Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. О. Королева, О неравенстве Фридрихса в трехмерной области, непериодически перфорированной вдоль части границы, *УМН*, 2010, том 65, выпуск 4, 199–200

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9344>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 12:00:42

О неравенстве Фридрикса в трехмерной области, непериодически перфорированной вдоль части границы

Ю. О. Королева

В этой работе доказывается трехмерное неравенство типа Фридрикса в перфорированном кубе. Двумерное аналогичное неравенство см. в [1].

Рассмотрим область $\Omega = \{(x, y, z) : 0 < x < a, 0 < y < a, 0 < z < a\}$. Пусть $N \gg 1$ – натуральное число, $\varepsilon = a/N$ – малый параметр. Представим Ω в виде $\Omega = \bigcup_{i,j=1}^N \Pi_{\varepsilon}^{i,j}$, где $\Pi_{\varepsilon}^{i,j} = \{(x, y, z) \in \Omega : (i-1)\varepsilon \leq x \leq i\varepsilon, (j-1)\varepsilon \leq y \leq j\varepsilon, 0 \leq z \leq a\}$. Пусть $\varepsilon_1^{i,j} = \alpha^{i,j}\varepsilon$, $0 < \alpha^{i,j} = \text{const} < 1$, $\varepsilon_2^{i,j} = \beta^{i,j}\varepsilon$, $0 \leq \beta^{i,j} = \text{const}$, $\max\{\alpha^{0,0} + \alpha^{1,0}, \alpha^{0,0} + \alpha^{0,1}\} \leq \beta^{0,0} \leq \mathcal{B}$, $\max\{\alpha^{i,j} + \alpha^{i+1,j}, \alpha^{i,j} + \alpha^{i,j+1}\} \leq \beta^{i,j} \leq \mathcal{B}$, $\mathcal{B} = \text{const}$, $i, j = 1, \dots, N$. Определим $B_{\varepsilon}^{i,j} = \{(x, y, z) \in \Pi_{\varepsilon}^{i,j} : (x - x_0^{i,j})^2 + (y - y_0^{i,j})^2 + (z - \varepsilon)^2 \leq (\varepsilon_1^{i,j})^2\}$, здесь $|x_0^{i+1,j} - x_0^{i,j}| = \varepsilon_2^{i+1,j}$, $|y_0^{i,j+1} - y_0^{i,j}| = \varepsilon_2^{i,j+1}$ (см. рис.). Пусть

$B_{\varepsilon} = \bigcup_{i,j=1}^N B_{\varepsilon}^{i,j}$. Рассмотрим $\Omega_{\varepsilon} = \Omega \setminus \overline{B_{\varepsilon}}$, $\Gamma_{\varepsilon} = \partial B_{\varepsilon}$. Обозначим $H^1(\Omega_{\varepsilon}, \Gamma_{\varepsilon}) = \{u \in H^1(\Omega_{\varepsilon}) : u|_{\Gamma_{\varepsilon}} = 0\}$, аналогично, $C^{\infty}(\Omega_{\varepsilon}, \Gamma_{\varepsilon}) = \{u \in C^{\infty}(\Omega_{\varepsilon}) : u = 0 \text{ в окрестности } \Gamma_{\varepsilon}\}$. Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Для $u \in H^1(\Omega_{\varepsilon}, \Gamma_{\varepsilon})$ справедливо неравенство типа Фридрикса

