2}$ вершин веса $(n-1)/2$ и $\binom{n}{(n+1)/2}$ вершин веса $(n+1)/2$. Иначе говоря, вершинами графа G_n являются все вершины двух средних слоев булева куба E^n нечетной размерности.

Гипотеза состоит в том, что при любом нечетном $n \geq 3$ граф G_n является гамильтоновым.

Исследованием этой гипотезы занимались многие (см., например, работы [1]–[3]). Справедлива ли гипотеза о существовании гамильтонова цикла в графе G_n при любом нечетном $n \geq 3$, до сих пор неизвестно.

10. Совершенные двоичные $(n, 3)$ -коды

Пусть $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i|$ есть расстояние Хемминга между вершинами $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ из E^n .

Множество C вершин из E^n называется *совершенным* (плотно упакованным) двоичным $(n, 3)$ -кодом, если шары радиуса 1 с центрами из C не пересекаются, а множество вершин, принадлежащих их объединению, совпадает с множеством вершин из E^n .

Так как каждому шару радиуса 1 принадлежит $n+1$ вершина из E^n , то число $2^n/(n+1)$ должно быть целым. Поэтому совершенный двоичный $(n, 3)$ -код может существовать только тогда, когда число $n+1$ равно степени 2. Оказывается, что при любом таком n совершенный $(n, 3)$ -код существует. Впервые такие коды описал в 1950 г. Р. Хемминг [1] (они называются кодами Хемминга).

Пусть $B(n)$ обозначает множество всех совершенных двоичных $(n, 3)$ -кодов длины n . В 1962 г. Ю. Л. Васильев в [2] предложил метод построения большого числа таких кодов и доказал, что при $n+1 = 2^k$, $k = 2, 3, \dots$, и $n \rightarrow \infty$

$$|B(n)| > 2^{2^{\frac{n+1}{2}(1-o(1))}}. \quad (1)$$

В настоящее время известно несколько различных методов построения совершенных двоичных $(n, 3)$ -кодов (см., например, работы [3]–[5]). Эти методы позволяют получать такое количество кодов, которое незначительно отличается от нижней оценки Васильева и имеет тот же вид (1). Так как число совершенных двоичных $(n, 3)$ -кодов меньше числа всех $2^n/(n+1)$ -вершинных подмножеств в E^n , то

$$|B(n)| < \binom{2^n}{2^n/(n+1)} = 2^{2^{n(1-o(1))}}. \quad (2)$$

Более точную верхнюю оценку для $|B(n)|$ получил С. В. Августинович [6]. Однако она имеет тот же вид, что и правая часть из (2).

Нижняя и верхняя оценки для $|B(n)|$ из (1) и (2) существенно различаются. Поэтому из них не извлекается информация об истинном значении величины $|B(n)|$. В связи с этим представляет интерес задача о выяснении асимптотического поведения величины $\log_2 \log_2 |B(n)|$. Более сложной является задача нахождения асимптотики величины $\log_2 |B(n)|$. Еще более сложной является задача нахождения асимптотики размера множества $B(n)$.

11. Пороговые булевы функции

Булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется *пороговой*, если существуют вещественные числа $a_1, \dots, a_n, b$ такие, что двоичный набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ является решением неравенства $a_1x_1 + \dots + a_nx_n \geq b$ тогда и только тогда, когда $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$. Коэффициенты a_i называются *весами*, а число b – *порогом*.

Небольшим изменением порога и весов можно добиться строгого неравенства. Таким образом, пороговая булева функция задается гиперплоскостью, рассекающей булев куб так, что в вершинах по одну сторону гиперплоскости функция равна нулю, по другую – единице.

Такой взгляд оказывается весьма полезным в теоретических исследованиях, так как позволяет использовать геометрическую интуицию при решении различных задач, связанных с пороговыми функциями. Подробные сведения о пороговых функциях изложены в обзорной статье Ю. А. Зуева [1].

Пусть $T(n)$ обозначает число пороговых булевых функций от n переменных. К вычислению этой функции приступили в конце пятидесятих годов прошлого века. К 1965 г. удалось получить следующие результаты.

