Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Е. Панов, О структуре 2-алгебры Хопфа в когомологиях четырехмерных многообразий, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 1, 161–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm933>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 14:12:49

О СТРУКТУРЕ 2-АЛГЕБРЫ ХОПФА В КОГОМОЛОГИЯХ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Т. Е. ПАНОВ

N -алгебры Хопфа были введены В. М. Бухштабером и Е. Рисом в [2]. Важные примеры таких алгебр дают кольца когомологий n -значных групп (см. [1], [2]). В данной работе описаны все четырехмерные односвязные многообразия, алгебра когомологий которых допускает структуру 2-алгебры Хопфа.

Пусть задано векторное пространство V над полем k с базисом $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, $\dim V = n$, и на нем задана невырожденная симметрическая форма $C = (c_{ij})$, $(\lambda_i, \lambda_j) = c_{ij}$. При помощи V и C мы можем построить $A = A_0 \oplus A_2 \oplus A_4$ – градуированную коммутативную ассоциативную алгебру с единицей на поле k . А именно, пусть $A_0 = k$, $A_2 = V = \langle \lambda_1, \dots, \lambda_n \rangle$, $A_4 = k$ и $f \in A_4$ – образующая, а умножение определяется так: $\lambda_i \lambda_j = c_{ij} f$, $\lambda_i f = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Структура 2-алгебры Хопфа на градуированной алгебре называется *однородной*, если Δ сохраняет градуировку.

Следующий результат из [2] мы используем в качестве определения 2-алгебры Хопфа: алгебра A , снабженная однородным коумножением $\Delta: A \rightarrow A \otimes A$, является 2-алгеброй Хопфа тогда и только тогда, когда для любых $a_1, a_2, a_3 \in A$ выполнено

$$(1) \quad \Delta(a_1 a_2 a_3) = \Delta a_1 \Delta(a_2 a_3) + \Delta a_2 \Delta(a_3 a_1) + \Delta a_3 \Delta(a_1 a_2) - 2\Delta(a_1) \Delta(a_2) \Delta(a_3).$$

Более того, соотношение (1) линейно, т.е. его достаточно проверять на мономах или на аддитивных образующих.

Однородное коумножение Δ в алгебре A должно иметь следующий вид:

$$(2) \quad \begin{aligned} \Delta(\lambda_i) &= \lambda_i \otimes 1 + 1 \otimes \lambda_i, \\ \Delta(f) &= f \otimes 1 + 1 \otimes f + d^{kl} \lambda_k \otimes \lambda_l. \end{aligned}$$

Мы найдем условия на матрицу $D = (d^{ij})$, являющиеся необходимыми и достаточными для того, чтобы алгебра A с коумножением, заданным формулами (2), являлась 2-алгеброй Хопфа.

ТЕОРЕМА 1. *Тождество (1) выполнено для любых $a_i \in A_2$, т.е. для $a_i = \lambda_j$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, \dots, n$, тогда и только тогда, когда $D = C^{-1}$, т.е. $d^{ij} c_{jk} = \delta_k^i$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. 1) Пусть $D = C^{-1}$. Тогда имеем: если $a_1 = \lambda_i$, $a_2 = \lambda_j$, $a_3 = \lambda_k$, то

$$(3) \quad \begin{aligned} \Delta(\lambda_i \lambda_j \lambda_k) &= 0, \\ \Delta \lambda_i \Delta(\lambda_j \lambda_k) &= 2c_{jk}(f \otimes \lambda_i + \lambda_i \otimes f), \\ \Delta \lambda_j \Delta(\lambda_k \lambda_i) &= 2c_{ki}(f \otimes \lambda_j + \lambda_j \otimes f), \\ \Delta \lambda_k \Delta(\lambda_i \lambda_j) &= 2c_{ij}(f \otimes \lambda_k + \lambda_k \otimes f), \\ \Delta \lambda_i \Delta \lambda_j \Delta \lambda_k &= c_{jk}(f \otimes \lambda_i + \lambda_i \otimes f) + c_{ki}(f \otimes \lambda_j + \lambda_j \otimes f) + c_{ij}(f \otimes \lambda_k + \lambda_k \otimes f). \end{aligned}$$

Отсюда

$$(4) \quad \Delta \lambda_i \Delta(\lambda_j \lambda_k) + \Delta \lambda_j \Delta(\lambda_k \lambda_i) + \Delta \lambda_k \Delta(\lambda_i \lambda_j) - 2\Delta \lambda_i \Delta \lambda_j \Delta \lambda_k = \Delta(\lambda_i \lambda_j \lambda_k),$$

и (1) выполнено для $a_i \in A_2$.

2) Пусть теперь выполнено (4). Имеем:

$$\begin{aligned} \Delta \lambda_i \Delta(\lambda_j \lambda_k) &= c_{jk}(\delta_i^n + d^{mn} c_{mi})(f \otimes \lambda_n + \lambda_n \otimes f), \\ \Delta \lambda_j \Delta(\lambda_k \lambda_i) &= c_{ki}(\delta_j^n + d^{mn} c_{mj})(f \otimes \lambda_n + \lambda_n \otimes f), \\ \Delta \lambda_k \Delta(\lambda_i \lambda_j) &= c_{ij}(\delta_k^n + d^{mn} c_{mk})(f \otimes \lambda_n + \lambda_n \otimes f), \\ \Delta \lambda_i \Delta \lambda_j \Delta \lambda_k &= (c_{jk} \delta_i^n + c_{ki} \delta_j^n + c_{ij} \delta_k^n)(f \otimes \lambda_n + \lambda_n \otimes f). \end{aligned}$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научного фонда (грант № M3Z000).

