Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Д. Арнольд, А. В. Хохлов, Моделирование взрывающегося решения типа торнадо для комплексной версии трехмерного уравнения Навье–Стокса, *УМН*, 2009, том 64, выпуск 6, 171–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9330>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 16:18:01

Моделирование взрывающегося решения типа торнадо для комплексной версии трехмерного уравнения Навье–Стокса

М. Д. Арнольд, А. В. Хохлов

1. Используемые теоретические результаты. Трехмерная система уравнений Навье–Стокса после формального преобразования Фурье по пространственной переменной для чисто мнимых начальных данных имеет вид

$$v(k, t) = e^{-t|k|^2} v(k, 0) + P_k \int_0^t e^{-(t-s)|k|^2} \int_{\mathbb{R}^3} \langle k, v(k-l, s) \rangle v(l, s) dl ds, \quad (1)$$

где $k \in \mathbb{R}^3$ – волновой вектор, отвечающий пространственной переменной, $t \in [0, T_{\text{cr}}]$ – время, $v(k, t)$ обозначает образ трехмерного векторного поля скоростей при преобразовании Фурье, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение, P_k – оператор проектирования на плоскость, ортогональную вектору k , $P_k = \text{Id} - \frac{\langle k, \cdot \rangle}{|k|^2} k$, параметр вязкости выбран равным единице. Из условия несжимаемости следует, что $v(k, t) \perp k$ при всех $t \in [0, T_{\text{cr}}]$. Для заданной векторнозначной функции $c_0(k)$ с носителем в шаре радиуса r вокруг точки $(0, 0, R)$, $R > 2$, введем однопараметрическое семейство начальных данных $v_A(k, 0) = A c_0(k)$. Если отношение r/R достаточно мало, то носители коэффициентов в разложении решения по степеням параметра A не пересекают плоскость $k_3 = 0$ и расположены в конусе с осью k_3 , а именно, каждый коэффициент h_p имеет носитель в шаре с центром в $(0, 0, Rp)$ и радиусом $O(1)\sqrt{p}$.

Воспроизведем рассуждение из статьи [1]. Третья компонента вектора h_p выражается через первые две из условия несжимаемости. В новых переменных x, y рассмотрим только ту часть суммы в рекуррентном соотношении на h_p , где $p_1, p_2 = O(\sqrt{p})$. Обозначая $g_p(y, s) = h_p((0, 0, R) + \sqrt{R}y, s)$ и записывая $g_p(y, s)$ в виде

$$g_p(y, s) = \Lambda^p(s) p \sigma_1 \exp \left\{ -\frac{\sigma_1}{2} (|y_1|^2 + |y_2|^2) \right\} \sqrt{\sigma_2} \exp \{ \sigma_2 |y_3|^2 \} \\ \times (H_1(y) + \delta_1^{(p)}(y, s), H_2(y) + \delta_2^{(p)}(y, s), \delta_3^{(p)}(y, s)),$$

получаем при $p \rightarrow \infty$ малые члены $\delta_1^{(p)}(y, s), \delta_2^{(p)}(y, s), \delta_3^{(p)}(y, s)$.

При $p \rightarrow \infty$ мы можем записать интегральное уравнение с использованием переменной $\gamma = p_1/p$ для функций $\{H_1, H_2\}$ (детали см. в [1; уравнение (21)]):

$$\exp \left\{ -\frac{\sigma^{(1)}|x|^2}{2} \right\} \frac{\sigma^{(1)}}{2\pi} (H_1(x), H_2(x)) = \int_0^1 d\gamma \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(\sigma^{(1)})^2}{(2\pi)^2 \gamma (1-\gamma)} \\ \times \exp \left\{ -\frac{\sigma^{(1)}|x-y|^2}{2\gamma} - \frac{\sigma^{(1)}|y|^2}{2(1-\gamma)} \right\} H \left(\frac{y}{\sqrt{1-\gamma}} \right) \\ \times \left[-(1-\gamma)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{x_1-y_1}{\sqrt{\gamma}} H_1 \left(\frac{x-y}{\sqrt{\gamma}} \right) + \frac{x_2-y_2}{\sqrt{\gamma}} H_2 \left(\frac{x-y}{\sqrt{\gamma}} \right) \right) \right. \\ \left. + (\gamma(1-\gamma))^{\frac{1}{2}} \left(y_1 H_1 \left(\frac{x-y}{\sqrt{\gamma}} \right) + y_2 H_2 \left(\frac{x-y}{\sqrt{\gamma}} \right) \right) \right] dy. \quad (2)$$

Правая часть уравнения (2) задает отображение для функций $\{H_1, H_2\}$. В статье [1] показано, что у такого отображения существует 10-параметрическое инвариантное семейство. Тем самым, для любого момента времени $T_{\text{cr}} > 0$ существуют такие константа $A(T_{\text{cr}})$ и 10-параметрическое семейство начальных данных $c_0(k)$, что соответствующие коэффициенты g_p при $p \rightarrow \infty$ после ренормализации стремятся к предельной форме $\tilde{g}(y, s)$. Решение уравнения (1), отвечающее $\tilde{g}(y, s)$, обладает

бесконечными энергией и энтропией. В той же работе, получена асимптотика энергии этого решения

$$\mathcal{E}(t) = \int_{\mathbb{R}^3} |v(k, t)|^2 dk \simeq \frac{1}{(T_{\text{cr}} - t)^5}.$$

Доказательство в [1] теоремы существования не указывает явную форму решения и величину T_{cr} . Поэтому численные решения уравнения (1) при разных начальных условиях $c_0(k)$ представляют известный интерес.

