Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Б. Винберг, Об автоморфных формах на симметрических областях типа IV, *УМН*, 2010, том 65, выпуск 3, 193–194

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9343>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 16:51:12

Об автоморфных формах на симметрических областях типа IV

Э. Б. Винберг

Симметрической областью типа IV называется эрмитово симметрическое пространство $\mathcal{D}_n = O_{2,n}^+ / (SO_2 \times O_n)$, где $O_{2,n}^+$ – подгруппа индекса 2 псевдоортогональной группы $O_{2,n}$, выделяемая условием положительности левого верхнего минора порядка 2. Она моделируется областью на квадрике в проективизации $(n+2)$ -мерного комплексного векторного пространства, в котором естественным образом действует группа $O_{2,n}$. Тем самым определено $O_{2,n}^+$ -эквивариантное линейное расслоение $\pi: \mathcal{L}_n \rightarrow \mathcal{D}_n$ (n -я степень которого есть каноническое расслоение).

Пусть Γ – дискретная подгруппа конечного кообъема в группе $O_{2,n}^+$. Для любого неотрицательного целого k рассмотрим Γ -инвариантные голоморфные функции на $\mathcal{L}_n$, однородные степени $-k$ на каждом слое. При $n \geq 3$ они образуют конечномерное векторное пространство $A(\mathcal{D}_n, \Gamma)_k$ [1]. Алгебра $A(\mathcal{D}_n, \Gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} A(\mathcal{D}_n, \Gamma)_k$ на-

зывается естественной алгеброй автоморфных форм на $\mathcal{D}_n$ относительно группы Γ , а элементы пространства $A(\mathcal{D}_n, \Gamma)_k$ называются автоморфными формами веса k .

Известно [1], что $A(\mathcal{D}_n, \Gamma)$ – нормальная конечно порожденная градуированная алгебра. Аффиное многообразие $\text{Spec } A(\mathcal{D}_n, \Gamma)$ содержит аналитический фактор $\mathcal{L}_n/\Gamma$ как открытое по Зарискому подмножество, граница которого не более чем двумерна.

Пусть теперь $\Gamma_n = O_{2,n}^+(\mathbb{Z})$. В 1962 г. Игуза [2] доказал, что для некоторой подгруппы $\Gamma \subset O_{2,3}^+$, соизмеримой с Γ_3 , алгебра $A(\mathcal{D}_3, \Gamma)$ свободно порождается формами весов 4, 6, 10, 12. Главным результатом настоящей работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *При $n \in \{4, 5, 6, 7\}$ алгебра $A(\mathcal{D}_n, \Gamma_n)$ свободно порождается формами весов, указанных в следующей таблице:*

n	Веса
4	4, 6, 8, 10, 12
5	4, 6, 8, 10, 12, 18
6	4, 6, 8, 10, 12, 16, 18
7	4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18

СЛЕДСТВИЕ 1. *При $n \in \{4, 5, 6, 7\}$ фактор $\mathcal{L}_n/\Gamma_n$ является односвязным комплексным многообразием.*

Это означает, что группа Γ_n как группа преобразований многообразия $\mathcal{L}_n$, а также стабилизатор любой точки этого многообразия порождается (комплексными) отражениями. Соответствующая группа голоморфных преобразований области $\mathcal{D}_n$ также порождается отражениями.

Для любого $n \geq 3$ естественные вложения $\mathcal{L}_n \hookrightarrow \mathcal{L}_{n+1}$ и $\Gamma_n \hookrightarrow \Gamma_{n+1}$ индуцируют замкнутое вложение $\mathcal{D}_n/\Gamma_n \hookrightarrow \mathcal{D}_{n+1}/\Gamma_{n+1}$ и, тем самым, эпиморфизм градуированных алгебр $A(\mathcal{D}_{n+1}, \Gamma_{n+1}) \rightarrow A(\mathcal{D}_n, \Gamma_n)$. При $n = 4, 5, 6$ ядром этого эпиморфизма является главный идеал алгебры $A(\mathcal{D}_{n+1}, \Gamma_{n+1})$, порожденный образующей веса 18, 16, 14 соответственно.

Доказательство теоремы основано на интерпретации фактора $\mathcal{D}_n/\Gamma_n$ как пространства модулей кратно поляризованных поверхностей типа K3.

