Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Фарбер, Р. Гейган, Д. Шютц, Замкнутые 1-формы
в топологии и геометрической теории групп, *УМН*, 2010,
том 65, выпуск 1, 145–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9345>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 06:37:39

УДК 515.165

Замкнутые 1-формы в топологии и геометрической теории групп

М. Фарбер, Р. Гейган, Д. Шютц

В настоящей статье мы описываем связи между топологией замкнутых 1-форм и теоретико-групповыми инвариантами Бьери–Неймана–Штребеля–Ренца. Начиная с обзора, мы обобщаем эти сигма-инварианты на конечные клеточные комплексы и показываем, что многие свойства из теоретико-групповой версии имеют аналоги. В частности, мы устанавливаем связь между сигма-инвариантами и свойствами конечности некоторых бесконечнолистных накрытий. Мы также обсуждаем применения этих инвариантов к категории Люстерника–Шнирельмана для замкнутых 1-форм и к существованию несингулярной замкнутой 1-формы в заданном классе когомологий на замкнутых многообразиях высокой размерности.

Библиография: 32 названия.

Ключевые слова: сигма-инварианты, кольцо Новикова, подвижность гомологических классов, категория Люстерника–Шнирельмана.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	145
1. Инварианты Бьери–Неймана–Штребеля–Ренца	147
2. Сигма-инварианты клеточных комплексов	152
3. Кольцо Новикова и гомологии	157
4. Связь с категорией Люстерника–Шнирельмана для замкнутых 1-форм	158
5. Результат типа Гуревича	159
6. Свойство функториальности	160
7. Результаты доминирования для накрывающих пространств	161
8. Подвижность гомологических классов	169
9. Функциональное пространство путей в бесконечность	170
Приложение А. Сигма-инварианты цепных комплексов	174
Список литературы	175

Введение

В течение трех последних десятилетий наблюдается все возрастающий интерес к топологии замкнутых 1-форм. Начало было положено С. П. Новиковым в [1], [2], где была введена техника теории Морса для изучения классических

проблем математической физики. По аналогии с комплексом Морса–Смейла для функции Морса на замкнутом многообразии, им был построен цепной комплекс, ныне называемый комплексом Морса–Новикова, ассоциированный с замкнутой 1-формой с невырожденными в смысле Морса особенностями. Хотя для Новикова интерес представляли проблемы уравнений типа Кирхгофа [2]–[4], вскоре появились и другие приложения в разных областях математики. Например, градиентные векторные поля замкнутых 1-форм приводят к замечательным результатам в теории динамических систем, и некоторые темы, возникшие на этом пути, изложены в недавней монографии [5] и обзорной статье [6].

Другая удивительная связь была установлена с геометрической теорией групп, когда выяснилось, что работа Ж.-К. Сикорава [7], применившего теорию Новикова к симплектической топологии, находится в тесной связи с работами Р. Бьери, В. Д. Неймана, Р. Штребеля и Б. Ренца [8], [9]. Более подробно – геометрические инварианты $\Sigma^k(G)$ группы G (их определение мы напомним в разделе 1), содержащие важную информацию о свойствах конечности для некоторых подгрупп G , можно описать в терминах обнуления в обобщенных гомологиях Новикова.

Свойство, объединяющее эти области, – существование 1-формы из классов когомологий $\xi \in H^1(X; \mathbb{R})$. Если X – гладкое многообразие, это частный случай теории де Рама, и первым автором настоящей статьи была развита теория 1-форм на топологических пространствах, для которых имеет место более общий результат (см. [10]). Если X связно, то группу $H^1(X; \mathbb{R})$ можно отождествить с множеством гомоморфизмов $\text{Hom}(\pi_1(X), \mathbb{R})$, где $\mathbb{R}$ рассматривается как группа относительно обычного сложения. Действительно, на инварианты $\Sigma^k(G)$ можно смотреть как на подмножества единичной сферы в $\text{Hom}(G, \mathbb{R})$.

Одной из целей данной статьи является описание этих связей в общем случае и развитие теории Бьери–Неймана–Штребеля–Ренца с использованием языка топологии замкнутых 1-форм. В частности, мы обобщаем понятие сигма-инвариантов на случай конечных клеточных комплексов. Эти инварианты $\Sigma^k(X)$ для $k \geq 1$ определены как обобщения теоретико-групповых версий и имеют аналогичные свойства. Это обобщение мотивировано регулярным появлением теоретико-групповых инвариантов в топологии замкнутых 1-форм. Например, условие $\xi \in \Sigma^2(\pi_1(M))$ возникает в работе Ф. Латура [11] как необходимое для существования невырожденной замкнутой 1-формы в классе когомологий $\xi \in H^1(M; \mathbb{R})$, где M – замкнутое n -мерное многообразие ($\dim M \geq 6$). Другим необходимым условием в [11], из которого на самом деле следует условие $\xi \in \Sigma^2(\pi_1(M))$, является стягиваемость некоторого функционального пространства. Оказывается, что стягиваемость этого пространства эквивалентна выполнению условия $\xi \in \Sigma^k(M)$ для всех $k \geq 1$. Заметим, что для трехмерных компактных многообразий условие $\xi \in \Sigma^1(\pi_1(M))$ является достаточным для существования невырожденной замкнутой 1-формы, представляющей ξ (см. [8]).

Другим свойством этих новых сигма-инвариантов является то, что они отражают свойства конечности для бесконечнолистных абелевых накрытий $q: \bar{X} \rightarrow X$. Под абелевым накрытием мы понимаем регулярное накрытие с абеле-

вой группой $\pi_1(X)/\pi_1(\bar{X})$. Обозначим

$$S(X, \bar{X}) = \{0 \neq \xi: \pi_1(X) \rightarrow \mathbb{R} \mid \xi|_{\pi_1(\bar{X})} = 0\}.$$

ТЕОРЕМА. Пусть X – конечный связный клеточный комплекс, и пусть $q: \bar{X} \rightarrow X$ – регулярное накрытие, для которого группа $\pi_1(X)/\pi_1(\bar{X})$ абелева. При $k \geq 1$ следующие свойства эквивалентны:

- 1) пространство $\bar{X}$ гомотопически эквивалентно клеточному комплексу с конечным k -остовом;
- 2) $S(X, \bar{X}) \subset \Sigma^k(X)$.

Более того, если $S(X, \bar{X}) \subset \Sigma^{\dim X}(X)$, то $\bar{X}$ является конечно доминируемым.

Доказательство этой теоремы приводится в разделе 7.

Общим в этих определениях и технике является понятие подвижности подмножеств в пространстве X . Здесь подвижность понимается относительно замкнутой 1-формы ω , представляющей класс когомологий $\xi \in H^1(X; \mathbb{R})$. Грубо говоря, подвижность множества $A \subset X$ означает существование гомотопии H множества A в X , начинающейся с вложения и такой, что для каждой точки $a \in A$ интеграл от ω вдоль пути $t \mapsto H_t(a)$ является большим. Тогда как гомологические версии, использующие цепные гомотопии, возникли уже в работе [9; теорема C], топологическая версия была сформулирована в совершенно ином контексте при развитии теории Люстерника–Шнирельмана для замкнутых 1-форм (см. [5], [6], [10], [12], [13]). По аналогии ожидаемы похожие результаты, которые мы получим в разделе 4. Понятие подвижности гомологических классов изучается в разделе 8 и имеет приложения при оценке когомологической длины в теории Люстерника–Шнирельмана для замкнутых 1-форм.