$$\int_{\Omega_{\varepsilon}} u^2 dx dy dz \leq C(a) \int_{\Omega_{\varepsilon}} |\nabla u|^2 dx dy dz, \quad \text{где } C(a) \text{ не зависит от } u. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что $u \in C^{\infty}(\Omega_{\varepsilon}, \Gamma_{\varepsilon})$. Введем обозначения $Q_{\varepsilon}^{i,j} = \{(x, y, z) \in \Pi_{\varepsilon}^{i,j} : (x - x_0^{i,j})^2 + (y - y_0^{i,j})^2 \leq (\varepsilon_1^{i,j})^2, 0 \leq z \leq a\}$, $\tilde{\Pi}_{\varepsilon}^{i,j} = \left\{ (x, y, z) \in \Pi_{\varepsilon}^{i,j} : \sum_{k=1}^i \varepsilon_2^{k-1,j} - \varepsilon_1^{i,j} \leq x \leq \sum_{k=1}^i \varepsilon_2^{k-1,j} + \varepsilon_1^{i,j}, (j-1)\varepsilon \leq y \leq j\varepsilon, 0 \leq z \leq a \right\}$. Далее, пусть $\tilde{\Pi}^{+,i,j}$ ($\tilde{\Pi}^{-,i,j}$) – подмножество $\tilde{\Pi}^{i,j}$, ограниченное “спереди” (“сзади”) цилиндром $Q_{\varepsilon}^{i,j}$, и параллелепипед $\tilde{\Pi}_{\varepsilon}^{i,j,+}$ ($\tilde{\Pi}_{\varepsilon}^{i,j,-}$) есть подмножество $\Pi_{\varepsilon}^{i,j}$, ограниченное “слева” (“справа”) параллелепипедом $\tilde{\Pi}_{\varepsilon}^{i,j}$. Кроме того, пусть $Q_{\varepsilon,\omega}^{i,j} = Q_{\varepsilon}^{i,j} \cap \{z \leq \omega\}$, $q_{\omega}^{i,j} = Q_{\varepsilon}^{i,j} \cap \{z = \omega\}$, $\Gamma_{\omega}^{i,j} = \Pi_{\varepsilon}^{i,j} \cap \{z = \omega\}$. Аналогично, $\tilde{\Gamma}_{\omega}^{i,j}$, $\tilde{\Gamma}_{\omega}^{\pm,i,j}$, $\tilde{\Gamma}_{\omega}^{i,j;\pm}$ – сечения плоскостью $z = \omega$ областей $\tilde{\Pi}^{i,j}$, $\tilde{\Pi}^{\pm,i,j}$, $\tilde{\Pi}^{i,j;\pm}$.

1. Пусть $(x, y, \omega) \in q_{\omega}^{i,j}$, а $(x, y, z_0) \in \partial B_{\varepsilon}^{i,j}$. Следующая цепочка неравенств справедлива в силу формулы Ньютона–Лейбница и неравенства Коши–Буняковского:

$$u^2(x, y, \omega) = \left(\int_{z_0}^{\omega} \frac{\partial u}{\partial z} dz \right)^2 \leq \omega \int_{z_0}^{\omega} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dz \leq \omega \int_0^{\omega} |\nabla u|^2 dz. \quad (2)$$

Далее, проинтегрируем обе части неравенства (2) по x, y по сечению $q_{\omega}^{i,j}$ а затем еще раз по ω от 0 до a :

$$\begin{aligned} \int_{q_{\omega}^{i,j}} u^2(x, y, \omega) dx dy &\leq \omega \int_{Q_{\varepsilon}^{i,j}} |\nabla u|^2 dx dy dz \leq a \int_{Q_{\varepsilon}^{i,j}} |\nabla u|^2 dx dy dz, \\ \int_{Q_{\varepsilon}^{i,j}} u^2 dx dy dz &\leq a\omega \int_{Q_{\varepsilon}^{i,j}} |\nabla u|^2 dx dy dz \leq a^2 \int_{Q_{\varepsilon}^{i,j}} |\nabla u|^2 dx dy dz. \end{aligned} \quad (3)$$

2. Пусть $(x, y, \omega) \in \tilde{\Gamma}_{\omega}^{\pm; i, j}$, а $(\tilde{x}, \tilde{y}, \omega) \in q_{\omega}^{i, j}$, причем $\tilde{x}(x)$, $\tilde{y}(y)$ выбраны так, что $(\tilde{x}, \tilde{y}, \omega) \in q_{\omega}^{i, j}$ при $(x, y, \omega) \in \tilde{\Gamma}_{\omega}^{\pm; i, j}$. Для удобства обозначим $p = (x, y)$, $\tilde{p} = (\tilde{x}, \tilde{y})$. По формуле Ньютона–Лейбница $u(p, \omega) = u(\tilde{p}, \omega) + \int_{\tilde{p}}^p \frac{\partial u}{\partial p} dp$. Возведем обе части данного равенства в квадрат и воспользуемся неравенством $(A + B)^2 \leq 2A^2 + 2B^2$. Учитывая, что $\partial u / \partial p = (\nabla u, \vec{p})$, где $\vec{p}$ – вектор, соединяющий точки $\tilde{p}$ и p , и используя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$\left(\int_{\tilde{p}}^p \frac{\partial u}{\partial p} dp \right)^2 \leq C_1(\varepsilon_1^{i, j}, \varepsilon_2^{i, j}) \int_{\tilde{\Gamma}_{\omega}^{\pm; i, j} \cup q_{\omega}^{i, j}} |\nabla u|^2 dx dy \leq C_2 \int_{\tilde{\Gamma}_{\omega}^{\pm; i, j} \cup q_{\omega}^{i, j}} |\nabla u|^2 dx dy, \quad (4)$$

