Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Ремизов, О геодезических в метриках с особенностями типа Клейна, *УМН*, 2010, том 65, выпуск 1, 187–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9329>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 13:02:53

О геодезических в метриках с особенностями типа Клейна

А. О. Ремизов

В этой заметке анонсируются некоторые результаты о геодезических в метрике

$$ds^2 = \frac{\alpha(t, x)(dx^2 + \varepsilon dt^2)}{\omega^r(t, x)}, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad (1)$$

где $\alpha(t, x) > 0$ и $\omega(t, x)$ – гладкие (класса C^∞) функции, $r > 0$ – вещественное число. Предполагается, что уравнение $\omega(t, x) = 0$ задает гладкую регулярную кривую A , т. е. во всех точках $(t, x) \in A$ выполнено условие $\nabla \omega \neq 0$. В случае $\varepsilon = -1$ предполагается также, что кривая A не касается радикала формы $dx^2 + \varepsilon dt^2$, т. е. во всех точках $(t, x) \in A$ выполнено условие $|\omega'_t| \neq |\omega'_x|$. Цель работы – исследование особенностей геодезического потока и геодезических, проходящих через точки кривой A , вблизи этих точек. Все результаты локальные и с помощью изотермических координат переносятся на метрики вида $ds^2 = Q/\omega^r$, где Q – произвольная гладкая невырожденная метрика (если Q индефинитна, то требуется, чтобы кривая $A = \{\omega = 0\}$ не касалась $\text{Rad } Q$).

Метрики вида (1) суть обобщение метрики Клейна, используемой в модели плоскости Лобачевского ($r = 2$). Они также связаны с метрикой Клеро–Луивилля ($r = 1$), имеющей приложения в теории управления. Так, в [1] рассматривается метрика вида

$$ds^2 = dx^2 + \frac{g(x^2, t)}{x^2} dt^2 = \frac{x^2 dx^2 + g(x^2, t) dt^2}{x^2}, \quad (2)$$

где g – положительная гладкая функция (t и x – угловые координаты на сфере, линия $A = \{x = 0\}$ – экватор). В случае, если $g(x^2, t) \equiv 1$, это – хорошо известная метрика Грушина [2], [3]. Заменой $\tilde{x} = x^2$ метрика (2) приводится к виду $ds^2 = Q/(4\tilde{x})$ с квадратичной формой $Q = d\tilde{x}^2 + 4g(\tilde{x}, t) dt^2$, а последняя с помощью изотермических координат приводится к виду (1) с $r = 1$ и $\varepsilon = +1$.

Геодезические в метрике (1) суть экстремали уравнения Эйлера–Лагранжа для функционала длины с $L^2 = \alpha(p^2 + \varepsilon)/\omega^r$, где $p = dx/dt$. Преобразуя, получаем уравнение

$$2\varepsilon\alpha\omega \frac{dp}{dt} = (\mu_1 p - \varepsilon\mu_0)(p^2 + \varepsilon), \quad p = \frac{dx}{dt}, \quad (3)$$

где $\mu_1 = r\alpha\omega'_t - \alpha'_t\omega$ и $\mu_0 = r\alpha\omega'_x - \alpha'_x\omega$. В пространстве (t, x, p) уравнение (3) задает поле направлений

$$\dot{t} = 2\varepsilon\alpha\omega, \quad \dot{x} = 2p\varepsilon\alpha\omega, \quad \dot{p} = (\mu_1 p - \varepsilon\mu_0)(p^2 + \varepsilon), \quad (4)$$

проекция интегральных кривых которого на плоскость (t, x) вдоль оси p являются геодезическими. Поле (4) обладает двумя важными свойствами.

Во-первых, для каждой точки $q = (t, x) \in A$ и каждого p такого, что $(\mu_1 p - \varepsilon\mu_0) \times (p^2 + \varepsilon) \neq 0$, поле (4) имеет ровно одну интегральную кривую, проходящую через точку (q, p) , проекция которой на плоскость (t, x) дает точку q и не соответствует никакой геодезической (это – прямая в пространстве (t, x, p) , параллельная оси p). Таким образом, геодезические, проходящие через точку $q \in A$, являются проекциями интегральных кривых поля (4), проходящих через его особые точки (q, p) , т. е. $(\mu_1 p - \varepsilon\mu_0)(p^2 + \varepsilon) = 0$.

Во-вторых, особые точки поля (4) определяются уравнениями $\omega = 0$ и $(\mu_1 p - \varepsilon\mu_0) \times (p^2 + \varepsilon) = 0$, задающими в случае $\varepsilon = +1$ кривую $W_0^c = \{q \in A, p = \varepsilon\mu_0/\mu_1\}$. В случае $\varepsilon = -1$ к ней добавляется еще пара кривых $W_\pm^c = \{q \in A, p = \pm 1\}$. В силу условия $|\omega'_t| \neq |\omega'_x|$ кривые $W_0^c, W_\pm^c$ вблизи A не пересекаются и являются центральными

многообразиями поля ($W^c = W_0^c \cup W_+^c \cup W_-^c$). Спектр линейной части поля направлений (4) определен с точностью до пропорциональности и в точках кривой W_0^c равен $(2, r, 0)$, а в точках кривых $W_\pm^c$ равен $(1, -r, 0)$. При этом собственному значению r или $-r$ соответствует собственное направление ∂_p .