Представленная статья написана как сопровождающая недавнего обзора [6], который был посвящен приложениям замкнутых 1-форм к динамическим системам. Она содержит значительное количество нового материала, хотя некоторые части изложены как обзоры.

1. Инварианты Бьери–Неймана–Штребеля–Ренца

Пусть G – конечно порожденная группа. Напомним определение инвариантов Бьери–Неймана–Штребеля–Ренца $\Sigma^k(G; \mathbb{Z})$, введенных в [8], [9]. Обозначим

$$S(G) = (\text{Hom}(G, \mathbb{R}) - \{0\})/\mathbb{R}_+,$$

т. е. мы отождествляем ненулевые гомоморфизмы, если один из них получается из другого домножением на положительное число. Это пространство является $(r - 1)$ -мерной сферой, где r – ранг абелизации группы G . Мы отождествим $S(G)$ с единичной сферой в пространстве $\text{Hom}(G, \mathbb{R})$ (после выбора скалярного произведения в последнем) и будем использовать краткую запись $\xi \in S(G)$.

Для заданного $\xi \in S(G)$ определим подкольцо $\mathbb{Z}G_\xi$ кольца $\mathbb{Z}G$ формулой

$$\mathbb{Z}G_\xi = \left\{ \sum_{g \in G} n_g g \in \mathbb{Z}G \mid n_g = 0, \text{ если } \xi(g) < 0 \right\}.$$

Будем говорить, что тривиальный $\mathbb{Z}G$ -модуль $\mathbb{Z}$ имеет тип FP_k над $\mathbb{Z}G_\xi$, если существует резольвента

$$\cdots \longrightarrow F_i \longrightarrow F_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \quad (1)$$

$\mathbb{Z}G$ -модуля $\mathbb{Z}$ в свободные $\mathbb{Z}G_\xi$ -модули, где каждый F_i конечно порожден при $i \leq k$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Инварианты Бьери–Неймана–Штребеля–Ренца* определяются следующим образом:

$$\Sigma^k(G; \mathbb{Z}) = \{\xi \in S(G) \mid \mathbb{Z} \text{ имеет тип } FP_k \text{ над } \mathbb{Z}G_\xi\}.$$

Достоинство этих инвариантов заключается в том, что они тесно связаны со свойствами конечности подгрупп группы G . Напомним, как формулируются соответствующие свойства конечности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Группа G имеет тип FP_k , $k \geq 1$, если существует резольвента (1) $\mathbb{Z}G$ -модуля $\mathbb{Z}$, где каждый член F_i , $i \leq k$, является конечно порожденным $\mathbb{Z}G$ -модулем. Мы будем говорить, что G имеет тип F_k , если для G существует пространство Эйленберга–Маклейна с конечным n -остовом.

Мы получаем, что если G имеет тип F_k , то она имеет тип FP_k (для этого надо рассмотреть цепной комплекс универсального накрытия пространства Эйленберга–Маклейна), и тип FP_1 эквивалентен типу F_1 , который означает конечную порожденность. Но из типа FP_2 не следует конечная представимость, как показывает пример М. Бествины и Н. Бреди [14]. Более подробную информацию о свойствах конечности можно найти в [15], [16].

Заметим, что $\mathbb{Z}G$, рассмотренный как $\mathbb{Z}G_\xi$ -модуль для любого ξ , является прямым пределом свободных $\mathbb{Z}G_\xi$ -модулей. Следовательно, он является плоским $\mathbb{Z}G_\xi$ -модулем. Более того, для любого $\mathbb{Z}G$ -модуля A имеем $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G_\xi} A \cong A$. Следовательно, если $\Sigma^k(G; \mathbb{Z}) \neq \emptyset$ для некоторого $k \geq 1$, то можно применить $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G_\xi}$ к резольвенте (1) для некоторого $\xi \in \Sigma^k(G; \mathbb{Z})$ – чтобы доказать, что группа G сама имеет тип FP_k .

Следующая теорема, которую мы обобщим в разделе 7, связывает свойства конечности некоторых подгрупп с инвариантами.

ТЕОРЕМА 1 (Бьери–Ренц, [9]). *Пусть группа G является группой типа FP_k , а N – подгруппа G , содержащая коммутатор группы G . Тогда N является группой типа FP_k в том и только том случае, когда $\Sigma^k(G; \mathbb{Z})$ содержит подсферу $S(G, N) = \{\xi \in S(G) \mid N \leq \text{Ker } \xi\}$.*

Имеет место также аналог теоремы 1, дающий критерий того, когда N является группой типа F_k , и задействующий гомотопический инвариант $\Sigma^k(G)$. Ниже мы опишем другие свойства этого инварианта. Другой результат, доказанный в работе [9], утверждает, что все $\Sigma^k(G; \mathbb{Z})$ являются открытыми множествами в $S(G)$.

В [8] показано, что даже частный случай $k = 1$ имеет очень важные приложения в теории групп.

ТЕОРЕМА 2 (Бьери–Нейман–Штребель, [8]). Пусть G – конечно представимая группа, не содержащая свободных неабелевых подгрупп. Тогда

$$\Sigma^1(G; \mathbb{Z}) \cup -\Sigma^1(G; \mathbb{Z}) = S(G).$$

Здесь $-\Sigma^1(G)$ обозначает образ $\Sigma^1(G)$ при антиподальном отображении.

Мы хотим дать более геометрическую интерпретацию этих инвариантов. Временно мы ограничимся случаем $k = 1$ и для простоты предположим, что G конечно представима. Пусть X – конечный клеточный комплекс с $\pi_1(X) \cong G$, и пусть $q: \bar{X} \rightarrow X$ – универсальное абелево накрытие. Имея ненулевой гомоморфизм $\xi: G \rightarrow \mathbb{R}$, можно построить – индукцией по остовам $\bar{X}$ – отображение $h: \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}$ с $h(gx) = \xi(g) + h(x)$ для всех $g \in G$ и $x \in \bar{X}$. Заметим, что G действует на $\bar{X}$ накрывающими преобразованиями и коммутатор действует тривиально. Положим $N = h^{-1}([0, \infty))$, тогда N не обязано быть связным, однако имеет единственную компоненту, на которой h неограничено (см. [8; лемма 5.2]). В следующей теореме мы предполагаем, что отмеченная точка пространства N выбрана в такой компоненте связности.

ТЕОРЕМА 3 (Бьери–Нейман–Штребель, [8]). Включение $\xi \in \Sigma^1(G; \mathbb{Z})$ имеет место тогда и только тогда, когда $i_{\#}: \pi_1(N) \rightarrow \pi_1(\bar{X})$, где $i: N \rightarrow \bar{X}$ – включение, является эпиморфизмом.

Этот геометрический критерий тесно связан с концепцией подвижности подмножества в X относительно данного класса ξ и недавно изучался в связи с теорией Люстерника–Шнирельмана для ξ (см. [10], [5], [6]). Напомним определение замкнутой 1-формы для топологического пространства X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Непрерывная замкнутая 1-форма ω на топологическом пространстве X определяются как набор $\{f_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ непрерывных действительных функций $f_U: U \rightarrow \mathbb{R}$, где $\mathcal{U} = \{U\}$ – открытое покрытие пространства X такое, что для любой пары $U, V \in \mathcal{U}$ разность

$$f_U|_{U \cap V} - f_V|_{U \cap V}: U \cap V \rightarrow \mathbb{R}$$

является локально-постоянной функцией. Другой такой набор $\{g_V\}_{V \in \mathcal{V}}$ (где $\mathcal{V}$ – другое открытое покрытие X) задает эквивалентную замкнутую 1-форму, если объединенный набор $\{f_U, g_V\}_{U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}}$ является замкнутой 1-формой, т. е. если для любых $U \in \mathcal{U}$ и $V \in \mathcal{V}$ функция $f_U - g_V$ является локально-постоянной на пересечении $U \cap V$.

