Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Володин, Кубические реализации флаговых несто-
эдров и доказательство гипотезы Гала для них, *УМН*,
2010, том 65, выпуск 1, 183–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9327>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 15:37:46

Кубические реализации флаговых нестоэдров и доказательство гипотезы Гала для них

В. Д. Володин

Для каждого n -мерного выпуклого многогранника P можно определить f -полином формулой $f(P)(t) = \sum_{i=0}^n f_i t^i$, где f_i – число граней размерности i , и h -полином формулой $h(P)(t) = f(P)(t-1)$. Соотношения Дена–Соммервилля для простых многогранников равносильны возвратности их h -полиномов, следовательно, $h(P)(t) = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \gamma_i t^i (1+t)^{n-2i}$. Полином $\gamma(P)(\tau) = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \gamma_i \tau^i$ называется γ -полиномом. Простой многогранник называется флаговым, если любой набор его попарно пересекающихся граней имеет непустое пересечение.

ГИПОТЕЗА (Gal, [1], 2005). Если простой многогранник P флаговый, то $\gamma_i(P) \geq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Совокупность B непустых подмножеств множества $[n+1] = \{1, \dots, n+1\}$ называется производящим множеством на $[n+1]$, если: 1) $\{i\} \in B$ для всех $i \in [n+1]$; 2) $S_1, S_2 \in B$ и $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Rightarrow S_1 \cup S_2 \in B$. Нестоэдром P_B производящего множества B называется сумма Минковского $\sum_{S \in B} \Delta_S \subset \mathbb{R}^{n+1}$, где $\Delta_S = \text{conv}\{e_i, i \in S\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Каждый нестоэдр является простым многогранником (см. [2]).

Гипотеза Гала была доказана для нестоэдров, соответствующих хордовым производящим множествам (см. [2]), и для нестоэдров, соответствующих полным двудольным графам $K_{m,n}$ (см. [3], [4]). Центральный результат этой работы: гипотеза Гала верна для всех флаговых нестоэдров.

Рассмотрим множество $\mathcal{P}^{\text{cube}}$ многогранников, получающихся из куба последовательной срезкой граней коразмерности 2. Следующий результат является двойственным к предложению 2.4.6 из [1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. При срезке грани коразмерности 2 простой флаговый многогранник остается простым и флаговым.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если $P \in \mathcal{P}^{\text{cube}}$, то $\gamma_i(P) \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть P' получен из P срезкой грани $G \subset P$ коразмерности 2. Тогда $\gamma(P') = \gamma(P) + \tau\gamma(G)$. Индукция завершает доказательство.

Согласно [5], любой нестоэдр P_B получается срезками граней из симплекса. Здесь мы покажем, что любой флаговый нестоэдр получается срезками граней коразмерности 2 из куба. Для ассоциэдров этот факт был отмечен в [6].

Производящее множество B на $[n+1]$ называется связным, если $[n+1] \in B$. В этом случае P_B имеет размерность n , а его гиперграни находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами S множества $B \setminus [n+1]$ и обозначаются F_S . Решетка граней нестоэдра описывается следующим образом.

Гиперграни $F_{S_1}, \dots, F_{S_k}$ имеют непустое пересечение тогда и только тогда, когда:

- 1) для любых S_i, S_j или $S_i \subset S_j$, или $S_j \subset S_i$, или $S_i \cap S_j = \emptyset$;
- 2) для любых $S_{i_1}, \dots, S_{i_p}$ таких, что $S_{i_j} \cap S_{i_l} = \emptyset$, выполнено $S_{i_1} \sqcup \dots \sqcup S_{i_p} \notin B$.

Конструкция Н. Ероховца. Пусть $B, B_1, \dots, B_{n+1}$ – связные производящие множества на $[n+1], [k_1], \dots, [k_{n+1}]$. Тогда определено связное производящее множество $B(B_1, \dots, B_{n+1})$ на $[k_1 + \dots + k_{n+1}]$, состоящее из $S^i \in B_i$ и $\bigsqcup_{i \in S} [k_i]$, $S \in B$.

ЛЕММА 4 (Н. Ероховец). Пусть $B, B_1, \dots, B_{n+1}$ – связные производящие множества на $[n+1], [k_1], \dots, [k_{n+1}]$ и $B' = B(B_1, \dots, B_{n+1})$, тогда многогранник $P_{B'}$ комбинаторно эквивалентен многограннику $P_B \times P_{B_1} \times \dots \times P_{B_{n+1}}$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Каждый нестоэдр P_B комбинаторно эквивалентен нестоэдру P_{B_1} , где производящее множество B_1 связное.