где константа C_2 не зависит от ε . Учитывая (4), имеем $u^2(x, y, \omega) \leq 2u^2(\tilde{x}, \tilde{y}, \omega) + 2C_2 \int_{\tilde{\Gamma}_{\omega}^{\pm; i, j} \cup q_{\omega}^{i, j}} |\nabla u|^2 dx dy$. Интегрируя обе части последнего неравенства по x, y по сечению $\tilde{\Gamma}_{\omega}^{\pm; i, j}$, а затем еще раз по ω от 0 до a и учитывая (3), получаем

$$\int_{\tilde{\Pi}_{\varepsilon}^{\pm; i, j}} u^2 dx dy dz \leq M^{\pm}(a) \int_{Q_{\varepsilon}^{i, j} \cup \tilde{\Pi}_{\varepsilon}^{\pm; i, j}} |\nabla u|^2 dx dy dz, \quad (5)$$

где $M^{\pm}(a)$ не зависит от u .

3. Пусть теперь $(x, y, \omega) \in \tilde{\Gamma}_{\omega}^{i, j; \pm}$, а $(\tilde{x}, \tilde{y}, \omega) \in \tilde{\Gamma}_{\omega}^{i, j}$. При этом $\tilde{x}(x)$ и $\tilde{y}(y)$ выбраны так, что $(\tilde{x}, \tilde{y}, \omega) \in \tilde{\Gamma}_{\omega}^{i, j; \pm}$ при $(x, y, \omega) \in \tilde{\Gamma}_{\omega}^{i, j}$. Аналогично п. 2 можно показать, что

$$\int_{\tilde{\Pi}_{\varepsilon}^{i, j; \pm}} u^2 dx dy dz \leq L^{\pm}(a) \int_{\tilde{\Pi}_{\varepsilon}^{i, j} \cup \tilde{\Pi}_{\varepsilon}^{i, j; \pm}} |\nabla u|^2 dx dy dz, \quad (6)$$

где константа $L^{\pm}$ не зависит от u . Объединяя (3), (5), (6), имеем $\int_{\Pi_{\varepsilon}^{i, j}} u^2 dx dy dz \leq C(a) \int_{\Pi_{\varepsilon}^{i, j}} |\nabla u|^2 dx dy dz$. Суммируя левую и правую части последнего неравенства по всем i и j от 1 до N , получаем (1) для $u \in C^{\infty}(\Omega_{\varepsilon}, \Gamma_{\varepsilon})$. Наконец, приближая стандартным образом функции из $H^1(\Omega_{\varepsilon}, \Gamma_{\varepsilon})$ бесконечно дифференцируемыми функциями (см., например, [2; гл. III]), получаем справедливость теоремы.

Автор выражает самую искреннюю благодарность своему научному руководителю д. ф.-м. н. Г. А. Чечкину за постановку задачи, внимание и помощь на протяжении работы над статьей.

Список литературы

- [1] G. A. Chechkin, Yu. O. Koroleva, A. Meidell, L.-E. Persson, *Russ. J. Math. Phys.*, **16**:1 (2009), 1–16. [2] В. П. Михайлов, *Дифференциальные уравнения в частных производных*, Наука, М., 1983.

Ю. О. Королева (Yu. O. Koroleva)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: korolevajula@mail.ru

Представлено В. М. Закалюкиным
Принято редколлегией
27.01.2010