Эти замкнутые 1-формы ведут себя так же, как и гладкие замкнутые 1-формы на многообразиях; их можно интегрировать вдоль путей $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ и интегрирование вдоль замкнутых путей определяет гомоморфизм $\xi_\omega: \pi_1(X) \rightarrow \mathbb{R}$. Более того, любой такой гомоморфизм можно реализовать с помощью замкнутой 1-формы. Подробности см. в [6; § 3].

ПРИМЕР 1. Непрерывная функция $f: X \rightarrow S^1$ определяет замкнутую 1-форму следующим образом. Представим окружность S^1 как факторгруппу $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, и пусть $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ – проекция. Пусть $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ – открытый интервал и $b - a \leq 1$. Тогда I гомеоморфен открытому множеству $p(I) \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ с помощью p . Набор

$$\omega = \{(p|_I)^{-1} \circ f|_{f^{-1}(p(I))}: f^{-1}(p(I)) \rightarrow I\}$$

определяет замкнутую 1-форму. Более того, $\xi_\omega: \pi_1(X) \rightarrow \mathbb{R}$ можно отождествить с $f_\#: \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(S^1)$, если стандартная образующая группы $\pi_1(S^1)$ отождествлена с $1 \in \mathbb{R}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть X – конечный связный клеточный комплекс, $G = \pi_1(X)$ и ω – замкнутая 1-форма на X . Подмножество $A \subset X$ называют n -подвижным относительно ω и отклонения $C \geq 0$ (где n – целое число), если найдется такая гомотопия $H: A \times [0, 1] \rightarrow X$, что $H(a, 0) = a$ для всех $a \in A$ и

$$\int_a^{H_1(a)} \omega \geq n, \quad \int_a^{H_t(a)} \omega \leq -C$$

для всех $a \in A$ и $t \in [0, 1]$. Здесь интеграл берется вдоль пути $s \mapsto H(a, s)$ для $s \in [0, t]$.

Понятие подвижности уходит корнями в теорию Люстерника–Шнирельмана для замкнутых 1-форм (ср. [6], [10]). Следующее утверждение показывает, что это понятие дает критерий для $\Sigma^1(G; \mathbb{Z})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть X – конечный связный клеточный комплекс, $G = \pi_1(X)$ и $\xi: G \rightarrow \mathbb{R}$ – гомоморфизм, представленный замкнутой 1-формой ω . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $\xi \in \Sigma^1(G; \mathbb{Z})$;
- 2) существует такое $C \geq 0$, что 1-остов $X^{(1)} \subset X$ является n -подвижным относительно ω и отклонения C для любого $n > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\implies$ 2). Пусть $\bar{X}$ – универсальное абелево накрытие X и $h: \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}$ – прообраз ω на $\bar{X}$. Легко видеть, что $h(gx) = \xi(g) + h(x)$ для всех $x \in \bar{X}$ и $g \in G$. Выберем $N = h^{-1}([0, \infty))$, и пусть $N' \subset N$ – компонента, на которой h неограничено согласно [8; лемма 5.2]. Для любой клетки σ пространства X рассмотрим поднятие $\bar{\sigma} \subset h^{-1}((-\infty, -1])$. Если σ – нульмерная клетка, то можно определить такое клеточное отображение $H_\sigma: [0, 1] \rightarrow \bar{X}$, что $H_\sigma(0) = \bar{\sigma}$ и $H_\sigma(1) \in N'$. Здесь $[0, 1]$ рассматривается как стандартный клеточный комплекс с двумя нульмерными и одной одномерной клеткой. Используя эквивариантность, получаем эквивариантную клеточную гомотопию $H^0: \bar{X}^{(0)} \times [0, 1] \rightarrow \bar{X}$. Заметим, что G действует на $\bar{X} \times [0, 1]$ по формуле $g(x, t) = (gx, t)$ и H^0 индуцирует гомотопию на $X^{(0)}$, которая задает 1-подвижность нульмерного остова. Так как образ H_1^0 лежит в нульмерном остове, мы можем итерировать гомотопию для получения n -подвижности для любого $n > 0$.

Для любой одномерной клетки σ пространства X возьмем клетку $\bar{\sigma} \subset h^{-1}((-\infty, -1])$, и пусть u, v – граничные точки $\bar{\sigma}$. Итерируя в случае необходимости H^0 , мы можем считать, что $H^0(u, 0), H^0(u, 1) \in N'$, и поскольку N' связно, можно найти клеточное отображение $H_{u,v}: [0, 1] \rightarrow N'$, соединяющее эти точки.

Заметим, что $H_{u,v}([0, 1])$, $H^0(\{u, v\} \times [0, 1])$ и $\bar{\sigma}$, будучи подходящим образом ориентированы, образуют замкнутую петлю в $\tilde{X}$. Но по теореме 3 эта петля представима петлей из N' . Другими словами, изменяя кривую $H_{u,v}$ в N' подходящим образом, можно считать, что эта петля ограничивает. Следовательно, H^0 можно продолжить до такого клеточного отображения $H_\sigma: (\bar{X}^{(0)} \cup \bar{\sigma}) \times$

$[0, 1] \rightarrow \bar{X}$, что $H_\sigma(\bar{\sigma}, 1) = H_{u,v}([0, 1])$. Прделаав это со всеми одномерными клетками пространства X и продолжая эквивариантно, получаем клеточную и эквивариантную гомотопию $H^1: \bar{X}^{(1)} \times [0, 1] \rightarrow \bar{X}$ такую, что H_0^1 является вложением и $h(H^1(x, 1)) - h(x) \geq 1$.

Поскольку H^1 эквивариантно, получаем гомотопию $H: X^{(1)} \times [0, 1] \rightarrow X$, которая показывает, что $X^{(1)}$ является 1-подвижным относительно ω . Ввиду компактности существует такое $C > 0$, что $X^{(1)}$ является 1-подвижным относительно отклонения C . Образ H_1 снова является 1-остовом пространства X , следовательно, мы можем итерировать гомотопию. Заметим, что итерирование гомотопии не увеличивает C , поэтому $X^{(1)}$ является n -подвижным относительно ω и C для любого $n > 0$.

2) $\implies$ 1) Пусть $h: \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}$ и $N' \subset N = h^{-1}([0, \infty))$ такие как выше. Возьмем такую отмеченную точку $x_0 \in N'$, что $f(x_0) \geq C + 1$. Пусть $\gamma: (S^1, 1) \rightarrow (\bar{X}, x_0)$ – петля, которую можно рассматривать как клеточную. Ввиду компактности S^1 существует такое $K \leq 0$, что $\gamma(S^1) \subset f^{-1}([K, \infty))$.

