Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. С. Тюрин, Уточнение верхних оценок констант в теореме Ляпунова, *УМН*, 2010, том 65, выпуск 3, 201–202

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9337>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 14:25:21

Уточнение верхних оценок констант в теореме Ляпунова

И. С. Тюрин

Пусть независимые случайные величины (с. в.) $X_1, \dots, X_n$ невырождены, центрированы и обладают конечными третьими абсолютными моментами $\beta_1, \dots, \beta_n$. Обозначим их дисперсии $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ и положим $\sigma^2(n) := \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$. Величина $\varepsilon_n := (\beta_1 + \dots + \beta_n)/\sigma^3(n)$, называемая дробью Ляпунова, позволяет эффективно оценивать расстояние в метрике Колмогорова между нормированной суммой $S_n := (X_1 + \dots + X_n)/\sigma(n)$ и стандартной нормальной с. в. N . Существует такая наименьшая постоянная C , что для каждого $n \in \mathbb{N}$ и произвольных с. в. $X_1, \dots, X_n$ справедливо неравенство

$$\rho(S_n, N) := \sup_{x \in \mathbb{R}} |P(S_n \leq x) - P(N \leq x)| \leq C\varepsilon_n. \quad (1)$$

Точное значение константы C не известно до сих пор, но существуют ее верхние и нижние оценки. Более полувека назад Эсseen [1] показал, что $C \geq 0.409\dots$. Верхние оценки последовательно улучшались на протяжении последних 67 лет, наиболее точная на данный момент была получена автором [2] в 2009 г. Удалось установить, что $C \leq 0.6379$, а в частном случае независимых одинаково распределенных (н. о. р.) слагаемых $C \leq 0.5894$. В настоящей работе в развитие результатов [2] доказана

ТЕОРЕМА. *Неравенство (1) имеет место с константой $C \leq 0.5606$, а в случае одинаково распределенных слагаемых $C \leq 0.4785$.*

Нам потребуются несколько вспомогательных утверждений. При $\gamma, t \in \mathbb{R}$ положим

$$b(t, \gamma) := \begin{cases} -t^2 + 2\gamma a|t|^3, & \text{если } |\gamma|t < M; \\ -2\gamma^{-2}(1 - \cos \gamma t), & \text{если } M \leq |\gamma|t \leq 2\pi; \\ 0, & \text{если } |\gamma|t > 2\pi. \end{cases}$$

Здесь $a := \max_{x>0} \{(\cos x - 1 + x^2/2)/x^3\}$, M — соответствующая точка максимума.

Пусть $f_n(t) := Ee^{itS_n}$, $\varphi(t) := e^{-t^2/2}$, $\delta_n(t) := |f_n(t) - \varphi(t)|$, $t \in \mathbb{R}$.

ЛЕММА 1 [2]. *Для любого $t \in \mathbb{R}$ имеем $\delta_n(t) \leq \min\{h_1(\varepsilon_n, |t|), h_2(\varepsilon_n, |t|)\}$, где*

$$h_1(\varepsilon, t) := \varepsilon\varphi(t) \int_0^t \frac{s^2}{2} \exp\left(\frac{s^2}{2}\right) ds, \\ h_2(\varepsilon, t) := \varepsilon\varphi(t) \left(\int_0^{\min\{t, A\}} \frac{s^2}{2} \exp\left(\frac{s^2\varepsilon^{2/3}}{2}\right) ds + \int_A^{\max\{t, A\}} \frac{s^2}{2l} \exp(2a\varepsilon s^3) ds \right).$$

Здесь $A := \varepsilon^{-1/3}/(6a)$, $l := \inf_{t \geq 0} \{\exp(-t^2/2 + 2at^3)\} \approx 0.624489$.

ЛЕММА 2 [2]. *Если X_j , $j \geq 1$, — н. о. р. с. в., то при всех $t \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ выполнено $\delta_n(t) \leq h_3(\varepsilon_n, n, |t|)$, а при $n \geq m$ и $t \in \mathbb{R}$ имеем $\delta_n(t) \leq h_4(\varepsilon_n, m, |t|)$, где*

$$h_3(\varepsilon, n, t) := \varepsilon\varphi(t) \int_0^t \left(1 + \frac{b(s, \varepsilon + n^{-1/2})}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{s^2}{2} \exp\left(\frac{s^2}{2}\right) ds, \\ h_4(\varepsilon, m, t) := \varepsilon\varphi(t) \int_0^t \exp\left(\frac{m-1}{2m} b(s, \varepsilon + m^{-1/2}) + \frac{s^2}{2}\right) \frac{s^2}{2} ds.$$

Кроме того, из результатов работы [3] следует, что верна

ЛЕММА 3. *Для всех $t \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ верно $|f_n(t)|^2 \leq h_5^2(\varepsilon_n, t) := \exp(b(t, 2\varepsilon_n))$. А в случае н. о. р. величин справедливы также следующие оценки:*

$$|f_n(t)|^2 \leq h_6^2(\varepsilon_n, n, t) := (1 + n^{-1}b(t, \varepsilon_n + n^{-1/2}))^n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ |f_n(t)|^2 \leq h_7^2(\varepsilon_n, m, t) := \exp(b(t, \varepsilon_n + m^{-1/2})), \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \geq m.$$

