Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Буфетов, Решение гипотезы Вершика–Керова об энтропии меры Планшереля, *УМН*, 2010, том 65, выпуск 1, 181–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9339>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 11:30:47

Решение гипотезы Вершика–Керова об энтропии меры Планшереля

А. И. Буфетов

Пусть $\mathbb{Y}_n$ – множество диаграмм Юнга с n клетками. Хорошо известно, что такие диаграммы параметризуют неприводимые представления симметрической группы перестановок n элементов; для $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ пусть $\dim \lambda$ есть размерность соответствующего неприводимого представления. Мера Планшереля $\text{Pl}^{(n)}$ на $\mathbb{Y}_n$ задается формулой $\text{Pl}^{(n)}(\lambda) = \frac{\dim^2 \lambda}{n!}$. Рассмотрим последовательность функций $f_n: \mathbb{Y}_n \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что последовательность f_n сходится к константе по мере Планшереля, если найдется константа γ такая, что для всякого $\varepsilon > 0$ выполнено $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Pl}^{(n)}\{\lambda \in \mathbb{Y}_n : |f_n(\lambda) - \gamma| < \varepsilon\} = 1$. В 1985 г. А. М. Вершик и С. В. Керов [1] показали существование двух констант $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ таких, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Pl}^{(n)}\{\lambda \in \mathbb{Y}_n : \alpha_1 \sqrt{n} \leq -\log \text{Pl}^{(n)}(\lambda) \leq \alpha_2 \sqrt{n}\} = 1,$$

и предположили, что величина $\frac{-\log \text{Pl}^{(n)}(\lambda)}{\sqrt{n}}$ сходится к константе по мере Планшереля.

Эта заметка анонсирует решение гипотезы Вершика и Керова в несколько более сильной форме: сходимость имеет место в смысле L_p для всякого положительного $p < \infty$. Обозначим символом $\mathbb{E}_{\text{Pl}^{(n)}}$ математическое ожидание по мере Планшереля.

ТЕОРЕМА 1. Найдется такое $\alpha > 0$, что для всякого p , $0 < p < \infty$, выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\text{Pl}^{(n)}} \left| \alpha + \frac{\log \text{Pl}^{(n)}(\lambda)}{\sqrt{n}} \right|^p = 0.$$

Вершик и Керов предложили называть α энтропией меры Планшереля. Численные эксперименты, позволяющие оценить α , описаны в [2].

Пусть $\Omega_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ – пространство двусторонне бесконечных последовательностей символов 0, 1: $\Omega_2 = \{\omega = \dots \omega(-n) \dots \omega(n) \dots, \omega(n) \in \{0, 1\}\}$.

Возьмем диаграмму Юнга $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$; полагаем $\lambda_i = 0$ при достаточно больших i . Определим последовательность $\omega_\lambda \in \Omega_2$ следующим образом: $\omega_\lambda(k) = 1$, если $k = \lambda_i - i$ для некоторого i , и $\omega_\lambda(k) = 0$ в противном случае.

Для целочисленного вектора $\vec{m} = (m_1, \dots, m_r)$ определим функцию $c_{\vec{m}}: \mathbb{Y}_n \rightarrow \mathbb{R}$ формулой $c_{\vec{m}}(\lambda) = \omega_\lambda(m_1) \cdots \omega_\lambda(m_r)$. Для $x \in \mathbb{Z}$ обозначим $x + \vec{m} = (x + m_1, \dots, x + m_r)$. Возьмем $a \in [-2, 2]$ и рассмотрим синус-ядро $\mathcal{S}(k, a)$, определенное формулой

$$\mathcal{S}(k, a) = \begin{cases} \frac{\sin(k \arccos(a/2))}{k\pi}, & \text{если } k \neq 0, \\ \frac{\arccos(a/2)}{\pi}, & \text{если } k = 0. \end{cases}$$