По предположению существует такая гомотопия $\bar{H}: \bar{X}^{(1)} \times [0, 1] \rightarrow \bar{X}$, что $\bar{H}_0$ является вложением и

$$h(\bar{H}_1(x)) - h(x) \geq C - K, \quad h(\bar{H}_t(x)) - h(x) \geq -C$$

для всех $x \in \bar{X}$. Пусть $\mu: \tilde{X} \rightarrow [0, 1]$ – такое отображение, что $\mu|_{f^{-1}([C+1, \infty))} \equiv 0$ и $\mu|_{f^{-1}((-\infty, C])} \equiv 1$. Определим $A: S^1 \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ формулой $A(x, t) = \bar{H}(\gamma(x), \mu(\gamma(x)) \cdot t)$. Тогда $A(x, 0) = \gamma(x)$, $A(x, 1) = \bar{H}(\gamma(x), \mu(\gamma(x))) \in N'$ и $A(x_0, t) = x_0$ для всех $t \in [0, 1]$. Значит, $\xi \in \Sigma^1(G; \mathbb{Z})$ по теореме 3. Предложение 1 доказано.

Критерий, аналогичный условию 2) из предложения 1, приводит к гомотопической версии инвариантов Бьери–Неймана–Штребеля–Ренца $\Sigma^k(G)$, введенных в [9]. Предположим, что X – пространство типа Эйленберга–Маклейна с конечным n -остовом для некоторого $n \geq 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть X такое же, как выше, $\xi \in S(G)$, ω – замкнутая 1-форма на X , представляющая ξ , и $k \geq 0$. Будем говорить, что $\xi \in \Sigma^k(G)$, если существуют $\varepsilon > 0$ и клеточная гомотопия $H: X^{(k)} \times [0, 1] \rightarrow X$ такие, что $H(x, 0) = x$ для всех $x \in X^{(k)}$ и

$$\int_{\gamma_x} \omega \geq \varepsilon$$

для всех $x \in X^{(k)}$, где $\gamma_x: [0, 1] \rightarrow X$ задается формулой $\gamma_x(t) = H(x, t)$. Здесь $X^{(k)}$ обозначает k -остов X .

Условие клеточности H гарантирует, что образ H_1 лежит в $X^{(k)}$ и, следовательно, гомотопию можно итерировать. Поэтому ε может быть сколь угодно большим, что показывает независимость определения от выбора ω . Все итерации имеют одно и то же отклонения $C \geq 0$. Используя клеточную аппроксимацию, легко показать, что условие 2) из предложения 1 эквивалентно условию $\xi \in \Sigma^1(G)$.

Вышеприведенное определение не является обычным определением $\Sigma^k(G)$, но, как следует из предложения 2 ниже, оно согласуется с определением, данным Р. Бьери и Б. Ренцем [9; § 6].

Несмотря на то, что в общем случае описать $\Sigma^k(G)$ и $\Sigma^k(G; \mathbb{Z})$ достаточно сложно, существуют важные классы групп, для которых сигма-инварианты могут быть определены. Например, это прямоугольные группы Артина (см. [17]) и группа Томсона F (см. [18]). Более подробную информацию об этих инвариантах и их приложениях см., например, в [8], [9], [19]–[21].

2. Сигма-инварианты клеточных комплексов

Ограничиваться в определении 5 асферическими пространствами X не имеет особого смысла, поэтому мы распространим это определение на более общие X . Для простоты предположим, что X – конечный связный клеточный комплекс, но можно рассмотреть случай, когда X имеет конечный n -остов для некоторого $n \geq 1$ (в этом случае можно определить $\Sigma^k(X)$ для $k \leq n$). Для начала определим

$$S(X) = (\text{Hom}(H_1(X), \mathbb{R}) - \{0\}) / \mathbb{R}_+,$$

т. е. мы рассматриваем гомоморфизмы с точностью до положительных множителей. Очевидно, что $S(X) = S(G)$, где $G = \pi_1(X)$.

Теперь можно дать определение *сигма-инвариантов для клеточных комплексов*, аналогичное определению 5.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть X – конечный связный клеточный комплекс, $\xi \in S(X)$, ω – замкнутая 1-форма на X , представляющая ξ , и $k \geq 0$. Будем говорить, что $\xi \in \Sigma^k(X)$, если существуют $\varepsilon > 0$ и клеточная гомотопия $H: X^{(k)} \times [0, 1] \rightarrow X$ такие, что $H(x, 0) = x$ для всех $x \in X^{(k)}$ и

$$\int_{\gamma_x} \omega \geq \varepsilon$$

для всех $x \in X^{(k)}$, где $\gamma_x: [0, 1] \rightarrow X$ задается формулой $\gamma_x(t) = H(x, t)$.

Пусть $p: \tilde{X} \rightarrow X$ – универсальное накрытие. Так же как и для гладких многообразий, замкнутая 1-форма ω поднимается в точную форму на $\tilde{X}$: $p^*\omega = dh$ для некоторой функции $h: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что

$$h(gx) = h(x) + \xi(g) \quad (2)$$

для всех $g \in \pi_1(X)$ и $x \in \tilde{X}$. Функция $h: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{R}$ со свойством (2) называется *функцией высоты*. Такая функция высоты определяет замкнутую 1-форму, представляющую класс ξ . Подмножество $N \subset \tilde{X}$ называется *окрестностью бесконечности относительно ξ* , если существуют такие функция высоты $h_\xi: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{R}$ и число $a \in \mathbb{R}$, что выполнено

$$h_\xi^{-1}([a, \infty)) \subset N.$$

Легко проверить, что если N – окрестность бесконечности относительно ξ для некоторой функции высоты, то N также является окрестностью бесконечности относительно ξ для любой другой функции высоты.

Если задана конкретная функция высоты h_ξ , обозначим $N_i = h_\xi^{-1}([i, \infty))$ для любого $i \in \mathbb{R}$.

Можно описать $\Sigma^k(X)$ в терминах только функции высоты. Для этого нам понадобится еще одно определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть X – конечный связный клеточный комплекс, $h_\xi: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{R}$ – функция высоты и $\xi \in H^1(X; \mathbb{R})$ – ненулевой класс. Путем в бесконечность относительно ξ назовем такое отображение $\gamma: [0, \infty) \rightarrow \tilde{X}$, что для любой окрестности N бесконечности существует такое $T \geq 0$, что $\gamma(t) \in N$ для всех $t \geq T$.

Если задан путь γ к бесконечности, то для любой окрестности N бесконечности можно выбрать точку $\gamma(T_N) \in N$ и получить обратную систему $\{\pi_*(\tilde{X}, N, \gamma(T_N))\}$, где изменение отмеченных точек задается с помощью $\gamma|_{[T_N, T_{N'}]}$. Мы часто будем опускать в обозначениях отмеченные точки, но хотим обратить внимание, что путь в бесконечность всегда предполагается зафиксированным. Следующее предложение показывает, что отмеченные пути не являются важными для наших целей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть X – конечный связный клеточный комплекс, $\xi \in H^1(X; \mathbb{R})$ – ненулевой класс и $h_\xi: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{R}$ – функция высоты. Следующие условия эквивалентны:

- 1) $\xi \in \Sigma^k(X)$;
- 2) существует такое $\lambda \geq 0$, что $j_\#: \pi_l(\tilde{X}, N_i) \rightarrow \pi_l(\tilde{X}, N_{i-\lambda})$ является тривиальным для всех $l \leq k$ и $i \in \mathbb{R}$;
- 3) для любой окрестности N бесконечности относительно ξ существует другая окрестность $N' \subset N$ такая, что $j_\#: \pi_l(\tilde{X}, N') \rightarrow \pi_l(\tilde{X}, N)$ является тривиальным для всех $l \leq k$;
- 4) существуют $\varepsilon > 0$ и эквивариантная клеточная гомотопия $\tilde{H}: \tilde{X}^{(k)} \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ такие, что $\tilde{H}_0$ является вложением и $h_\xi(\tilde{H}_1(\tilde{x})) - h_\xi(\tilde{x}) \geq \varepsilon$ для всех $\tilde{x} \in \tilde{X}^{(k)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\iff$ 4), так как можно поднять N на $\tilde{H}$ и $\tilde{H}$ определяет N .