Тогда из (4) имеем:

$$(5) \quad c_{jk}(d^{mn}c_{im} - \delta_i^n) + c_{ki}(d^{mn}c_{jm} - \delta_j^n) + c_{ij}(d^{mn}c_{km} - \delta_k^n) = 0.$$

Отсюда следует, что $d^{mn}c_{im} = \delta_i^n$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь тождество (1) в случае, когда некоторые из a_i совпадают с $f \in A_4$. Если хотя бы два из a_i равны f , то обе части тождества (1) обращаются в нуль по соображениям размерности (так как $\lambda_i^3 = f^2 = \lambda_i f = 0 \forall i$). Поэтому осталось рассмотреть случай $a_1 = \lambda_i$, $a_2 = \lambda_j$, $a_3 = f$. Тогда (1) сводится к

$$(6) \quad \Delta(\lambda_i \lambda_j) \Delta f - 2 \Delta \lambda_i \Delta \lambda_j \Delta f = 0.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda_i \lambda_j) \Delta f - 2 \Delta \lambda_i \Delta \lambda_j \Delta f \\ = -2c_{ij}f \otimes f + c_{ij}d^{mn}c_{mn}f \otimes f - 4\delta_i^n c_{jn}f \otimes f = c_{ij}(\dim A_2 - 6)f \otimes f. \end{aligned}$$

Отсюда получаем $\dim A_2 = 6$.

Итак, мы доказали следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 2. Пусть имеется градуированная коммутативная ассоциативная алгебра с единицей $A = A_0 \oplus A_2 \oplus A_4$, $A_0 = A_4 = k$, $f \in A_4$, $A_2 = \langle \lambda_1, \dots, \lambda_n \rangle$ с умножением $\lambda_i \lambda_j = c_{ij}f$, где $C = c_{ij}$ – невырожденная матрица. Тогда коумножение, задаваемое формулами (2), является 2-кольцевым гомоморфизмом, т.е. задает на A структуру 2-алгебры Хопфа тогда и только тогда, когда $D = C^{-1}$ и $\dim A_2 = 6$.

Алгебры такого вида, как мы определили выше возникают как алгебры когомологий односвязных четырехмерных многообразий. Пусть M – такое многообразие, $k = \mathbb{Z}$, $A = H^*(M, \mathbb{Z})$, $A_0 = H^0(M, \mathbb{Z})$, $A_2 = H^2(M, \mathbb{Z})$, $A_4 = H^4(M, \mathbb{Z})$. Матрица C в определении алгебры A это просто матрица пересечений двумерных циклов на M .

Таким образом, M допускает структуру 2-алгебры Хопфа в когомологиях тогда и только тогда, когда $\dim H^2(M) = 6$ и коумножение задается формулами (2), где $\lambda_i \in H^2(M)$, $f \in H^4(M)$ – образующие, а $D = C^{-1}$ – матрица, обратная к матрице пересечений (заметим, что так как C унимодулярна, то D – целочисленна). Ассоциированная с такой матрицей квадратичная форма приводится к одному из следующих видов (см. [6]): $C = kI \oplus (6 - k)(-I)$ или $C = 3U$. Здесь $I = (1)$, U – матрица, соответствующая форме $2xy$. В этих случаях $C^{-1} = C \implies D = C$.

Форма $kI \oplus (6 - k)(-I)$ реализуется как форма пересечений для многообразия $k\mathbb{C}P^2 \# (6 - k)(-\mathbb{C}P^2)$, а $3U$ – как форма пересечений для $(S^2 \times S^2) \# (S^2 \times S^2) \# (S^2 \times S^2)$. Здесь $\#$ означает операцию взятия связной суммы. Имеется следующий результат (см. [5]): односвязные четырехмерные многообразия M_1, M_2 гомотопически эквивалентны тогда и только тогда, когда пары $(H^2(M_1), L_{M_1})$, $(H^2(M_2), L_{M_2})$ изоморфны как пространства с внутренним произведением.

Поэтому единственными (с точностью до гомотопической эквивалентности) односвязными четырехмерными многообразиями, допускающими структуру 2-алгебры Хопфа в когомологиях, являются $k\mathbb{C}P^2 \# (6 - k)(-\mathbb{C}P^2)$ и $3(S^2 \times S^2)$.

В заключение я хотел бы выразить благодарность моему научному руководителю профессору В. М. Бухштаберу за постановку задачи и активную поддержку в ее решении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Buchstaber V. M., Gorbunov V. G. Theory and applications of multivalued groups // Manchester University Preprint, 1991. [2] Buchstaber V. M., Rees E. G. Multivalued groups, their representations and Hopf algebras // Edinburgh University Preprint, 1995. [3] Мандельбаум Р. Четырехмерная топология. М.: Мир, 1981. [4] Милнор Дж., Хьюзмоллер Дж. Симметрические билинейные формы. М.: Наука, 1985. [5] Понтрягин Л. С. Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий. М.: Наука, 1976. [6] Серр Ж. К. Курс арифметики. М.: Мир, 1972.