Комбинируя результаты работ [4], [5], мы получаем гладкие орбитальные нормальные формы роста поля (4) в его особых точках. Так, в любой точке $(p, q) \in W_0^c$ росток (4) имеет нормальную форму

$$\dot{\xi} = r\xi, \quad \dot{\eta} = 2\eta, \quad \dot{\zeta} = 0, \quad \text{если } \max\{r/2, 2/r\} \notin \mathbb{N}, \quad (5)$$

$$\dot{\xi} = n\xi + \varphi(\zeta)\eta^n, \quad \dot{\eta} = \eta, \quad \dot{\zeta} = 0, \quad \text{если } \max\{r/2, 2/r\} = n \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

Если $\varphi(0) \neq 0$, то коэффициент $\varphi(\zeta)$ в нормальной форме (6) может быть заменен на 1. Если $\varphi(\zeta)$ имеет в начале координат нуль конечного порядка s , то $\varphi(\zeta)$ может быть заменен на ζ^s . В случае $r = 1$ мы всегда имеем нормальную форму (6) с $n = 2$ и $\varphi(\zeta) \equiv 0$. В случае $r = 2$ тождество $\varphi(\zeta) \equiv 0$ имеет место, например, если функция $\omega(t, x)$ линейна и ограничение $\alpha(t, x)$ на прямую A тождественно равно константе.

В любой точке $(p, q) \in W_\pm^c$ росток (4) имеет нормальную форму

$$\dot{\xi} = \xi, \quad \dot{\eta} = -r\eta, \quad \dot{\zeta} = 0, \quad \text{если } r \notin \mathbb{Q}, \quad (7)$$

$$\dot{\xi} = n\xi, \quad \dot{\eta} = -m\eta\Phi(\rho, \zeta), \quad \dot{\zeta} = \rho\Psi(\rho, \zeta), \quad \text{если } r \in \mathbb{Q}, \quad (8)$$

где $\rho = \xi^m \eta^n$ – резонансный моном, $r = m/n$, $m, n \in \mathbb{N}$, $(m, n) = 1$ и $\Phi(0, 0) = 1$. Если $\Psi(0, 0) \neq 0$, то $\Phi(\rho, \zeta)$ и $\Psi(\rho, \zeta)$ в (8) могут быть заменены на 1. Условие $\Psi(0, 0) \neq 0$ выполнено для метрики (1) общего положения, при $r = 1$ оно выполнено вообще всегда. Топологически обе нормальные формы (7) и (8) эквивалентны росту $\dot{\xi} = \xi$, $\dot{\eta} = -\eta$, $\dot{\zeta} = 0$.

Чтобы получить портрет геодезических, выходящих из точки $q \in A$ с касательным направлением $p_0 = \varepsilon\mu_0/\mu_1$, нужно спроектировать на плоскость (t, x) вдоль оси p интегральные кривые поля (4), лежащие на инвариантном слое ($\zeta = c(\text{const})$ в нормальной форме (5) или (6)), проходящем через данную точку (q, p_0) . Это дает пучок геодезических γ_k , $k \in \mathbb{R}$, с общей 1-струей в точке q . Струи высших порядков зависят от r и $\varphi(c)$. Если $r < 2$, то все γ_k , кроме одной, имеют в точке q бесконечную вторую производную (при $r = 1$ это полукубические параболы с вершиной в q).

Пусть теперь $r = 2n$, $n \in \mathbb{N}$, и мы имеем нормальную форму (6). Если $\varphi(c) \neq 0$, то все γ_k – класса C^n с общей n -струей и бесконечной производной порядка $n+1$. Если $\varphi(c) = 0$, то все γ_k – класса C^∞ с общей n -струей и разными $(n+1)$ -струями.¹ В случае $\varepsilon = +1$ все геодезические, выходящие из точки $q = (t_*, x_*) \in A$, исчерпываются пучком γ_k , $k \in \mathbb{R}$. В случае $\varepsilon = -1$ к ним добавляются две изотропные линии $\gamma_\pm$: $(x - x_*) = \pm(t - t_*)$ с касательными направлениями $p = \pm 1$.

Список литературы

- [1] B. Bonnard, J.-B. Caillaud, E. Trélat, *Dynamical Systems and Differential Equations. Proceedings of the 6th AIMS International Conference*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 2007, 145–154.
[2] В. В. Грушин, *Матем. сб.*, **84**:2 (1971), 163–195. [3] Р. Р. Файзуллин, *Сиб. матем. журн.*, **44**:6 (2003), 1377–1384. [4] R. Roussarie, *Astérisque*, **30**, Société Mathématique de France, Paris, 1975, 1–182. [5] А. О. Ремизов, *СМФН*, **19** (2006), 131–170.

А. О. Ремизов (А. О. Remizov)
International School for Advanced Studies (SISSA)
E-mail: alexey-remizov@yandex.ru, remizov@sisssa.it

Представлено М. И. Зеликиным
Принято редколлегией
11.11.2009

¹ Например, для обычной метрики Клейна (1) с $r = 2$, $\varepsilon = +1$ и $\alpha(t, x) = 1$, $\omega(t, x) = t$ в нормальной форме (6) $\varphi(\zeta) \equiv 0$. Геодезические – окружности $(x - x_0)^2 + t^2 = R^2$ и прямые $x = c$ – являются C^∞ -гладкими вблизи точек пересечения с абсолютном $A = \{t = 0\}$ и для фиксированной точки $q \in A$ различаются 2-струями.