Верхняя оценка вида

$$T(n) < 2^{n^2(1-o(1))} \quad (1)$$

получена в [2] (см. также [3]).

Нижняя оценка для числа пороговых булевых функций от n переменных вида

$$T(n) > 2^{\frac{1}{2}n^2(1-o(1))} \quad (2)$$

впервые опубликована в работе [4]. Позднее Ю. А. Зуев в работе [5] (см. также [6]) улучшил оценку (2) до следующей:

$$T(n) > 2^{n^2(1-10/\ln n)}. \quad (3)$$

В 1992 г. оценка (3) была улучшена А. А. Ирматовым в работе [7].

Из (1) и (3) следует асимптотика для логарифма числа пороговых булевых функций от n переменных при $n \rightarrow \infty$

$$\log_2 T(n) \sim n^2.$$

Теперь очередная задача состоит в нахождении асимптотики функции $T(n)$ при $n \rightarrow \infty$.

12. Число систем троек Штейнера

Системой троек Штейнера S на n -элементном множестве M называется такое семейство $\mathcal{F}$ трехэлементных подмножеств из M , что каждая пара элементов из S принадлежит точно одному подмножеству из $\mathcal{F}$. Размер множества M называется *порядком* системы. Известно (см., например, [1]), что система троек Штейнера порядка n существует тогда и только тогда, когда

$$n \equiv 1 \text{ или } 3 \pmod{6}.$$

Такие n назовем *значащими*.

Пусть $S(n)$ обозначает число неизоморфных (т. е. неэквивалентных относительно действующей на M симметрической группы) систем троек Штейнера порядка n . Проблема определения $S(n)$ была поставлена Дж. Штейнером в 1853 г. Имеется большое число публикаций, в которых содержатся точные значения функции $S(n)$ при различных конкретных n .

Нахождением верхних и нижних оценок для $S(n)$ занималось несколько исследователей (В. Е. Алексеев, E. Assmus & H. F. Mattson, J. Doyen, G. Valette и другие).

Наилучшая известная верхняя оценка имеет вид:

$$S(n) < n^{n^2/6 - O(n)}. \quad (1)$$

Она получена в [2].

Для значащих n наилучшая известная нижняя оценка

$$S(n) > (e^{-5}n)^{n^2/6} \quad (2)$$

получена Г. П. Егорычевым в [3].

Из неравенств (1) и (2) следует, что при $n \rightarrow \infty$ асимптотика логарифма функции $S(n)$ равна $n^2 \log_2 n$.

Остается нерешенной задача о нахождении асимптотики функции $S(n)$ при $n \rightarrow \infty$.

13. Восстановление графа по подграфам

Проблема изоморфизма для неориентированных графов G_1 и G_2 с одинаковым числом вершин состоит в определении того, существует ли взаимно однозначное отображение вершин графа G_1 на вершины графа G_2 такое, что две вершины в G_1 смежны тогда и только тогда, когда смежны их образы в G_2 .

Граф H называется *порожденным подграфом* неориентированного графа G , если множество вершин графа H является подмножеством множества вершин графа G , а множество ребер графа H совпадает с множеством тех ребер графа G , оба конца которых принадлежат графу H .

Пусть G — произвольный n -вершинный неориентированный граф и $G_1, \dots, G_n$ — множество всех $(n-1)$ -вершинных подграфов графа G таких, что граф G_i получается путем удаления из G i -й вершины и инцидентных ей ребер.

С. Улам [1] поставил следующий вопрос: верно ли, что n -вершинный граф G восстанавливается (с точностью до изоморфизма) по $(n-1)$ -вершинным подграфам $G_1, \dots, G_n$, в которых вершины не помечены? Для некоторых классов графов ответ положителен. Так, например, в [2] дан положительный ответ на этот вопрос для деревьев. Однако ответ на этот вопрос в общем случае до сих пор неизвестен. Каков этот ответ? Проблема Клама изучается также в [3]–[7].

Выражаю искреннюю благодарность С. И. Адян за проявленный интерес к настоящей работе и ценные замечания.