А именно, пусть $\mathbb{R}^{3,19}$ – псевдоевклидово векторное пространство с ортогональным базисом $\{e_0, e_1, \dots, e_{21}\}$, в котором $(e_0, e_0) = (e_{20}, e_{20}) = (e_{21}, e_{21}) = 1$, а квадраты прочих базисных векторов равны -1 . Пусть J – решетка в $\mathbb{R}^{3,19}$, порожденная всеми целочисленными векторами с четной суммой координат и вектором

$\rho = (e_0 + e_1 + \dots + e_{21})/2$. Это четная унимодулярная квадратичная решетка. Известно, что группа гомологий $H_2(X, \mathbb{Z})$ гладкой поверхности X типа $K3$, снабженная формой пересечения $(\cdot, \cdot)$, изоморфна J . Группа $S(X)$ алгебраических циклов поверхности X является примитивной подрешеткой сигнатуры $(1, m)$ в J .

Пусть S_n ($3 \leq n \leq 7$) – пересечение решетки J с линейной оболочкой векторов $e_0, e_1, \dots, e_{19-n}$. Рассмотрим поверхности типа $K3$, группа алгебраических циклов которых содержит S_n , и снабдим их поляризацией $h = 4e_0 + e_1 + \dots + e_{12}$ с квадратом 4. Пространство модулей таких поверхностей обозначим через M_n . При $n \neq 6$ отображение периодов устанавливает изоморфизм аналитических пространств $M_n \simeq \mathcal{L}_n/\Gamma_n$. Что касается пространства M_6 , то оно изоморфно фактору области $\mathcal{D}_6$ по некоторой надгруппе индекса 3 группы Γ_6 ; для перехода к фактору по Γ_6 нужно рассматривать поверхности с дополнительной структурой, о которой будет сказано ниже.

С другой стороны, можно показать, что для любой поверхности $X \in M_n$ решетка $S(X)$ не содержит изотропных векторов u с $(h, u) = 1$ или 2. В силу известного критерия [1] это означает, что линейная система $|h|$ задает бирациональный изоморфизм поверхности X на кватрику $Y \subset \mathbb{CP}^3$, имеющую не более чем простые особенности. При $n \in \{4, 5, 6, 7\}$ получаемые таким образом кватрики характеризуются тем, что они имеют особую точку o , через которую проходят две плоскости Π_1 и Π_2 , пересекающиеся по некоторой прямой $l \subset Y$; при этом Π_1 пересекает Y по четверной прямой l , а Π_2 – по прямой l и, кроме того,

- (а) при $n = 7$ – по кривой второго порядка, касающейся l в точке o , и прямой, проходящей через точку o ;
- (б) при $n = 6$ – по трем прямым, проходящим через точку o ; для получения фактора по группе Γ_6 следует считать одну из этих прямых выделенной;
- (с) при $n = 5$ и $n = 4$ – по прямой и двойной прямой m , проходящим через точку o ; случай $n = 4$ выделяется условием, что прямая m содержит вырожденную особую точку, отличную от o .

Это позволяет описать пространство M_n как фактор по группе $\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$ некоторого инвариантного алгебраического подмногообразия P_n в пространстве кватрик и тем самым установить изоморфизм между алгеброй $A(\mathcal{D}_n, \Gamma_n)$ и алгеброй $\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$ -инвариантных многочленов на конусе над P_n . Путем построения сечения удастся доказать, что последняя алгебра изоморфна алгебре инвариантов максимального тора группы $\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$ в некотором $(n+4)$ -мерном подпространстве пространства $S^4((\mathbb{C}^4)^*)$, которая оказывается свободной с образующими степеней, указанных в таблице.

Я благодарен Э. Лойенге, В. В. Никулину и Ю. Г. Прохорову за ценные консультации. Работа была закончена во время моего пребывания в университете Билефельда в июле–августе 2009 г., финансировавшегося Немецким обществом естествоиспытателей.

Список литературы

- [1] E. Looijenga, “Compactifications defined by arrangements, II: Locally symmetric varieties of type IV”, *Duke Math. J.*, **119**:3 (2003), 527–588. [2] J.-I. Igusa, “On Siegel modular forms of genus two”, *Amer. J. Math.*, **84**:1 (1962), 175–200.

Э. Б. Винберг (È. B. Vinberg)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: vinberg@zebra.ru

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
24.01.2010