Импликация 2) $\implies$ 3) очевидна.

3) $\implies$ 4). Определим N по индукции относительно остовов $\tilde{X}$. Гомотопию всегда можно определить на $\tilde{X}^{(0)}$, поскольку $\tilde{X}$ связно и ξ – ненулевой класс. Предположим, что для $H: \tilde{X}^{(k-1)} \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ выполнено условие 4). Пусть $N = N_0 = h_\xi^{-1}([0, \infty))$ – окрестность бесконечности относительно ξ , окрестность $N' \subset N$ такая же, как в 3), и выберем $\varepsilon > 0$. Выберем поднятие $\tilde{\sigma} \subset \tilde{X} - N_{-\varepsilon}$ для любой k -мерной клетки σ пространства X . Итерируя H при необходимости, можно считать, что $H_1(\partial\tilde{\sigma}) \subset N'$. Имея характеристическую функцию $\chi_\sigma: (D^k, S^{k-1}) \rightarrow (\tilde{X}^{(k)}, \tilde{X}^{(k-1)})$, можно взять композицию $\chi_\sigma|_{S^{k-1}}$ с H , чтобы получить элемент из $\pi_k(\tilde{X}, N')$, ограничение которого тривиально на $\pi_k(\tilde{X}, N)$. Это дает гомотопию $\chi: D^k \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ с $\chi_0 = \chi_\sigma$ и $\chi_1(D^k) \subset N$. Мы можем использовать эту гомотопию, чтобы продолжить H эквивариантно на k -остов так, чтобы выполнялось 4).

Чтобы доказать импликацию 4) $\implies$ 2), заметим, что N можно использовать, чтобы прогомоторировать любое отображение $\varphi: (D^k, S^{k-1}) \rightarrow (\tilde{X}, N_i)$ в отображение, образ которого лежит в произвольной окрестности бесконечности. Так как отмеченную точку нельзя двигать во время гомотопии, мы должны изменить N в “буферной зоне” $N_{i-\lambda} - N_i$ так, чтобы точки, попавшие

в N_i , не менялись. Тем не менее можно найти такую $N_{i-\lambda}$, что φ можно про-
гомоторировать в отображение $(D^k, S^{k-1}) \rightarrow (\tilde{X}, N_{i-\lambda})$, что дает условие 1).
Предложение 2 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Заметим, что в условии 4) предложения 2 число $\varepsilon > 0$ можно
выбрать сколь угодно большим: поскольку гомотопия клеточная, мы можем
просто итерировать ее для увеличения ε .

Наш следующий результат показывает, что сигма-инварианты являются от-
крытыми множествами в $S(X)$. Теоретико-групповую версию этого утвержде-
ния см. в [8], [9]. Для доказательства нам понадобится версия отображения
Абеля–Якоби. Пусть $q: \bar{X} \rightarrow X$ – универсальное абелево накрытие простран-
ства X и $r = b_1(X)$ – первое число Бетти пространства X . Тогда $H_1(X)$ дей-
ствует на $\bar{X}$ трансляциями монодромии и на $\mathbb{R}^r = H_1(X) \otimes \mathbb{R}$ сдвигами.

Существует эквивариантное отображение $A: \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}^r$, каноническое с точ-
ностью до гомотопии, называемое *отображением Абеля–Якоби* (см. [22; пред-
ложение 1]). В другой конструкции, заметим, что мы имеем канонический
эпиморфизм $\pi_1(X) \rightarrow \mathbb{Z}^r$ факторизации по $H_1(X)$. Тогда A является подня-
тием соответствующего классифицирующего отображения $X \rightarrow (S^1)^r$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть X – конечный связный клеточный комплекс. Для лю-
бого $k \geq 0$ множество $\Sigma^k(X)$ открыто и $\Sigma^n(X) = \Sigma^{\dim X}(X)$ для $n \geq \dim X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{R}^r$ – композиция накрывающего ото-
бражения $\tilde{p}: \tilde{X} \rightarrow \bar{X}$ с отображением Абеля–Якоби $A: \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}^r$. Тогда для
заданного $\xi: \pi_1(X) \rightarrow \mathbb{R}$ мы получаем функцию высоты

$$h_\xi = l_\xi \circ h, \quad \text{где } l_\xi: \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)] \otimes \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

определяется формулой $l_\xi([g] \otimes t) = \xi(g)t$. Пусть теперь $\tilde{H}$ – гомотопия из
предложения 2, 4) для класса ξ . Определим отображение $\tilde{K}: S(X) \times \tilde{X}^{(k)} \rightarrow \mathbb{R}$
формулой

$$\tilde{K}(\xi', \tilde{x}) = h_{\xi'}(H_1(\tilde{x})) - h_{\xi'}(\tilde{x}).$$

Выбором H получим $\tilde{K}(\xi, \tilde{x}) \geq \varepsilon$ для всех $\tilde{x} \in \tilde{X}$ и для некоторого $\varepsilon > 0$.
Отображение $\tilde{K}$ также индуцирует отображение $K: S(X) \times X^{(k)} \rightarrow \mathbb{R}$. Из ком-
пактности $X^{(k)}$ следует, что $\tilde{K}(\xi', \tilde{x}) \geq \varepsilon/2$ для всех $\tilde{x} \in \tilde{X}^{(k)}$ и всех ξ' из неко-
торой окрестности класса ξ в $S(X)$. Следовательно, условие 4) предложения 2
выполнено для всех таких ξ' . Теорема 4 доказана.

Получаем следующую связь между $\Sigma^k(X)$ и его теоретико-групповой верси-
ей $\Sigma^k(\pi_1(X))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть X – конечный связный клеточный комплекс и
 $k \geq 0$. Если $\tilde{X}$ является k -связным, то

$$\Sigma^k(X) = \Sigma^k(\pi_1(X)) \quad \text{и} \quad \Sigma^{k+1}(X) \subset \Sigma^{k+1}(\pi_1(X)).$$

Вложение может быть собственными, как показывает пример $X = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^k$
при $k \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $K(\pi_1(X), 1)$ можно сконструировать из пространства X приклейкой n -мерных клеток при $n \geq k + 2$. Обозначим это пространство Эйленберга–Маклейна через Y . Если $\xi \in \Sigma^{k+1}(X)$, то клеточная гомотопия $\tilde{H}: \tilde{X}^{(k+1)} \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ из предложения 2, 4 индуцирует гомотопию $\tilde{H}': \tilde{Y}^{(k+1)} \times [0, 1] \rightarrow \tilde{Y}$, поскольку $\tilde{Y}^{(k+1)} = \tilde{X}^{(k+1)}$ и $\tilde{X} \subset \tilde{Y}$. Следовательно, $\xi \in \Sigma^{k+1}(\pi_1(X))$.

Если $\xi \in \Sigma^k(\pi_1(X))$, то мы имеем клеточную гомотопию $\tilde{H}: \tilde{Y}^{(k)} \times [0, 1] \rightarrow \tilde{Y}^{(k+1)}$, как и в предложении 2, 4, и, поскольку $\tilde{Y}^{(k+1)} = \tilde{X}^{(k+1)}$, это доказывает включение $\xi \in \Sigma^k(X)$. Предложение 3 доказано.