Список литературы

К разделу 1

- [1] S. A. Cook, “The complexity of theorem-proving procedures”, *Proceedings of the 3rd Annual ACM Symposium on the Theory of Computing* (Shaker Heights, 1971), ACM Press, New York, 1971, 151–158; рус. пер.: С. А. Кук, “Сложность процедур вывода теорем”, *Кибернет. сб. Нов. сер.*, 1975, № 12, 5–15.
- [2] Л. А. Левин, “Универсальные задачи перебора”, *Проблемы передачи информации*, **9:3** (1973), 115–116; англ. пер.: L. A. Levin, “Universal problems of full search”, *Probl. Inf. Transm.*, **9:3** (1973), 265–266.
- [3] R. M. Karp, “Reducibility among combinatorial problems”, *Complexity of computer computations*, Proc. Sympos. (IBM Thomas J. Watson Res. Center, Yorktown Heights, N.Y., 1972), Plenum, New York, 1972, 85–103; рус. пер.: Р. М. Карп, “Сводимость комбинаторных задач”, *Кибернет. сб. Нов. сер.*, 1975, № 12, 16–38.
- [4] M. R. Garey, D. S. Johnson, *Computers and intractability. A guide to the theory of NP-completeness*, A Series of Books in the Mathematical Sciences, Freeman, San Francisco, 1979; рус. пер.: М. Гэри, Д. Джонсон, *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*, Мир, М., 1982.

К разделу 2

- [1] R. E. Ladner, “On the structure of polynomial time reducibility”, *J. Assoc. Comput. Mach.*, **22:1** (1975), 155–171.
- [2] M. R. Garey, D. S. Johnson, *Computers and intractability. A guide to the theory of NP-completeness*, A Series of Books in the Mathematical Sciences, Freeman, San Francisco, 1979; рус. пер.: М. Гэри, Д. Джонсон, *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*, Мир, М., 1982.
- [3] M. Agrawal, N. Kayal, N. Saxena, “PRIMES is in P”, *Ann. of Math.*, **160:2** (2004), 781–793.
- [4] J. E. Hopcroft, R. E. Tarjan, “Isomorphism of planar graphs”, *Complexity of computer computations*, Proc. Sympos. (IBM Thomas J. Watson Res. Center, Yorktown Heights, N.Y., 1972), Plenum, New York, 1972, 131–152, 187–212; рус. пер.:

Дж. Е. Хокрофт, Р. Е. Тарьян, “Изоморфизм планарных графов”, *Кибернет. сб. Нов. сер.*, 1975, № 12, 39–61.

К разделу 3

- [1] Б. А. Субботовская, “О реализации линейных функций формулами в базисе $\{\&, \vee, -\}$ ”, *Докл. АН СССР*, **136**:3 (1961), 553–555; англ. пер.: B. A. Subbotovskaya, “Realization of linear functions by formulas using $\{\&, \vee, -\}$ ”, *Sov. Math., Dokl.*, **2** (1961), 110–112.
- [2] Б. А. Субботовская, “О сравнении базисов при реализации функций алгебры логики формулами”, *Докл. АН СССР*, **4** (1963), 784–787; англ. пер.: B. A. Subbotovskaya, “Comparison of bases in the realization by formulas of functions of the algebra of logic”, *Sov. Math., Dokl.*, **149**:4 (1963), 478–481.
- [3] Э. И. Нечипорук, “Об одной булевой функции”, *Докл. АН СССР*, **169**:4 (1966), 765–766; англ. пер.: E. I. Nechiporuk, “A Boolean function”, *Sov. Math., Dokl.*, **7** (1966), 999–1000.
- [4] А. Е. Андреев, “Об одном методе получения более чем квадратичных эффективных нижних оценок сложности π -схем”, *Вестник МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, 1987, № 1, 70–73; англ. пер.: A. E. Andreev, “A method for obtaining efficient lower estimates of complexity of π -schemes”, *Mosc. Univ. Math. Bull.*, **42**:1 (1987), 63–66.
- [5] А. А. Разборов, “Нижние оценки монотонной сложности некоторых булевых функций”, *Докл. АН СССР*, **281**:4 (1985), 798–801; англ. пер.: A. A. Razborov, “Lower bounds for the monotone complexity of some Boolean functions”, *Sov. Math., Dokl.*, **31** (1985), 354–357.
- [6] А. А. Разборов, “Нижние оценки монотонной сложности логического перманента”, *Матем. заметки*, **37**:6 (1985), 887–900; англ. пер.: A. A. Razborov, “Lower bounds on monotone complexity of the logical permanent”, *Math. Notes*, **37**:6 (1985), 485–493.
- [7] А. Е. Андреев, “Об одном методе получения нижних оценок сложности индивидуальных монотонных функций”, *Докл. АН СССР*, **282**:5 (1985), 1033–1037; англ. пер.: A. E. Andreev, “On a method for obtaining lower bounds for the complexity of individual monotone functions”, *Sov. Math., Dokl.*, **31** (1985), 530–534.
- [8] А. Е. Андреев, “Об одном методе получения эффективных нижних оценок монотонной сложности”, *Алгебра и логика*, **26**:1 (1987), 3–26; англ. пер.: A. E. Andreev, “A method for obtaining efficient lower bounds for monotone complexity”, *Algebra Logic*, **26**:1 (1987), 1–18.