Для целочисленного вектора $\vec{m} = (m_1, \dots, m_r)$ положим

$$\mathcal{S}(\vec{m}, a) = \det \mathcal{S}(m_i - m_j, a) \Big|_{i,j=1,\dots,d}.$$

Итак, пусть функция $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывна, а вектор $\vec{m} = (m_1, \dots, m_r)$ целочисленный. Обозначим

$$S_n(\vec{m}, f, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right) c_{k+\vec{m}}(\lambda). \quad (1)$$

Работа выполнена при поддержке программы Президиума РАН “Математическая теория управления”, гранта NSF DMS 0604386 и фонда Эдгара Оделла Ловетта в Университете Райса.

ЛЕММА 1. Для всякой непрерывной функции $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{C}$ и всякого целочисленного вектора $\vec{m}$ последовательность $S_n(\vec{m}, f, \lambda)$ сходится при $n \rightarrow \infty$ к константе $\int_{-2}^2 f(a) \mathcal{S}(\vec{m}, a) da$ по мере Планшереля.

Напомним, что крюком клетки диаграммы Юнга называют число клеток, лежащих ниже и правее ее (включая саму исходную клетку). Обозначим $h_k(\lambda)$ число клеток в λ с крюком k .

СЛЕДСТВИЕ 1. Для всякого $k \in \mathbb{N}$ случайные величины $h_k(\lambda)/\sqrt{n}$ сходятся к константе по мере Планшереля.

Положим

$$\hat{c}_k(\lambda) = \begin{cases} c_k(\lambda) - \pi^{-1} \arccos(k/(2\sqrt{n})), & \text{если } |k| \leq 2\sqrt{n}, \\ c_k(\lambda) - 1, & \text{если } k < -2\sqrt{n}, \\ c_k(\lambda), & \text{если } k > 2\sqrt{n}. \end{cases}$$

ЛЕММА 2. Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $l_0 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\text{Pl}(n)} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=l_0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\hat{c}_k(\lambda) + \dots + \hat{c}_{k+l}(\lambda)}{l} \right)^2 \leq \varepsilon. \quad (2)$$

Доказательство лемм 1, 2 проводится пуассонизацией, следуя подходу работ [3], [4] (см. также [5]). Теорема 1 немедленно вытекает из лемм 1, 2 и вариационных формул Вершика–Керова ([5; лемма 1 и формулы (5), (7), (9)], см. также [6], [7]).

Я глубоко благодарен Григорию Иосифовичу Олшанскому, поставившему задачу и предложившему решать ее пуассонизацией, а также Алексею Михайловичу Бородину за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] А. М. Вершик, С. В. Керов, *Функц. анализ и его прил.*, **19:1** (1985), 25–36; англ. пер.: A. M. Vershik, S. V. Kerov, *Funct. Anal. Appl.*, **19:1** (1985), 21–32. [2] А. М. Вершик, Д. Павлов, *Численные эксперименты в задачах асимптотической теории представлений*, Препринт 05/2009. Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, 2009. [3] A. Borodin, A. Okounkov, G. Olshanski, *J. Amer. Math. Soc.*, **13:3** (2000), 481–515. [4] K. Johansson, *Ann. of Math.* (2), **153:1** (2001), 259–296. [5] J. Baik, P. Deift, K. Johansson, *J. Amer. Math. Soc.*, **12:4** (1999), 1119–1178. [6] Л. В. Богачев, Ч. Г. Шу, *Докл. РАН*, **414:3** (2007), 295–298; англ. пер.: L. V. Bogachev, Ch. G. Su, *Dokl. Math.*, **75:3** (2007), 381–384. [7] B. F. Logan, L. A. Shepp, *Adv. Math.*, **26:2** (1977), 206–222.

А. И. Буфетов (A. I. Bufetov)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;

Rice University, Houston, USA

E-mail: bufetov@mi.ras.ru, aib1@rice.edu

Представлено Ю. С. Ильяшенко

Принято редколлегией

21.12.2009