По аналогии с гомологическими инвариантами $\Sigma^k(G, \mathbb{Z})$ Бьери и Ренца [9], мы хотим определить гомологические инварианты $\Sigma^k(X, \mathbb{Z})$. На самом деле мы введем более общее определение для цепных комплексов, которое также обобщает инварианты из [9]. Предположим, что все цепные комплексы удовлетворяют условию $C_i = 0$ при $i < 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть R – кольцо, n – неотрицательное целое число и C – цепной комплекс над R . Говорят, что C имеет *конечный n -тип*, если существуют конечно порожденный проективный цепной комплекс C' и цепное отображение $f: C' \rightarrow C$ такие, что $f_i: H_i(C') \rightarrow H_i(C)$ являются изоморфизмом при $i < n$ и эпиморфизмом при $i = n$. Будем называть такое f n -эквивалентностью.

Очевидно, что это эквивалентно существованию свободного цепного комплекса D над R и цепного отображения $f: D \rightarrow C$, индуцирующего изоморфизм в гомологиях. Дополнительно, D_i являются конечно порожденными при $i \leq n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть C – цепной комплекс над $\mathbb{Z}G$ и $k \geq 0$. Тогда

$$\Sigma^k(C) = \{\xi \in S(G) \mid C \text{ имеет конечный } k\text{-тип над } \mathbb{Z}G_\xi\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Если X – конечный связный цепной комплекс, положим

$$\Sigma^k(X; \mathbb{Z}) = \Sigma^k(C_*(\tilde{X})).$$

Инварианты $\Sigma^k(G; A)$ Бьери и Ренца [9] задаются равенствами $\Sigma^k(G; A) = \Sigma^k(P)$, где P – проективная $\mathbb{Z}G$ -резольвента $\mathbb{Z}G$ -модуля A .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Заметим, что $\mathbb{Z}G$ является плоским $\mathbb{Z}G_\xi$ -модулем, поскольку $\mathbb{Z}G$ – прямой предел свободных $\mathbb{Z}G_\xi$ -модулей. Так как $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G_\xi} A \cong A$ для любого $\mathbb{Z}G$ -модуля A , из $\xi \in \Sigma^n(C)$ следует, что C имеет n -тип над $\mathbb{Z}G$. Если цепной комплекс C является свободным, что он цепно-гомотопически эквивалентен комплексу D такому, что модули D_i являются конечно порожденными при $i \leq n$.

Чтобы получить аналог предложения 2, введем определение функции высоты в случае цепного комплекса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Пусть C – конечно порожденный свободный цепной комплекс над $\mathbb{Z}G$ и $\xi: G \rightarrow \mathbb{R}$ – ненулевой гомоморфизм. *Нормированием на C ,*

продолжающим ξ , называется набор отображений $v: C_k \rightarrow \mathbb{R}_\infty$, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) $v(a+b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$ для всех $a, b \in C_k$;
- 2) $v(ga) = \xi(g) + v(a)$ для всех $g \in G, a \in C_k$;
- 3) $v(-a) = v(a)$ для всех $a \in C_k$.
- 4) $v(\partial a) \geq v(a)$ для всех $a \in C_k$;
- 5) $v^{-1}(\{\infty\}) = \{0\}$.

Здесь $\mathbb{R}_\infty$ обозначает множество действительных чисел с добавленной бесконечностью ∞ и очевидным продолжением сложения и сравнения.

Для определения нормирования на свободном $\mathbb{Z}G$ -комплексе C , являющемся конечно порожденным в каждой размерности, обозначим через X_i базис в C_i . Положим $v(x) = 0$ для всех $x \in X_0$. Тогда нормирование очевидным образом продолжается на C_0 . По индукции определим нормирование для всех $x \in C_i$ следующим образом: $v(x) = 0$ при $\partial x = 0$ и $v(x) = v(\partial x)$, при $\partial x \neq 0$. И снова v можно продолжить на C_i , что даст существование нормирований на C .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть X – конечный связный клеточный комплекс, $\xi \in H^1(X; \mathbb{R})$ – ненулевой класс и $v: C_*(\tilde{X}) \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ – нормирование, продолжающее ξ . Следующие условия эквивалентны:

- 1) $\xi \in \Sigma^k(X, \mathbb{Z})$;
- 2) существует такое $\lambda \geq 0$, что $j_*: H_l(\tilde{X}, N_i) \rightarrow H_l(\tilde{X}, N_{i-\lambda})$ является тривиальным для всех $l \leq k$ и любого $i \in \mathbb{R}$;
- 3) для любой окрестности N бесконечности относительно ξ существует другая окрестность $N' \subset N$ такая, что $j_*: H_l(\tilde{X}, N') \rightarrow H_l(\tilde{X}, N)$ является тривиальным для всех $l \leq k$;
- 4) для заданного $\varepsilon > 0$ существует $\mathbb{Z}G$ -цепное отображение $A: C_*(\tilde{X}) \rightarrow C_*(\tilde{X})$, цепно-гомотопное тождественному, такое, что $v(A(x)) \geq v(x) + \varepsilon$ для всех ненулевых $x \in C_i(\tilde{X})$ при $i \leq k$.

Доказательство эквивалентности условий 2), 3) и 4) аналогично доказательству предложения 2 и поэтому опускается. Что же касается условия 1), мы отсылаем читателя к приложению А, где приведена более общая версия.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть X – конечный связный клеточный комплекс. Для любого $k \geq 0$ множество $\Sigma^k(X, \mathbb{Z})$ открыто и $\Sigma^n(X, \mathbb{Z}) = \Sigma^{\dim X}(X, \mathbb{Z})$ при $n \geq \dim X$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть X – конечный связный клеточный комплекс. Тогда:

- 1) $\Sigma^1(X) = \Sigma^1(X, \mathbb{Z})$;
- 2) $\Sigma^k(X) \subset \Sigma^k(X, \mathbb{Z})$ при $k \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что из утверждение 3) предложения 2 следует условие 3) предложения 4, следовательно, $\Sigma^k(X) \subset \Sigma^k(X, \mathbb{Z})$ при $k \geq 1$. Кроме того, при $k = 1$ клеточную гомотопию из утверждения 4, 3) можно использовать для построения гомотопии, как это сделано в доказательстве предложения 2, 3).

Как следует из примера работы [14], в общем случае $\Sigma^2(X) \neq \Sigma^2(X, \mathbb{Z})$ (см. [17]).

3. Кольцо Новикова и гомологии

Пусть G – конечно порожденная группа, $\xi \in S(G)$ и

$$\widehat{\mathbb{Z}G}_\xi = \left\{ \sum_{g \in G} n_g g \mid \#\{g \mid n_g \neq 0 \text{ и } \xi(g) > t\} < \infty \text{ для всех } t \in \mathbb{R} \right\}$$

– кольцо, содержащее $\mathbb{Z}G$. Если $\xi: G \rightarrow \mathbb{R}$ инъективно, это так называемое *Кольцо Новикова*, введенное в [2]. В случае общего ξ мы будем называть это кольцо *кольцом Новикова–Сикорава* (впервые введено в [7]).

Связь с инвариантами Бьери–Неймана–Штребеля–Ренца обнаружилась сразу, как только стала известна работа Сикорава [7]. Эта связь имеет место и в нашей ситуации и будет объяснена в нижеприведенном предложении 5.