К разделу 4

- [1] О. Б. Лупанов, “О реализации функций алгебры логики формулами из конечных классов (формулами ограниченной глубины) в базисе $\{\&, \vee, -\}$ ”, *Проблемы кибернетики*, 1961, № 6, 5–14; англ. пер.: O. B. Lupanov, “On the realization of functions of logical algebra by formulae of finite classes (formulae of limited depth) in the basis $\{\&, \vee, -\}$ ”, *Probl. Cybernetics*, 1965, № 6, 1–14.
- [2] В. В. Глаголев, “Оценка сложности сокращенной дизъюнктивной нормальной формы для почти всех функций алгебры логики”, *Докл. АН СССР*, **158**:4 (1964), 770–773; англ. пер.: V. V. Glagolev, “Estimate of the complexity of a reduced disjunctive normal form for almost all functions of the algebra of logic”, *Sov. Math., Dokl.*, **5** (1965), 1302–1305.
- [3] С. Е. Кузнецов, “О нижней оценке длины кратчайшей д.н.ф. почти всех булевых функций”, *Вероятностные методы и кибернетика*, № 19, Изд-во Казанского ун-та, Казань, 1983, 44–47.
- [4] В. В. Глаголев, “Верхняя оценка сложности минимальной д.н.ф. для почти всех функций алгебры логики”, *Дискретный анализ: Сб. науч. тр.*, № 5, Ин-т математики СО АН СССР, Новосибирск, 1965, 3–8.

- [5] А. Д. Коршунов, “Верхняя оценка сложности кратчайших д.н.ф. почти всех булевых функций”, *Кибернетика*, 1969, № 6, 1–11; англ. пер.: A. D. Korshunov, “An upper bound of the complexity of the shortest disjunctive normal forms for almost all Boolean functions”, *Cybernetics*, 5 (1969), 705–715.
- [6] А. А. Сапоженко, “О сложности дизъюнктивных нормальных форм, полученных с помощью градиентного алгоритма”, *Дискретный анализ: Сб. науч. тр.*, № 21, Ин-т математики СО АН СССР, Новосибирск, 1972, 62–71.
- [7] А. Д. Коршунов, “О сложности кратчайших дизъюнктивных нормальных форм булевых функций”, *Методы дискретного анализа в изучении булевых функций: Сб. науч. тр.*, № 37, Ин-т математики СО АН СССР, Новосибирск, 1981, 9–41; англ. пер.: A. D. Korshunov, “On the complexity of the shortest disjunctive normal forms of Boolean functions”, *Amer. Math. Soc. Transl.*, **135** (1987), 55–79.
- [8] А. Д. Коршунов, “О сложности кратчайших дизъюнктивных нормальных форм случайных булевых функций”, *Методы дискретного анализа в оптимизации управляющих систем: Сб. науч. тр.*, № 40, Ин-т математики СО АН СССР, Новосибирск, 1983, 25–53.
- [9] А. Е. Андреев, “О синтезе дизъюнктивных нормальных форм, близких к минимальным”, *Докл. АН СССР*, **269**:1 (1983), 11–15; англ. пер.: A. E. Andreev, “On the synthesis of disjunctive normal forms which are close to minimal”, *Sov. Math., Dokl.*, **27**:2 (1983), 265–269.
- [10] Р. Г. Нигматуллин, “Вариационный принцип в алгебре логики”, *Дискретный анализ: Сб. науч. тр.*, № 10, Ин-т математики СО АН СССР, Новосибирск, 1967, 69–89.