Далее, без ограничения общности, будем рассматривать только связные производящие множества.

Разложение $S \in B_2$ по элементам B_1 . Пусть B_1 и B_2 – связные производящие множества на $[n+1]$ и $B_1 \subset B_2$. Тогда назовем набор $S_1, \dots, S_k \in B_1$ разложением $S \in B_2$ по элементам B_1 , если $S = S_1 \sqcup \dots \sqcup S_k$ и для любого $J \subset [k]$ такого, что $1 < |J| < k$, верно $\bigcup_{j \in J} S_j \notin B_1$. Разложение существует и единственно.

Пусть B_1 и B_2 – связные производящие множества на $[n+1]$ и $B_1 \subset B_2$. Занумеруем элементы $B_2 \setminus B_1$ таким образом, что если $S^i \subseteq S^j$, то $i \geq j$. Пусть $S^i = S_1^i \sqcup \dots \sqcup S_{k_i}^i$ – разложение $S^i \in B_2 \setminus B_1$ по элементам B_1 . Тогда P_{B_2} получается из P_{B_1} последовательной срезкой граней $G^i = \bigcap_{j=1}^{k_i} F_{S_j^i}$, начиная с $i = 1$. Утверждение, двойственное этому, можно найти в [5].

ЛЕММА 6. Пусть B_1 и B_3 – связные производящие множества на $[n+1]$ такие, что $B_1 \subsetneq B_3$, а многогранники P_{B_1} и P_{B_3} – флаговые. Тогда найдется производящее множество B_2 такое, что $B_1 \subsetneq B_2 \subseteq B_3$, а многогранник P_{B_2} флаговый и получается из P_{B_1} последовательностью срезов граней коразмерности 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S – минимальный по включению элемент множества $B_3 \setminus B_1$. Возьмем в качестве B_2 минимальное по включению производящее множество $\widehat{B_1 \cup S}$, содержащее $B_1 \cup S$. Поскольку $S \in B_3$, а P_{B_3} флаговый, найдутся $I, J \in B_3$ такие, что $I \sqcup J = S$. Из выбора S следует, что $I, J \in B_1$. Поэтому в разложении любого элемента $B_2 \setminus B_1$ участвует не более двух множеств. Таким образом, срезаться будут только грани коразмерности 2. Из предложения 2 следует, что P_{B_2} флаговый.

ЛЕММА 7 (ср. [2; предложение 7.3]). Если B – связное производящее множество на $[n+1]$, а P_B флаговый, то найдется производящее множество $B_0 \subset B$ такое, что P_{B_0} эквивалентно кубу I^n .

Производящему множеству, состоящему из всех подмножеств множества $[n+1]$, соответствует пермutoэдр Pe^n .

СЛЕДСТВИЕ 8. Если P_B флаговый, то последовательной срезкой граней коразмерности 2 можно получить P_B из куба I^n и пермutoэдр Pe^n из P_B .

Полиномы $\gamma(Pe^n)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению [6], из которого следует рекурсия на коэффициенты $\gamma_i(Pe^n)$ и, в частности, их неотрицательность.

ТЕОРЕМА 9 (основной результат). 1) Пусть P_B – флаговый нестоэдр размерности n , тогда $0 \leq \gamma_i(P_B) \leq \gamma_i(Pe^n)$.

2) Пусть B_1 и B_2 – связные производящие множества на $[n+1]$ такие, что $B_1 \subset B_2$, а P_{B_1} и P_{B_2} – флаговые, тогда $\gamma_i(P_{B_1}) \leq \gamma_i(P_{B_2})$.

Автор благодарен В. М. Бухштаберу за постановку задачи и постоянное внимание к работе и Н. Ерохову за ценные замечания.

Список литературы

- [1] Š. R. Gal, *Discrete Comput. Geom.*, **34**:2 (2005), 269–284. [2] A. Postnikov, V. Reiner, L. Williams, *Doc. Math.*, **13** (2008), 207–273. [3] Н. Ю. Ероховец, *Геометрия, топология и математическая физика. II*, Тр. МИАН, **266**, Наука, М., 2009, 127–139. [4] A. G. Fenn, [arXiv: abs/0908.0605](https://arxiv.org/abs/0908.0605), 2009. [5] E. M. Feichtner, I. Müller, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **133**:4 (2005), 999–1006; E.-M. Feichtner, I. Mueller, [arXiv: math/0311430](https://arxiv.org/abs/math/0311430). [6] V. M. Buchstaber, *Trends in Mathematics*, **10**, № 1, 2008, 1–64.

В. Д. Володин (V. D. Volodin)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: volodinvadim@gmail.com

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
02.11.2009