Если X – конечный связный клеточный комплекс и $p: \bar{X} \rightarrow X$ – регулярное накрытие с $\pi_1(\bar{X}) \subset \text{Ker } \xi$, то мы получаем индуцированный гомоморфизм, также обозначаемый через $\xi: G \rightarrow \mathbb{R}$, где $G = \pi_1(X)/\pi_1(\bar{X})$. Далее мы получаем свободный конечно порожденный $\widehat{\mathbb{Z}G}_\xi$ -цепной комплекс, полагая

$$C_*(X; \widehat{\mathbb{Z}G}_\xi) = \widehat{\mathbb{Z}G}_\xi \otimes_{\mathbb{Z}G} C_*(\bar{X}),$$

мы обозначаем через

$$H_*(X; \widehat{\mathbb{Z}G}_\xi) = H_*(C_*(X; \widehat{\mathbb{Z}G}_\xi))$$

полученные гомологии, которые называются *гомологиями Новикова–Сикорава* (*гомологиями Новикова*, если ξ инъективно).

Случай универсального накрытия непосредственно связан с инвариантом $\Sigma^k(X)$, но абелево накрытие играет важную роль в оценках категории Люстерника–Шнирельмана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть X – конечный связный клеточный комплекс, $\xi \in H^1(X; \mathbb{R})$ – ненулевой класс когомологий, $\tilde{X}$ – универсальное накрытие X и $G = \pi_1(X)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $\xi \in \Sigma^k(X; \mathbb{Z})$;
- 2) $H_i(X; \widehat{\mathbb{Z}G}_{-\xi}) = 0$ для $i \leq k$.

Заметим, что для проверки включения $\xi \in \Sigma^k(X; \mathbb{Z})$ мы должны использовать кольцо Новикова–Сикорава для $-\xi$. Смысл в этом такой, что мы допускаем бесконечно много ненулевых коэффициентов среди элементов $\widehat{\mathbb{Z}G}_\xi$ в “отрицательном направлении”, что находится в прямом соответствии с оригинальным определением кольца Новикова [1]. Но чтобы придерживаться соглашений из [9], нужно пополнение в “положительную сторону”. Чтобы остаться в рамках соглашений, использованных в [6], мы ввели выше знак минус.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 5. 1) $\implies$ 2). Пусть $A: C_*(\tilde{X}) \rightarrow C_*(\tilde{X})$ – цепное отображение, цепно-гомотопное тождественному, заданному в предложении 4, 4). Тогда $\text{id} - A: C_i(X; \widehat{\mathbb{Z}G}_{-\xi}) \rightarrow C_i(X; \widehat{\mathbb{Z}G}_{-\xi})$ является изоморфизмом с обратным отображением $\text{id} + A + A^2 + \dots$, которое сходится $\widehat{\mathbb{Z}G}_{-\xi}$ согласно предложению 4, 4). Следовательно, отображение в гомологиях одновременно является изоморфизмом и нулевым, поэтому гомологии равны нулю.

2) $\implies$ 1). Поскольку $C_*(X; \widehat{\mathbb{Z}G}_{-\xi})$ свободный и ограниченный снизу, зануление гомологических групп до размерности k гарантирует существование цепной гомотопии $\delta: C_*(X; \widehat{\mathbb{Z}G}_{-\xi}) \rightarrow C_{*+1}(X; \widehat{\mathbb{Z}G}_{-\xi})$ такой, что $\partial_{i+1}\delta_i + \delta_{i-1}\partial_i = \text{id}$ при $i \leq k$. “Отрезание” задает цепную гомотопию $\bar{\delta}: C_*(\tilde{X}) \rightarrow C_*(\tilde{X})$ такую, что $\partial_{i+1}\bar{\delta}_i + \bar{\delta}_{i-1}\partial_i = \text{id} - A$. Цепное отображение A гомотопно тождественному, и, достаточно хорошо аппроксимируя δ с помощью $\bar{\delta}$, получаем, что условие 4) из предложения 4 выполнено.

Предложение 5 доказано.

4. Связь с категорией Люстерника–Шнирельмана для замкнутых 1-форм

Теперь мы хотим описать связь с теорией Люстерника–Шнирельмана замкнутых 1-форм, которая была введена в ряде статей [10], [12], [13]. Более детальную информацию, в частности, приложения и вычисления, можно найти в [5], [6]. Существует множество разных понятий, одно из которых тесно связано с $\Sigma^k(X)$ и обозначается $\text{Cat}(X, \xi)$. Здесь X – снова конечный клеточный комплекс и $\xi \in H^1(X; \mathbb{R})$. Напомним определение из [6].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Пусть X – конечный клеточный комплекс, и пусть $\xi \in H^1(X; \mathbb{R})$ – класс когомологий. Зафиксируем замкнутую 1-форму ω , представляющую класс ξ . Тогда $\text{Cat}(X, \xi)$ определяется как минимальное целое k , для которого существует открытое множество $U \subset X$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $\text{cat}_X(X - U) \leq k$;
- 2) для некоторой гомотопии $h: U \times [0, \infty) \rightarrow X$ имеем

$$h(x, 0) = x \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_x^{h_t(x)} \omega = -\infty$$

для любой точки $x \in U$;

- 3) предел из условия 2) является равномерным по $x \in U$.

Интеграл берется вдоль пути $\gamma: [0, t] \rightarrow X$, заданного равенством $\gamma(\tau) = h(x, \tau)$.

Здесь $\text{cat}_X(A)$ для $A \subset X$ – минимальное число i , для которого существуют открытые множества $U_1, \dots, U_i \subset X$, покрывающие A , каждое из которых стягиваемо в X . Инвариант $\text{Cat}(X, \xi)$ возник в работе [12]. Легко видеть, что он не зависит от умножения ξ на положительное число и, следовательно, корректно определен на $\xi \in S(X)$. Заметим, что он также определен при $\xi = 0$. В последнем случае мы получаем классическую категорию Люстерника–Шнирельмана пространства X . Более подробно см. [6].

Связь с $\Sigma^k(X)$ описывает следующая теорема. Из-за нашего соглашения о выборе знака мы получим знак минус перед ξ .

ТЕОРЕМА 5. Пусть X – конечный связный клеточный комплекс, и пусть $\xi \in H^1(X; \mathbb{R})$ – ненулевой класс когомологий. Положим $n = \dim X$. Если $-\xi \in \Sigma^k(X)$ для некоторого $k \leq n$, то $\text{Cat}(X, \xi) \leq n - k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть U – достаточно маленькая открытая окрестность $X^{(k)}$ в X , которая ретрагируется на $X^{(k)}$. Пусть $H: X^{(k)} \times [0, 1] \rightarrow X$ – гомотопия, начинающиеся с вложения, которое поднимается до гомотопии, как в предложении 2, 3). Определим $h: X^{(k)} \times [0, \infty) \rightarrow X$ равенством $h(x, t) = H(H^m(x, 1), t - m)$, где m – целое число и $t \in [m, m + 1]$. Заметим, что H – клеточное отображение, поэтому $H^m(x, 1) \in X^{(k)}$. Легко видеть, что комбинация h и ретракции U на $X^{(k)}$ дает требуемую в определении 12 гомотопию. Как хорошо известно, $\text{cat}_X(X - X^{(k)}) \leq \dim(X) - k$, откуда и следует результат. Теорема 5 доказана.