К разделу 5

- [1] С. С. Кислицын, А. А. Сапоженко, “О представлении множества чисел теоретико-множественной суммой арифметических прогрессий”, *Вопросы кибернетики*, № 16, Научный совет АН СССР по комплексной проблеме “Кибернетика”, М., 1975, 53–62.
- [2] С. В. Новиков, С. В. Олексин, “О покрытии множества арифметическими прогрессиями”, *Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук*, 1979, № 6, 25–27.
- [3] В. В. Глаголев, “О покрытии арифметическими прогрессиями”, *Методы дискретного анализа в синтезе управляющих систем: Сб. науч. тр.*, № 32, Ин-т математики СО АН СССР, Новосибирск, 1978, 34–39.
- [4] А. Д. Коршунов, “О сложности покрытий числовых множеств арифметическими прогрессиями”, *Сиб. журн. исслед. опер.*, **1**:2 (1994), 40–60; англ. пер.: A. D. Korshunov, “Complexity of coverings of number sets by arithmetical progressions”, *Discrete analysis and operations research*, Math. Appl., **355**, Kluwer, Dordrecht, 1996, 81–100.

К разделу 6

- [1] Е. А. Косточка, “О прокалывании граней единичного n -мерного куба”, *Дискретный анализ: Сб. науч. тр.*, № 28, Ин-т математики СО АН СССР, Новосибирск, 1976, 55–64.
- [2] Э. И. Нечипорук, “О сложности вентильных схем, реализующих булевские матрицы с неопределенными элементами”, *Докл. АН СССР*, **163**:1 (1965), 40–42; англ. пер.: E. I. Nechiporuk, “Complexity of gating circuits which are realized by Boolean matrices with undetermined elements”, *Sov. Phys., Dokl.*, **10** (1966), 591–593.
- [3] Э. И. Нечипорук, “О топологических принципах самокорректирования”, *Проблемы кибернетики*, № 21, Наука, М., 1969, 5–102.
- [4] В. К. Леонтьев, “Верхняя оценка α -глубины $(0,1)$ -матриц”, *Матем. заметки*, **15**:3 (1974), 421–429; англ. пер.: V. K. Leont’ev, “An upper bound for the α -height of $(0,1)$ -matrices”, *Math. Notes*, **15**:3 (1974), 245–250.

К разделу 7

- [1] W. H. Kautz, “Unit distance error checking codes”, *IRE Trans. Electron. Comput.*, **7** (1958), 177–180.
- [2] Ю. И. Журавлев, “Теоретико-множественные методы в алгебре логики”, *Проблемы кибернетики*, № 8, Физматлит, М., 1962, 5–44; нем. пер.: Yu. I. Zhuravlev, “Mengentheoretische Methoden in der Aussagenlogik”, *Probl. Kybernetik*, **8** (1965), 3–51.
- [3] Ю. Л. Васильев, “О длине цикла в n -мерном единичном кубе”, *Докл. АН СССР*, **148**:4 (1963), 753–756; англ. пер.: Yu. L. Vasil’ev, “On the length of a cycle in an n -dimensional unit cube”, *Sov. Math., Dokl.*, **4** (1963), 160–163.
- [4] А. А. Евдокимов, “О максимальной длине цепи в единичном n -мерном кубе”, *Матем. заметки*, **6**:3 (1969), 309–319; англ. пер.: A. A. Evdokimov, “Maximal length of circuit in a unitary n -dimensional cube”, *Math. Notes*, **6**:3 (1970), 642–648.
- [5] А. А. Евдокимов, *О максимальной длине цепи в n -мерном единичном кубе и некоторых родственных задачах*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, Ин-т математики СО АН СССР, Новосибирск, 1971.
- [6] H. L. Abbott, M. Katchalski, “On the construction of snake in the box codes”, *Utilitas Math.*, **40** (1991), 97–116.
- [7] В. В. Глаголев, “Верхняя оценка длины цикла в n -мерном единичном кубе”, *Дискретный анализ: Сб. науч. тр.*, № 6, Ин-т математики СО АН СССР, Новосибирск, 1966, 3–7.
- [8] G. Zémor, “An upper bound on the size of the snake-in-the-box”, *Combinatorica*, **17**:2 (1997), 287–298.

