Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Трушин, Теорема о нулях над квазиполями, *УМН*, 2010, том 65, выпуск 1, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9323>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 17:15:27

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Теорема о нулях над квазиполями

Д. В. Трушин

В работе рассматривается наименее изученный класс дифференциальных колец – кольца положительной характеристики. Простые дифференциальные кольца были подробно изучены Ш. Юанем [1], а впоследствии – У. Ф. Кином [2], который и ввел термин *квазиполе*. Они являются локальными кольцами с отщепимым максимальным идеалом, все элементы которого нильпотентны. Фактор по максимальному идеалу называется *полем вычетов*. Следующая теорема вводит понятие дифференциально замкнутого квазиполя.

ТЕОРЕМА 1. *Следующие условия на квазиполе Q эквивалентны:*

- (i) *для любого натурального числа n и произвольного собственного дифференциального идеала $\mathfrak{a}$ кольца $Q\{y_1, \dots, y_n\}$ существует общий нуль в Q^n ;*
- (ii) *для любого натурального числа n и произвольного дифференциального идеала $\mathfrak{a}$ кольца $Q\{y_1, \dots, y_n\}$ его квазирадикал совпадает с множеством многочленов, обнуляющихся на всех общих нулях идеала $\mathfrak{a}$ в Q^n ;*
- (iii) *любое дифференциально конечно порожденное квазиполе над Q совпадает с Q ;*
- (iv) *любое квазиполе, порожденное одним элементом над Q , совпадает с Q .*

Основными примерами квазиполей являются кольца рядов Гурвица. Следующая теорема утверждает, что по сути других интересных колец и не бывает.

ТЕОРЕМА 2. (i) *Квазиполе НК дифференциально замкнуто тогда и только тогда, когда K – более чем счетное алгебраически замкнутое поле.*

(ii) *Для любого дифференциально замкнутого квазиполя Q гомоморфизм Тейлора является изоморфизмом между Q и рядами Гурвица НК над его полем вычетов K .*

Утверждение (ii) теоремы 1 – это аналог известной теоремы Гильберта о нулях. Это позволяет определить понятие квазимногообразия как множества нулей системы дифференциальных многочленов в некотором дифференциально замкнутом квазиполе. Понятие регулярной функции определяется как в алгебраической геометрии: это функция, совпадающая в некоторой окрестности любой точки с дробно-рациональным отображением.

Топологические свойства квазимногообразий совпадают со свойствами максимальных спектров колец многочленов от счетного числа переменных над полями; это следует из работы [3]. Понятия квазиспектра вводится Кином в работе [4]. Там же можно ознакомиться с понятием квазирадикального идеала.

Частично упорядоченное множество назовем ω -нётеровым (где ω – счетный кардинал), если любая возрастающая более чем счетная цепь его элементов стабилизируется. Следующий результат – аналог теоремы Ритта–Роденбаша о базисе.

ТЕОРЕМА 3. Для любого квазиполя Q множество квазирадикальных идеалов кольца $Q\{y_1, \dots, y_n\}$ ω -нётерово, или, что то же самое, любой квазирадикальный идеал не более чем счетно порожден.

Говорят, что топологическое пространство удовлетворяет *свойству Бэра*, если пересечение любого не более чем счетного числа открытых всюду плотных множеств непусто. Подмножество пространства, обладающего свойством Бэра, содержащее указанное пересечение, будем называть достаточно большим.

ТЕОРЕМА 4. Неприводимые квазимногообразия обладают свойством Бэра.

Отображение квазимногообразий называется *регулярным*, если все координатные функции регулярны. Регулярные отображения также называются морфизмами. Можно описать строение образа такого отображения.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ – морфизм с плотным образом, причем Y неприводимо. Тогда образ φ – достаточно большой в Y .

Список литературы

- [1] Shuen Yuan, *Duke Math. J.*, **31**:4 (1964), 623–630. [2] W. F. Keigher, L. F. Pritchard, *J. Algebra Appl.*, **7**:4 (2008), 425–441. [3] Д. В. Трушин, *Фундамент. и прикл. матем.*, **14**:4 (2008), 213–226. [4] W. F. Keigher, *Houston J. Math.*, **4**:3 (1978), 379–388.

Д. В. Трушин (D. V. Trushin)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: trushindima@yandex.ru

Представлено А. В. Михалёвым
Принято редколлегией
10.08.2009