Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Хихол, Усреднение локальных характеристик приближает семимартингал с независимыми приращениями к процессам Леви, *УМН*, 2010, том 65, выпуск 2, 199–200

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9324>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 17:29:20

Усреднение локальных характеристик приближает семимартингал с независимыми приращениями к процессам Леви

С. А. Хихол

Пусть на отрезке $[0, 1]$ задан d -мерный семимартингал X с независимыми приращениями. Цель данной заметки – указать процесс Леви L^X , распределение P_{L^X} которого “ближе” к распределению P_L произвольного процесса Леви L , чем распределение P_X процесса X . Предполагается, что L и L^X имеют ту же размерность, что и X , и заданы на том же временном интервале; распределения берутся в пространстве Скорохода $\mathbb{D}([0, 1]; \mathbb{R}^d)$.

“Большая близость” понимается в следующем смысле. Пусть вероятностные меры P и Q заданы на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$, а P' и Q' – на $(\Omega', \mathcal{F}')$. Будем говорить, что меры в паре (P, Q) находятся “ближе” друг к другу, чем в паре (P', Q') , и писать $(P, Q) \preceq (P', Q')$, если бинарный статистический эксперимент $(\Omega, \mathcal{F}, (P, Q))$ является менее информативным, чем эксперимент $(\Omega', \mathcal{F}', (P', Q'))$. Эквивалентно, $(P, Q) \preceq (P', Q')$, если для всех выпуклых вниз функций $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ имеет место неравенство для f -дивергенций: $\mathcal{J}_f(P, Q) \leq \mathcal{J}_f(P', Q')$. Детальное изложение теории сравнения статистических экспериментов можно найти в [1], а теории f -дивергенций – в монографии [2].

Частными случаями f -дивергенций являются следующие хорошо известные расстояния между распределениями:

- информации Кульбака–Лейблера для $f(x) = x \log x$ и $f(x) = -\log x$;
- квадрат расстояния Хеллингера для $f(x) = (\sqrt{x} - 1)^2/2$;
- расстояние по вариации для $f(x) = |x - 1|$;
- χ^2 для $f(x) = (x - 1)^2$.

Таким образом, “большая близость” в нашем смысле влечет большую близость в смысле этих расстояний.

Будем говорить также, что меры в парах (P, Q) и (P', Q') равноудалены (обозначение: $(P, Q) \sim (P', Q')$), если $(P, Q) \preceq (P', Q')$ и $(P', Q') \preceq (P, Q)$, т. е. соответствующие бинарные статистические эксперименты эквивалентны. Заметим, что эквивалентность $(P, Q) \sim (P', Q')$ имеет место тогда и только тогда, когда $\text{Law}\left(\frac{dQ^{\text{ac}}}{dP} \mid P\right) = \text{Law}\left(\frac{dQ'^{\text{ac}}}{dP'} \mid P'\right)$, где под Q^{ac} и Q'^{ac} понимаются абсолютно непрерывные компоненты Q и Q' относительно P и P' соответственно.

Оказывается, поставленной в начале заметки цели отвечает процесс Леви, характеристики которого являются усреднением по времени характеристик процесса X .

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – d -мерный семимартингал с независимыми приращениями на $[0, 1]$ с детерминированным триплетом локальных характеристик (B, C, ν) относительно некоторой функции урезания $h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$. Тогда существует процесс Леви L^X с триплетом $(B_1 t, C_1 t, dt \bar{F}(dx))$, $\bar{F}(A) = \nu((0, 1] \times A)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, и для любого d -мерного процесса Леви L на $[0, 1]$ процесс L^X ближе к L , чем X :

$$(P_{L^X}, P_L) \preceq (P_X, P_L).$$

Процесс L^X имеет простое описание, когда процесс X не имеет фиксированных моментов разрыва: это такой процесс Леви, одномерное распределение которого в момент 1 совпадает с одномерным распределением процесса X в момент 1. Заметим, что наличие фиксированных моментов разрыва у процесса X не обязательно влечет сингулярность его распределения P_X и распределения P_L произвольного процесса Леви L (что делало бы утверждение теоремы тривиальным для такого X).

Схема доказательства теоремы 1 состоит в следующем. Строится вспомогательная пара одномерных процессов Леви с распределениями (Q, Q') , для которой, во-первых,

$$(P_X, P_L) \sim (Q, Q'), \quad (1)$$

во-вторых, удастся проверить, что

$$(P_{L^X}, P_L) \preceq (Q, Q'). \quad (2)$$

Для доказательства соотношения (1) используется полученный автором критерий равноудаленности распределений в парах, составленных из распределений процесса Леви и семимартингала с независимыми приращениями. Ключевую роль в доказательстве этого критерия играет одно из двух найденных в работе [3] представлений для обобщенного процесса плотности распределений двух семимартингалов с независимыми приращениями без предположения об их локальной абсолютной непрерывности.

Для доказательства соотношения (2) используется частный случай (для процессов Леви) так называемой леммы о сравнении (см. [4; разд. 5.4]) и второе представление для обобщенного процесса плотности из работы [3].

Полученный результат имеет определенное отношение к следующей задаче, возникающей в финансовой математике. Пусть L – процесс Леви относительно меры P на некотором стохастическом базисе. Пусть $\mathcal{M}^a(L)$ – множество вероятностных мер Q , абсолютно непрерывных относительно P и таких, что L – локальный мартингал относительно Q . Рассмотрим задачу минимизации f -дивергенции $\mathcal{J}_f(Q, P)$ по $Q \in \mathcal{M}^a(L)$ для фиксированной выпуклой функции $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Для некоторых f известно, что если экстремум достигается, то он достигается на мере, по которой L является процессом Леви. В частности, в работе [5] это доказано для $f(x) = x \log x$, а в работе [6] – для $f(x) = x^q$, $q \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$. Для произвольной выпуклой функции f , по-видимому, среди экстремальных точек не обязательно найдется мартингальная мера, по которой L является процессом Леви.

Однако наш результат показывает, что если экстремум достигается на мере Q' , относительно которой L есть процесс с независимыми приращениями, то экстремум будет также достигаться и на некоторой мере $\bar{Q}$, по которой L есть процесс Леви.

Автор благодарит профессора А. А. Гущина за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

- [1] E. Torgersen, *Comparison of statistical experiments*, Encyclopedia Math. Appl., **36**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991. [2] F. Liese, I. Vajda, *Convex statistical distances*, Teubner-Texte Math., **95**, Teubner, Leipzig, 1987. [3] С. А. Хихол, “Формула для обобщенного процесса плотности распределений семимартингалов с независимыми приращениями”, Теория вероятн. и ее примен., **54**:4 (2009), 716–729. [4] А. А. Гущин, Э. Мордецкий, *Стохастическая финансовая математика*, Тр. МИАН, **237**, Наука, М., 2002, 80–122; англ. пер.: А. А. Gushchin, È. Mordetski, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2002, № 2, 73–113. [5] F. Esche, M. Schweizer, *Stochastic Process. Appl.*, **115**:2 (2005), 299–327. [6] M. Jeanblanc, S. Klöppel, Y. Miyahara, *Ann. Appl. Probab.*, **17**:5/6 (2007), 1615–1638; arXiv: 0710.5594, 2007.

С. А. Хихол (S. A. Khikhhol)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: sahihol@gmail.com

Представлено И. А. Дынниковым

Принято редколлегией

18.09.2009