К разделу 8

- [1] E. N. Gilbert, “Gray codes and paths on the n -cube”, *Bell System Tech. J.*, **37**:3 (1958), 815–826.
- [2] H. L. Abbott, “Hamiltonian circuits and paths on the n -cube”, *Canad. Math. Bull.*, **9**:5 (1966), 557–562.
- [3] E. Dixon, S. Goodman, “On the number of Hamiltonian circuits in the n -cube”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **50** (1975), 500–504.
- [4] R. J. Douglas, “A note on a theorem of H. L. Abbott”, *Canad. Math. Bull.*, **13**:1 (1970), 79–81.
- [5] А. Л. Пережогин, В. Н. Потапов, “О числе гамильтоновых циклов в булевом кубе”, *Дискрет. анализ и исслед. опер. Сер. 1*, **8**:2 (2001), 52–62.
- [6] T. Feder, C. Subi, “Nearly tight bounds on the number of Hamiltonian circuits of the hypercube and generalizations”, *Inform. Process. Lett.*, **109**:5 (2009), 267–272.

К разделу 9

- [1] А. А. Евдокимов, А. Л. Пережогин, “Минимальные нумерации подмножеств конечного множества и проблема гамильтоновости графа средних слоев гиперкуба”, *Дискрет. анализ и исслед. опер. Сер. 1*, **4**:4 (1997), 6–12; англ. пер.: A. A. Evdokimov, A. L. Perezhogin, “Minimal enumerations of subsets of a finite set and the middle level problem”, *Discrete Appl. Math.*, **114**:1–3 (2001), 109–114.
- [2] C. D. Savage, P. Winkler, “Monotone Gray codes and the middle levels problem”, *J. Combin. Theory Ser. A*, **70**:2 (1995), 230–248.
- [3] I. Shields, C. D. Savage, “A Hamilton path heuristic with applications to the middle two levels problem”, *Proceedings of the Thirtieth Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing* (Boca Raton, FL, 1999), Congr. Numer., **140**, 1999, 161–178.

К разделу 10

- [1] R. W. Hamming, “Error detecting and error correcting codes”, *Bell System Tech. J.*, **29:2** (1950), 147–160; рус. пер.: Р. Хэмминг, “Коды с обнаружением и исправлением ошибок”, *Коды с обнаружением и исправлением ошибок*, ИЛ, М., 1956, 7–22.
- [2] Ю. Л. Васильев, “О негрупповых плотно упакованных кодах”, *Проблемы кибернетики*, № 8, Физматлит, М., 1962, 337–339.
- [3] Д. С. Кротов, “Нижние оценки числа m -квазигрупп порядка 4 и числа совершенных двоичных кодов”, *Дискрет. анализ и исслед. опер. Сер. 1*, **7:2** (2000), 47–53.
- [4] D. S. Krotov, S. V. Avgustinovich, “On the number of 1-perfect binary codes: a lower bound”, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **54:4** (2008), 1760–1765.
- [5] С. А. Малюгин, “О нижней оценке числа совершенных двоичных кодов”, *Дискрет. анализ и исслед. опер. Сер. 1*, **6:4** (1999), 44–48.
- [6] С. В. Августинович, “Об одном свойстве совершенных двоичных кодов”, *Дискрет. анализ и исслед. опер.*, **2:1** (1995), 4–6; англ. пер.: S. V. Avgustinovich, “On a property of perfect binary codes”, *Operations research and discrete analysis*, Math. Appl., **391**, Kluwer, Dordrecht, 1997, 13–15.

