Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Доброхотов, Б. Тироцци, Локализованные решения одномерной нелинейной системы уравнений мелкой воды со скоростью $c = \sqrt{x}$, *УМН*, 2010, том 65, выпуск 1, 185–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9342>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 18:30:46

Локализованные решения одномерной нелинейной системы уравнений мелкой воды со скоростью $c = \sqrt{x}$

С. Ю. Доброхотов, Б. Тиروعци

В безразмерных переменных нелинейная одномерная система уравнений мелкой воды над неровным дном $D(x) = c^2(x)$ для превышения $\eta(x, t)$ и скорости $v(x, t)$ имеет вид $\eta_t + \partial[v(\eta + D)]/\partial x = 0$, $v_t + vv_x + \eta_x = 0$. Введем параметр $0 < \mu \ll 1$ и назовем функцию $f(y)$ локализованной в μ -окрестности точки $a > 0$, если $f(a) = 1 + O(\mu)$ и $f(y) = o(\mu)$ при $|y - a| > \mu^{1-\delta}$, $\delta > 0$. В ситуации, когда $c^2(x) = x$, для этой системы рассмотрим задачу Коши $\eta|_{t=0} = \eta^0(x, \mu)$, $v|_{t=0} = v^0(x, \mu)$ с начальными данными η^0 , v^0 , локализованными в окрестности точки $x = a$. Ее решение используется при описании набега длинных волн на берег [1], [2]. Прямым дифференцированием можно установить следующее замечательное свойство рассматриваемой системы, обнаруженное в работе [1] (хотя и представленное в другом виде, см. также [2]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $(N(y, \tau), U(y, \tau))$ – решение линеаризованных уравнений мелкой воды $N_\tau + \partial(yU)/\partial y = 0$, $U_\tau + N_y = 0$, определяющее гладкое решение $(\tau(t, x), y(t, x))$ системы $x = y - N(y, \tau) + (1/2)U^2(y, \tau)$, $t = \tau + U(y, \tau)$. Тогда $(\eta, v) = (N - (1/2)U^2, U)|_{\tau=\tau(t, x), y=y(t, x)}$ – решение исходной нелинейной системы.

При изучении решений линейной системы уравнений на полуоси $y \geq 0$ с сингулярным коэффициентом $c^2 = y$ требуем их ограниченности в точке $y = 0$. (Это гарантирует принадлежность решений области определения оператора $\frac{\partial}{\partial y} y \frac{\partial}{\partial y}$.) В работах, касающихся рассматриваемых систем, по большей части изучаются их осциллирующие решения, локализованным решениям посвящены работы Р. Мазовой, Е. Пелиновского и их соавторов, см. статью [2] и библиографию в ней. Цель настоящего сообщения – построение простых точных решений линейной (а значит, и нелинейной) системы уравнений мелкой воды, а также интерпретация некоторых результатов [2].

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Для любых комплексных чисел A, b , $\operatorname{Re} b \neq 0$, и полинома $\mathcal{P}(k)$ непрерывные при $y \geq -(\operatorname{Re} b)^2/4$ функции $(N^0, U^0) = \left(\operatorname{Re} \frac{A(\tau + ib)}{(y - (\tau + ib)^2/4)^{3/2}}, 2 \operatorname{Re} \frac{A}{(y - (\tau + ib)^2/4)^{3/2}} \right)$ и $(N, U) = \left(\mathcal{P}\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right) N^0, \mathcal{P}\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right) U^0 \right)$ являются точными решениями линейных уравнений мелкой воды при $y \geq 0$. Если матрица Якоби перехода от (τ, y) к (t, x) невырождена, то эти функции, в силу утверждения 1, определяют точные параметрически заданные решения исходной нелинейной системы.

Доказательство утверждения 2 получается прямым дифференцированием, мы, однако, приведем и другие соображения, поясняющие как вывод, так и свойства приведенных решений. Выберем $b = \mu\beta/\sqrt{a} + 2i\sqrt{a}$, $A = \mu^{3/2}(1 + i)/(2\sqrt{a})$, тогда при $\tau = 0$ построенные функции будут локализованы в $O(\mu)$ -окрестности точки $y = a$. Рассмотрим более общую задачу Коши $N|_{\tau=0} = V((y - a)/\mu)$, $U|_{\tau=0} = 0$ для линейной системы. Здесь $V(z)$ – финитная функция z . Ввиду наличия параметра μ , можно построить асимптотику решения при $\mu \rightarrow +0$ для этой системы (см. [2], [3]). Как и в известной формуле Даламбера, асимптотика решения распадается на две волны, одна из которых бежит направо, а вторая, N_L , – налево. Амплитуда у N_L резко возрастает при приближении к точке $y = 0$, которую поэтому разумно считать фокальной точкой и аналогично [4] определить траекторию “пика” волны сразу на некомпактном “лагранжевом многообразии” $\Lambda = \{(p, x) \in \mathbb{R}_{p,y}^2 : c(y)p^2 = c^2(a)\}$, состоящем из двух кривых, заданных на фазовой плоскости $\mathbb{R}_{p,y}^2$. На Λ движению

“пика” волны соответствует траектория $Y(t) \equiv (\sqrt{a} + \gamma t/2)^2$, $P(t) \equiv -\sqrt{a}/(\sqrt{a} - \gamma t/2)$ одномерной гамильтоновой системы с гамильтонианом $H = c(y)|p|$, $y(0) = a$, $p(0) = 1$. Глобальная асимптотика решения задачи Коши определяется [5] формулой $N_L(y, \tau) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\int_0^\infty K_\Lambda^{\mu/\rho} e^{itc(a)\rho/\mu} \sqrt{\rho} \tilde{V}(\rho) d\rho \right)$, где K_Λ^h – канонический оператор Маслова на Λ

с параметром $h = \mu/\rho$, начальной точкой $x = a$, $p = -1$, а $\tilde{V}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-i\rho z} V(z) dz$.