Обозначим $D(\varepsilon, n)$ наименьшую величину такую, что для любого набора n с.в. $X_1, \dots, X_n$ с $\varepsilon_n = \varepsilon$ выполнено $\rho(S_n, N) \leq D(\varepsilon, n)\varepsilon_n$. Положим $D(\varepsilon) := \sup_{n \geq 1} D(\varepsilon, n)$. Тогда $C = \sup_{\varepsilon > 0} D(\varepsilon)$ и достаточно показать, что $D(\varepsilon, n)$ при всех возможных значениях ε и n не превосходит 0.5606 (а в случае н.о.р. с.в. 0.4785). Для $\varepsilon \geq 1/0.5606$ (соответственно $\varepsilon \geq 1/0.4785$) последнее очевидно, поскольку $\rho(S_n, N) \leq 1$. Кроме того, обозначим $\hat{\sigma}^2(n) := \sigma^2(n) - \max\{\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2\}$ и положим $\hat{\varepsilon}_n := (\beta_1 + \dots + \beta_n)/\hat{\sigma}^3(n)$, $\varepsilon_n^{(k)} := (\sigma_1^k + \dots + \sigma_n^k)/\hat{\sigma}^k(n)$, $k = 3, 4$. Тогда, согласно [4; (I.52)], при $\hat{\varepsilon}_n + \varepsilon_n^{(3)} \leq 0.2$ имеем

$$\rho(S_n, N) \leq 0.27283\hat{\varepsilon}_n + 0.19948\varepsilon_n^{(3)} + 0.09116\varepsilon_n^{(4)} + 0.00095(\hat{\varepsilon}_n + \varepsilon_n^{(3)})^2. \quad (2)$$

В частности, из этого неравенства вытекает, что $D(\varepsilon) \leq 0.5606$ при $\varepsilon \leq 0.02$ (а в случае н.о.р. с.в. $D(\varepsilon) \leq 0.4785$ при $\varepsilon \leq 0.037$). Следовательно, можно ограничиться рассмотрением $\varepsilon \in I_1 = [0.02; 1/0.5606]$, а в случае н.о.р. величин $\varepsilon \in I_2 = [0.037; 1/0.4785]$. Доказательство теоремы для этих значений ε основано на неравенстве Правитца [4]

$$\begin{aligned} \frac{\rho(S_n, N)}{\varepsilon_n} &\leq \frac{1}{\varepsilon_n} \left(\int_{-U_0}^{U_0} \frac{1}{U} \left| K\left(\frac{u}{U}\right) \right| \cdot |\delta_n(u)| du + \int_{U_0 < |u| \leq U} \frac{1}{U} \left| K\left(\frac{u}{U}\right) \right| \cdot |f_n(u)| du \right. \\ &\quad \left. + \int_{-U_0}^{U_0} \left| \frac{1}{U} K\left(\frac{u}{U}\right) - \frac{i}{2\pi u} \right| \cdot |\varphi(u)| du + \int_{|u| > U_0} \left| \frac{\varphi(u)}{2\pi u} \right| du \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где $K(u) := (1 - |u|)/2 + i((1 - |u|) \cot(\pi u) + \pi^{-1} \operatorname{sgn}(u))/2$, $0 < U_0 \leq U$.

Из (3) вытекает, что $D(\varepsilon)$ не превосходит величины $D^*(\varepsilon, U_0, U)$, которая получается из правой части (3), если величины $|f_n(t)|$, $|\delta_n(t)|$ заменить их оценками $h_5(\varepsilon, t)$, $\min\{h_1(\varepsilon, t), h_2(\varepsilon, t)\}$, и подобрать параметры U_0, U так, чтобы полученное выражение оказалось как можно меньше. Описанная процедура была проведена для 460 значений ε , рассредоточенных по отрезку I_1 . Чтобы получить оценки для промежуточных точек, было использовано то, что $\varepsilon D^*(\varepsilon, U_0, U)$ не убывает по ε .

Экстремальное значение величины $D^*(\varepsilon, U_0, U) = 0.56054$ возникло при $\varepsilon = 0.5092$, $U_0 = 2.4852$, $U = 5.9508$.

В случае н.о.р. с.в. при фиксированном ε выбиралось m – некоторое натуральное число и для значений $n < m$ давались индивидуальные оценки $D(\varepsilon, n)$. В правую часть (3) вместо $|\delta_n(t)|$ и $|f_n(t)|$ подставлялись их оценки $h_3(\varepsilon, n, t)$ и $h_6(\varepsilon, n, t)$, после чего применялась описанная выше процедура подбора параметров. Для $n \geq m$ величины $D(\varepsilon, n)$ оценивались равномерно. При этом в правой части (3) использовались оценки $h_4(\varepsilon, m, t)$ и $h_7(\varepsilon, m, t)$. Для н.о.р. с.в. экстремальное значение 0.47849 было достигнуто при $\varepsilon = 0.3536$, $n = 8$, $U_0 = 2.6157$, $U = 8.9115$. Итак, теорема верна во всех рассмотренных случаях.

Автор выражает глубокую признательность профессору А.В. Булинскому за полезные обсуждения и замечания.

Список литературы

- [1] C. G. Esseen, *Skand. Aktuarietidskr.*, **39** (1956), 160–170. [2] И. С. Тюрин, *Докл. РАН*, **429:3** (2009), 312–316. [3] H. Prawitz, *Scand. Actuar. J.*, 1975, 21–28. [4] H. Prawitz, *Scand. Actuar. J.*, 1975, 145–156.

И. С. Тюрин (I. S. Tyurin)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: itiurin@gmail.com

Представлено А. В. Булинским

Принято редколлегией
15.12.2009