Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Бибилов, Относительная угловая мера конуса, сопряженного фундаментальному конусу конечной линейной группы, порожденной отражениями, *УМН*, 2010, том 65, выпуск 1, 179–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9334>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 15:19:46

**Относительная угловая мера конуса,
сопряженного фундаментальному конусу
конечной линейной группы, порожденной отражениями**

П. В. Бибилов

Пусть V – евклидово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, $W \subset O(V)$ – конечная линейная группа, порожденная отражениями, C – ее фундаментальный конус и C° – его открытое ядро. Через C^* будем обозначать *сопряженный конус*, т. е. $C^* = \{v \in V : \forall u \in C, (v, u) \geq 0\}$. Будем считать, что пространство неподвижных векторов группы W нулевое. Обозначим через W_{reg} множество элементов из W , не имеющих ненулевых неподвижных векторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для любого конуса $K \subset V$ назовем его *относительной угловой мерой* и обозначим через $\sigma(K)$ отношение меры его пересечения с единичной сферой (с центром в нуле) к мере всей сферы.

Ясно, что $\sigma(C) = 1/|W|$. Цель настоящей заметки – дать более простое и ясное доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1 (К. Де Кончини, К. Прочези [1]). $\sigma(C^*) = |W_{\text{reg}}|/|W|$.

Доказательство в [1] было проведено путем перебора случаев. Общее доказательство было дано Дж. Р. Стембриджем (см. [2]), но оно было довольно сложным и косвенным. Прямое комбинаторное доказательство предложено Г. Денхамом (см. [3]). Ниже мы приведем простое геометрическое доказательство, основанное на следующем фундаментальном результате.

ТЕОРЕМА 2 (Ж.-Л. Вальдшпургер [4]). *Имеет место равенство*

$$C^* = \bigsqcup_{w \in W} (1 - w)C^\circ.$$

Простое доказательство этой теоремы см. в [5], [6].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Рассмотрим сопряженные конусы всех фундаментальных конусов, т. е. конусы вида $(wC)^*$, где $w \in W$. Их количество равно $|W|$, и они покрывают все пространство V . Пусть также $U = \bigcup_{w_{\text{reg}} \in W_{\text{reg}}} \bigcup_{w \in W} (1 - w_{\text{reg}})(wC^\circ)$. Из теоремы Вальдшпургера следует, что U – плотное открытое подмножество в V . Докажем, что каждый вектор $u \in U$ покрывается в точности $|W_{\text{reg}}|$ конусами вида $(wC)^*$. Для этого рассмотрим элемент $w_{\text{reg}} \in W_{\text{reg}}$ и сопоставим ему элемент $w \in W$ такой, что $u \in (1 - w_{\text{reg}})(wC^\circ) \subset (wC)^*$ (такой элемент единствен, так как вектор $(1 - w_{\text{reg}})^{-1}u$ лежит в открытом ядре некоторого фундаментального конуса). Это отображение задает биекцию между множествами W_{reg} и $W(u) = \{w \in W : u \in (wC)^*\}$: если $u \in (wC)^*$ для некоторого $w \in W$, то по теореме Вальдшпургера существует единственный элемент $w_{\text{reg}} \in W_{\text{reg}}$ такой, что $u \in (1 - w_{\text{reg}})(wC^\circ)$.

Таким образом, каждый вектор $u \in U$ покрывается в точности $|W(u)| = |W_{\text{reg}}|$ конусами вида $(wC)^*$. Отсюда следует, что $|W|\sigma(C^*) = |W_{\text{reg}}|$, что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из формулы Соломона (см. [7]) следует, что $|W| = (m_1 + 1) \cdots (m_\ell + 1)$ и $|W_{\text{reg}}| = m_1 \cdots m_\ell$, где $m_1, \dots, m_\ell$ – показатели группы W и $\ell = \dim V$. Поэтому относительная угловая мера сопряженного конуса может быть выражена через показатели группы W :

$$\sigma(C^*) = \frac{m_1 \cdots m_\ell}{(m_1 + 1) \cdots (m_\ell + 1)}.$$

Пусть $W_k = \{w \in W : \dim \ker(1 - w) = \ell - k\}$. Тогда $\sigma(C) = |W_0|/|W|$ и $\sigma(C^*) = |W_\ell|/|W|$. Можно предположить, что остальные отношения $|W_k|/|W|$ также связаны с относительными угловыми мерами некоторых конусов, причем эти конусы должны быть связаны и с C , и с C^* . Поэтому естественным представляется следующее определение.

Для каждой k -мерной грани F конуса C обозначим через C_F прямую сумму k -мерной грани F и $(\ell - k)$ -мерной грани $F^\perp$ конуса C^* , ортогональной F . В частности, $C_C = C$ и $C_0 = C^*$.

$$\text{ГИПОТЕЗА.} \quad \sum_{F: \dim F=k} \sigma(F)\sigma(F^\perp) = \sum_{F: \dim F=k} \sigma(C_F) = \frac{|W_{\ell-k}|}{|W|} \text{ для всех } k = 0, \dots, \ell.$$

Эта гипотеза обобщает теорему 1 об относительной угловой мере сопряженного конуса. Она проверена автором для всех групп ранга не больше 4, а также для A_5 .

Автор благодарит Э. Б. Винберга за постановку задачи и внимание к работе, а также В. С. Жгуна за ценные замечания.

Список литературы

- [1] C. De Concini, C. Procesi, *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.*, **17**:2 (2006), 155–165. [2] J. R. Stembridge, *Appendix to C. De Concini and C. Procesi paper*, [arXiv: math/0602279v2](https://arxiv.org/abs/math/0602279v2), 2006. [3] G. Denham, *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.*, **19**:1 (2008), 59–63. [4] J.-L. Waldspurger, *J. Lie Theory*, **17**:3 (2007), 597–603. [5] П. В. Бибилов, В. С. Жгун, *УМН*, **64**:5 (2009), 177–178. [6] П. В. Бибилов, В. С. Жгун, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:6 (2009), 29–38; англ. пер.: P. V. Bibikov, V. S. Zhgoon, *Izv. Math.*, **73**:6 (2009), 1101–1109. [7] L. Solomon, *Nagoya Math. J.*, **22** (1963), 57–64.

П. В. Бибилов (P. V. Bibikov)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: tsdtp4u@proc.ru

Представлено Э. Б. Винбергом

Принято редколлегией
15.12.2009