Положим $t_{cr} = 2\sqrt{a}/\gamma$, тогда реализация канонического оператора с дополнительным интегрированием по ρ (обеспечивающим переход от осциллирующих функций к убывающим [5]) приводит к следующим формулам. При $\tau < \tau_{cr} - \varepsilon$ (до достижения

волны ε -окрестности точки $y = 0$) $N_L = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c(a)}{c(Y(\tau))}} V\left(\frac{c(a)}{\mu} \frac{y - Y(\tau)}{c(Y(\tau))}\right) + O(\mu)$, при $|\tau - \tau_{cr}| < \varepsilon$ (волна отражается от $y = 0$)

$$N_L = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{a}}{\sqrt{\pi\mu}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e\left(\frac{1}{p}\right) \frac{\sqrt{\rho} \tilde{V}^0(\rho)}{p} \exp \left\{ \frac{ia\rho}{\mu} \left[\frac{1}{p} - 2 + \frac{\tau}{\sqrt{a}} \right] \right\} e^{\frac{ip\rho y}{\mu}} \right\} d\rho dp \right) + O(\sqrt{\mu}) \quad (1)$$

($e(q)$ – “срезающая” функция, равная 1 в некоторой окрестности точки $q = 0$), и при $\tau > \tau_{cr} + \varepsilon$ (после отражения волны от $y = 0$)

$$N_L = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c(a)}{c(Y(\tau))}} W\left(\frac{c(a)}{\mu} \frac{y - Y(\tau)}{c(Y(\tau))}\right) + O(\mu), \text{ где } W(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \left(i \int_0^\infty e^{i\rho z} \tilde{V}(\rho) d\rho \right)$$

есть преобразование Гильберта от функции $V(\theta)$, вызванное скачком индекса Маслова после перехода точки $(Y(t), P(t))$ с нижнего листа Λ на его верхний лист.

Формула (1) определяет асимптотику решения для всех τ , однако вне окрестности точки $y = 0$, разумеется, более удобно пользоваться приведенными явными формулами, которые можно получить из (1) методом стационарной фазы по переменной p . Функцию $e(1/p)$, обеспечивающую сходимость интегралов, иногда можно убрать, тогда (1) – точное решение. В частности, выбирая $\tilde{V}(\rho) = A\sqrt{\rho} e^{-\beta\rho}$, получаем “базовое” решение из утверждения 2, остальные получаются применением “оператора рождения” $\partial/\partial\tau$. Функции из утверждения 2 дают, по-видимому, уникальный пример, когда взаимодействие локализованной волны с фокальной точкой явно описывается в элементарных функциях; при $\mu \rightarrow 0$ при соответствующей нормировке падающая волна переходит в δ -функцию Дирака, отраженная – в функцию Сохоцкого (имеет место “метаморфоза разрыва”). Отметим также, что соответствующая функция V описывает профиль решения задачи Коши для двумерной линеаризованной системы уравнений мелкой воды с начальными данными $A(1 + ((y - \alpha)/(\mu b_1))^2 + (y_2/(\mu b_2))^2)^{-3/2}$, локализованными в окрестности точки $(y = \alpha, y_2 = 0)$, $a \gg \mu$ (см. [6]).

Список литературы

- [1] G. F. Carrier, H. P. Greenspan, *J. Fluid Mech.*, **4** (1958), 97–109. [2] E. N. Pelinovsky, R. Kh. Mazova, *Natural Hazards*, **6:3** (1992), 227–249. [3] S. Yu. Dobrokhotov, S. O. Sinitsyn, B. Tirozzi, *Russ. J. Math. Phys.*, **14:1** (2007), 28–56. [4] T. Vukašinac, P. Zhevandrov, *Russ. J. Math. Phys.*, **9:3** (2002), 371–381. [5] S. Yu. Dobrokhotov, B. Tirozzi, C. A. Vargas, *Russ. J. Math. Phys.*, **16:2** (2009), 228–245. [6] S. Ya. Sekerzh-Zenkovich, B. I. Volkov, *Russ. J. Math. Phys.*, **16:1** (2009), 121–129.

С. Ю. Доброхотов (S. Yu. Dobrokhotov)
Институт проблем механики РАН
E-mail: dobr@ipmnet.ru

Представлено И. М. Кричевером
Принято редколлегией
18.12.2009

Б. Тироцци (B. Tirozzi)
University of Rome “La Sapienza”
E-mail: b.tirozzi@libero.it