2. Схема вычислений. Мы вычисляем начальные данные $v(k, 0) = (v^1(k), v^2(k), v^3(k))$ в точках прямоугольного трехмерного грида с заданной точностью по формулам

$$v^j(k) = \prod_{i=1}^3 \sum_{m=1}^D \lambda_{ijm} \text{He}^{(m)}\left(\frac{3(k^i - k_0^i)}{\sqrt{R}}\right), \quad j = 1, 2, 3. \quad (3)$$

Здесь k^i , v^j обозначают компоненты векторов k и v , $\text{He}^{(m)}(3(k^i - k_0^i)/\sqrt{R})$ – функция Эрмита степени m аргумента $3(k^i - k_0^i)/\sqrt{R}$, $\{\lambda_{ijm}\}$ – множество коэффициентов.

При вычислении свертки использовалась находящаяся в свободном доступе для некоммерческого применения библиотека Math Kernel Library фирмы Intel. Для решения $v(k, t)$ в работе [2] была получена асимптотика $\exp\{-|k|\sqrt{t}\}$. Оценка относительной погрешности вычисления, при шаге разрешения по пространству 0.2, исходя из данной асимптотики, не превосходит 10%.

3. Решения типа торнадо. Основной результат вычислений состоит в явном предъявлении начальных условий, при которых энергия решения $\mathcal{E}(t)$ начинает очень быстро возрастать при приближении t к моменту времени T_{cr} , определяемому лишь в рамках доступной пока точности разрешения по времени. Грубая (из-за имевшихся у нас ограничений на достижимую точность) оценка асимптотики роста энергии показывает, что эта асимптотика далека от $1/(T_{\text{cr}} - t)^5$: наблюдаемый показатель степени лежит между 15 и 20. В настоящее время у нас нет примеров начальных условий, приводящих к решениям с показателем роста энергии ~ 5 .

Для иллюстрации приводим некоторые результаты вычислений энергии решения для начального условия с носителем в шаре с центром $(0, 0, 5)$ и радиусом $r = 2$, максимальная степень D полинома Эрмита для начальных данных равна 3. В таблице шаг по времени dt равен 0.0008, шаг дискретизации по пространству равен 0.20328, а размеры грида таковы: количество точек разбиения по любой из двух первых координат равно $nX = nY = 120$, количество точек разбиения по третьей координате равно $nZ = 1080$; приведены значения *квадратичной нормы* $\mathcal{M}$ (т.е. корня квадратного из энергии $\mathcal{E}$) системы в отдельные моменты времени, при этом от $t = 0.000$ до $t = 0.042$ энергия монотонно убывала (см. [3]):

...	...	$t = 0.0456$	$\mathcal{M}(t) = 0.3047$	$t = 0.0424$	$\mathcal{M}(t) = 1.1492$
$t = 0.0400$	$\mathcal{M}(t) = 0.3226$	$t = 0.0464$	$\mathcal{M}(t) = 0.2996$	$t = 0.0432$	$\mathcal{M}(t) = 4.6551$
$t = 0.0408$	$\mathcal{M}(t) = 0.3165$	$t = 0.0472$	$\mathcal{M}(t) = 0.3017$	$t = 0.0440$	$\mathcal{M}(t) = 20.669$
$t = 0.0416$	$\mathcal{M}(t) = 0.3105$	$t = 0.0480$	$\mathcal{M}(t) = 0.3982$	$t = 0.0448$	$\mathcal{M}(t) = 1027.7$

Список литературы

- [1] D. Li, Ya. Sinai, *J. Eur. Math. Soc.*, **10:2** (2008), 267–313. [2] Ya. Sinai, *J. Statist. Phys.*, **121:5–6** (2005), 779–804. [3] M. D. Arnold, A. V. Khokhlov, *Implementation for blow up of tornado-type solutions for complex version of 3D Navier-Stokes system*, [arXiv: abs/0806.4286](https://arxiv.org/abs/0806.4286).

М. Д. Арнольд (M. D. Arnold)

E-mail: maxim.arnold@gmail.com

Представлено Р. А. Минлосом

Принято редколлегией

18.10.2009

А. В. Хохлов (A. V. Khokhlov)

Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики РАН