К разделу 11

- [1] Ю. А. Зуев, “Пороговые функции и пороговые представления булевых функций”, *Математические вопросы кибернетики*, № 5, Физматлит, М., 1994, 5–61.
- [2] E. Goto, H. Takahasi, “Some theorems useful in threshold logic for enumerating Boolean functions”, *Information Processing, Proceedings of IFIP Congress (Munich, 1962)*, North-Holland, Amsterdam, 1963, 747–752.
- [3] Э. И. Нечипорук, “О синтезе схем из пороговых элементов”, *Проблемы кибернетики*, № 11, Физматгиз, М., 1964, 49–62.
- [4] S. Yajima, T. Ibaraki, “A lower bound of the number of threshold functions”, *IEEE Trans. Electron. Comput.*, **EC-14:6** (1965), 926–929; рус. пер.: С. Яджима, Е. Ибарак, “Нижняя оценка числа пороговых функций”, *Кибернет. сб. Нов. сер.*, 1969, № 6, 72–81.
- [5] Ю. А. Зуев, “Асимптотика логарифма числа пороговых функций алгебры логики”, *Докл. АН СССР*, **306:3** (1989), 528–530; англ. пер.: Yu. A. Zuev, “Asymptotics of the logarithm of the number of threshold functions of the algebra of logic”, *Sov. Math., Dokl.*, **39:3** (1989), 512–513.
- [6] Ю. А. Зуев, “Комбинаторно-вероятностные и геометрические методы в пороговой логике”, *Дискрет. матем.*, **3:2** (1991), 47–57; англ. пер.: Yu. A. Zuev, “Methods of geometry and probabilistic combinatorics in threshold logic”, *Discrete Math. Appl.*, **2:4** (1992), 427–438.
- [7] А. А. Ирматов, “О числе пороговых функций”, *Дискрет. матем.*, **5:3** (1993), 40–43; англ. пер.: A. A. Irmatov, “On the number of threshold functions”, *Discrete Math. Appl.*, **3:4** (1993), 429–432.

К разделу 12

- [1] М. Холл, *Комбинаторика*, Мир, М., 1970; пер. с англ.: M. Hall, Jr., *Combinatorial theory*, Blaisdell, Waltham–Toronto–London, 1967.
- [2] J. Doyen, G. Valette, “On the number of non isomorphic Steiner triple systems”, *Math. Z.*, **120:2** (1971), 178–192.
- [3] Г. П. Егорычев, “Доказательство гипотезы ван дер Вардена для перманентов”, *Сиб. матем. журн.*, **22:6** (1981), 65–71; англ. пер.: G. P. Egorychev, “The solution of van der Waerden’s problem for permanents”, *Adv. Math.*, **42:3** (1981), 299–305.

К разделу 13

- [1] J. A. Bondy, “A graph reconstructor’s manual”, *Surveys in combinatorics*, Proceedings of the 13th British Combinatorics Conference (Guildford, 1991), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **166**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991, 221–252.
- [2] M. Bilinski, Y. S. Kwon, X. Yu, “On reconstruction of planar graphs”, *J. Combin. Theory. Ser. B*, **97**:5 (2007), 745–756.
- [3] S. Fiorini, J. Lauri, “The reconstruction of maximal planar graphs. I: Recognition”, *J. Combin. Theory Ser. B*, **30**:2 (1981), 188–195.
- [4] W. B. Giles, “The reconstruction of outerplanar graphs”, *J. Combin. Theory Ser. B*, **16**:3 (1974), 215–226.
- [5] P. J. Kelly, “A congruence theorem for trees”, *Pacific J. Math.*, **7**:1 (1957), 961–968.
- [6] J. Lauri, “The reconstruction of maximal planar graphs, II: Reconstruction”, *J. Combin. Theory Ser. B*, **30**:2 (1981), 196–214.
- [7] S. M. Ulam, *A collection of mathematical problems*, Interscience Tracts Pure Appl. Math., **8**, Wiley, New York, 1960; 2nd ed.: *Problems in modern mathematics*, Wiley, New York, 1964; рус. пер. 1-го изд.: С. Улам, *Нерешенные математические задачи*, Современные проблемы математики, Наука, М., 1964.

А. Д. Коршунов (A. D. Korshunov)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

E-mail: korshun@math.nsc.ru

Поступила в редакцию

28.08.2009