Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Айгунов, К. Х. Жвамер, Асимптотическое поведение ортонормированных собственных функций задачи типа Редже с суммируемой положительной весовой функцией, *УМН*, 2009, том 64, выпуск 6, 169–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9328>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 17:25:24

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

**Асимптотическое поведение ортонормированных
собственных функций задачи типа Редже
с суммируемой положительной весовой функцией**

Г. А. Айгунов, К. Х. Жвамер

Пусть числа $a > 0$, m и M ($0 < m \leq M$) фиксированы. Обозначим через $L^+[0; a]$ совокупность всех суммируемых на сегменте $[0; a]$ функций $\rho(x)$, удовлетворяющих условию $m \leq \rho(x) \leq M$. В множестве $L^+[0; a]$ введем обычную L_1 -метрику.

В дальнейшем такие функции будем называть весовыми.

Рассмотрим спектральную задачу ($\rho(x) \in L^+[0; a]$, $q(x) \in L^+[0; a]$)

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 \rho(x)y, \quad (1)$$

$$y(0) = y'(a) - i\lambda y(a) = 0, \quad (2)$$

$$\left(\int_0^1 \rho(x)|y(x)|^2 dx \right)^2 = 1, \quad \text{где } \lambda = \sigma + i\tau. \quad (3)$$

Задача (1)–(3) в случае, когда $\rho(x) \equiv 1$, рассматривалась в работах [1], [2], а для уравнения порядка $2n$ – в [3], [4]. В работе [5] рассмотрен случай, когда $\rho(x) \not\equiv 1$. В этих работах установлено, что спектр задачи состоит из счетного числа собственных значений λ_n , которые, кроме, быть может, конечного числа, однократны, и получена асимптотика спектра, причем в регулярном случае ($\rho(a) \neq 1$) доказано, что $|\operatorname{Im} \lambda_n| < \operatorname{const}$.

Вопросы асимптотического поведения собственных значений и функций в случае негладких коэффициентов менее изучены в отличие от аналогичной задачи Штурма–Лиувилля.

В дальнейшем весовую функцию $\rho(x)$, для которой выполнено неравенство $|\operatorname{Im} \lambda_n| < \operatorname{const}$, будем называть регулярной.

В данной работе изучается вопрос о возможной скорости роста собственных функций задачи (1)–(3).

ТЕОРЕМА 1. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *существует константа $C(m, M)$, зависящая от чисел m и M , такая, что для любого собственного числа λ_n и соответствующей собственной функции $y_n(x)$ задачи (1)–(3) $\max_{x \in [0; a]} |y_n(x)| < C(m, M)|\lambda_n|^{1/2}$;*

2) *для любой функции $q(x) \equiv q \in L^+[0; a]$ существует весовая функция $\rho(x)$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\max_{x \in [0; a]} |y_n(x)|}{|\lambda_n|^{1/2}} = C > 0$, где собственные значения λ_n и функции $y_n(x)$ соответствуют регулярному весу $\rho(x)$.*

Для доказательства первого утверждения теоремы умножим уравнение (1) на $\bar{y}(x)$, проинтегрируем полученное равенство от 0 до a и используем краевые условия (2). В результате получим:

$$\int_0^a |y'(x)|^2 dx = \lambda^2 + i|y(a)|\lambda - \int_0^a q(x)|y(x)|^2 dx. \quad (4)$$

С другой стороны, нетрудно установить, что

$$|y(x)|^2 \leq \frac{2}{\sqrt{m}} \int_0^a \sqrt{\rho(s)} |y(s)| |y'(s)| ds. \quad (5)$$

Оценивая интеграл в (5) с помощью неравенства Коши–Буняковского, имеем:

$$|y(x)|^2 \leq \frac{2}{\sqrt{m}} \left(\int_0^a \rho(s) |y(s)|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^a |y'(s)|^2 ds \right)^{1/2}.$$

Учитывая равенства (3) и (4), получаем

$$|y(x)|^2 \leq \frac{2}{\sqrt{m}} \left(|\lambda|^2 + |y(a)|^2 |\lambda| + \int_0^a q(x) |y(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Отсюда при больших $|\lambda|$ и для любого $\varepsilon > 0$ получаем

$$\max_x |y(x)| \leq \left(\sqrt{1 + \sqrt{m+1}} \sqrt{\frac{2}{m}} + \varepsilon \right) |\lambda|^{1/2},$$

что и доказывает первое утверждение теоремы, второе утверждение основывается на следующей лемме.

ЛЕММА. Пусть $q(x) \equiv q \in L_{[0;a]}^+$ и $\rho_0(x) \in L_{[0;a]}^+$ – кусочно-гладкая, $\rho(a) \neq 1$, константы $0 \leq a_0 < a$ и $0 < \varepsilon < |\rho_0(a) - 1|$ произвольны и фиксированы, а r_ε – множество весовых функций $\rho(x)$, удовлетворяющих соотношению $\|\rho(x) - \rho_0(x)\|_{C[0,a]} < \varepsilon$. Тогда существуют константа $C = C(\varepsilon) > 0$ и номер $n_0 = n_0(a_0, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ такие, что для любого $n > n_0$ существует кусочно-гладкая $\rho_n(x) \in r_\varepsilon$ такая, что $\rho(x) = \rho_0(x)$, если $x \leq a_0$, и справедливо неравенство

$$\frac{\max_{x \in [0,a]} |y_n(x, \rho_n)|^{1/2}}{|\lambda_n(\rho_n)|} > C,$$

причем C не зависит от q , a_0 и $\rho_0(x)$, а n_0 не зависит от q и $\rho_0(x)$.

Список литературы

- [1] Т. Редже, *Математика. Сб. пер.*, **7**:4 (1963), 83–89; пер. с англ.: Т. Regge, *Nuovo Cimento*, **8**:5 (1958), 671–679. [2] А. О. Кравицкий, *Докл. АН СССР*, **170**:6 (1966), 1255–1258; англ. пер.: А. О. Kravitskij, *Soviet Math. Dokl.*, **7** (1966), 1361–1365. [3] М. М. Гехтман, *Докл. АН СССР*, **201**:5 (1971), 1025–1028; англ. пер.: М. М. Gehtman, *Soviet Math. Dokl.*, **12** (1971), 1755–1758. [4] Г. А. Айгунов, *Докл. АН СССР*, **213**:5 (1973), 1001–1004; англ. пер.: G. A. Aigunov, *Soviet Math. Dokl.*, **14**, 1816–1820. [5] Г. А. Айгунов, *Функциональный анализ, теория функций и их приложения*, вып. 2, ч. I, Изд-во Дагестан. гос. ун-та, Махачкала, 1975, 21–41.

Г. А. Айгунов (G. A. Aigunov)
Дагестанский государственный университет
E-mail: aigounovG@mail.ru

Представлено Р. А. Минлосом
Принято редколлегией
05.09.2009

К. Х. Жвамер (K. H. Jwamer)
Дагестанский государственный университет