Существуют другие определения категории Люстерника–Шнирельмана класса ξ , так называемые $\text{cat}(X, \xi)$ и $\text{cat}^1(X, \xi)$ (см. [10], [5], [13], [6]), удовлетворяющие неравенствам

$$\text{cat}(X, \xi) \leq \text{cat}^1(X, \xi) \leq \text{Cat}(X, \xi).$$

Таким образом, теорема 5 дает верхнюю оценку и для них.

5. Результат типа Гуревича

Если предположить, что $\xi \in \Sigma^2(\pi_1(X))$, то можно получить обратное утверждение к следствию 2. Это можно описать следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Пусть G – конечно представимая группа и $\xi: G \rightarrow \mathbb{R}$ – ненулевой гомоморфизм. Пусть X – конечный связный клеточный комплекс с фундаментальной группой G . Будем говорить, что $\xi \in \Sigma^2(G)$, если существует такое $\lambda \geq 0$, что $j_\#: \pi_l(N_i) \rightarrow \pi_l(N_{i-\lambda})$ тривиально для $l \leq 1$ и любого $i \in \mathbb{R}$.

Заметим, что можно считать, что $\xi \in H^1(X; \mathbb{R})$, так что окрестности бесконечности определены как выше.

ТЕОРЕМА 6. Пусть X – конечный связный клеточный комплекс и класс $\xi \in H^1(X; \mathbb{R})$ – ненулевой. Пусть $k \geq 2$. Если $\xi \in \Sigma^2(\pi_1(X)) \cap \Sigma^k(X, \mathbb{Z})$, то $\xi \in \Sigma^k(X)$.

Эта теорема вытекает из следующих двух лемм.

ЛЕММА 1. Пусть X – конечный связный клеточный комплекс, и пусть $\xi \in H^1(X; \mathbb{R})$ – ненулевой класс. Если $\xi \in \Sigma^2(\pi_1(X))$, то $\{\pi_2(\tilde{X}, N)\}$ и $\{H_2(\tilde{X}, N)\}$ являются изоморфными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$\text{Im}(\pi_2(\tilde{X}, N_i) \rightarrow \pi_2(\tilde{X}, N_{i-\lambda})) = \text{Im}(\pi_2(\tilde{X}) \rightarrow \pi_2(\tilde{X}, N_{i-\lambda})),$$

если любая окружность в N_i ограничивает диск в $N_{i-\lambda}$, в частности, образы являются абелевыми. Поскольку $\xi \in \Sigma^2(\pi_1(X))$, можно определить гомоморфизм $\pi_2(\tilde{X}, N_i) \rightarrow H_2(\tilde{X}, N_{i-\lambda})$ как в стандартном доказательстве классической теоремы Гуревича (после возможного увеличения λ). См., например, [23]. Детали оставляем читателю.

ЛЕММА 2. Пусть X – конечный связный клеточный комплекс и класс $\xi \in H^1(X; \mathbb{R})$ – ненулевой. Если $k \geq 3$ и $\xi \in \Sigma^{k-1}(X)$, то $\{\pi_k(\tilde{X}, N)\}$ и $\{H_k(\tilde{X}, N)\}$ изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство аналогично доказательству леммы 1, но проще, поскольку мы можем определить гомоморфизм напрямую.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Теорема 6 также следует из теорем Латура 5.10 и 5.3 в [11].

6. Свойство функториальности

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть X и Y – конечные клеточные комплексы, и пусть $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow X$ – такие отображения, что $fg \simeq \text{id}_Y$. Тогда для любого $k \geq 0$ имеем

$$(f^*)^{-1}(\Sigma^k(X)) \subset \Sigma^k(Y), \quad (f^*)^{-1}(\Sigma^k(X, \mathbb{Z})) \subset \Sigma^k(Y, \mathbb{Z}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы дадим доказательство для гомотопического инварианта $\Sigma^k(Y)$. Выберем поднятия $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ и $\tilde{g}: \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}$ такие, что $\tilde{f}\tilde{g} \simeq \text{id}_{\tilde{Y}}$ эквивариантно. Пусть $\xi \in S(Y)$ удовлетворяет $f^*(\xi) \in \Sigma^k(X)$. Пусть $h_\xi: \tilde{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ – функция высоты. Тогда $h_\xi \circ \tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{R}$ является функцией высоты для $f^*\xi$.

В силу кокомпактности существует такое $C \geq 0$, что $|h_\xi(\tilde{f}\tilde{g}(\tilde{y})) - h_\xi(\tilde{y})| \leq C$ для любого $\tilde{y} \in \tilde{Y}$.

По предположению, предложению 2 и замечанию 1, существует эквивариантная гомотопия $\tilde{H}: \tilde{X}^{(k)} \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$, начинающаяся с вложения и такая, что $h_\xi \tilde{f}(H(\tilde{x}, 1)) - h_\xi \tilde{f}(\tilde{x}) \geq C + 1$ для всех $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Следовательно,

$$h_\xi \tilde{f}(H(\tilde{g}(\tilde{y}), 1)) - h_\xi(\tilde{y}) \geq 1.$$

Комбинируя $\tilde{f}H(\tilde{g}, \cdot)$ с гомотопией $\tilde{f}\tilde{g} \simeq \text{id}_{\tilde{Y}}$, получаем, что $\xi \in \Sigma^k(Y)$. Предложение 6 доказано.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть X и Y – конечные связные клеточные комплексы и $h: X \rightarrow Y$ – гомотопическая эквивалентность. Тогда $h^*(\Sigma^k(Y)) = \Sigma^k(X)$ и $h^*(\Sigma^k(Y, \mathbb{Z})) = \Sigma^k(X, \mathbb{Z})$ для всех $k \geq 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть X и Y – конечные клеточные комплексы, и пусть $f: X \rightarrow Y$ m -связно для $m \geq 1$. Тогда

$$(f^*)^{-1}(\Sigma^k(X)) \subset \Sigma^k(Y), \quad (f^*)^{-1}(\Sigma^k(X, \mathbb{Z})) \subset \Sigma^k(Y, \mathbb{Z})$$

для всех $k \leq m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Добавим к пространству X клетки в размерностях $\geq m + 1$, чтобы получить (возможно, бесконечный) клеточный комплекс X' , содержащий X и такой, что f продолжается до гомотопической эквивалентности $f': X' \rightarrow Y$. Пусть $g: Y \rightarrow X'$ – обратная клеточная гомотопия. Тогда $g(Y^{(m)}) \subset X$. Если $f^*(\xi) \in \Sigma^k(X)$, то гомотопию $H: \tilde{X}^{(k)} \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ можно использовать так же, как и в доказательстве предложения 6, чтобы показать, что $\xi \in \Sigma^k(Y)$ при $k \leq m$. Предложение 7 доказано.

ПРИМЕР 2. Пусть X – конечный связный клеточный комплекс и $f: X \rightarrow X$ – некоторое отображение. Тором этого отображения M_f называется факторпространство $M_f = X \times [0, 1]/\sim$, где $(x, 0) \sim (f(x), 1)$. Существует естественное отображение $g: M_f \rightarrow \mathbb{S}^1$, заданное равенством $g([x, t]) = \exp\{2\pi it\}$. Пусть

$$\xi = [g] \in [M_f, \mathbb{S}^1] = H^1(M_f; \mathbb{Z}) \subset H^1(M_f; \mathbb{R}).$$

Гомотопия $h: M_f \times [0, 1] \rightarrow M_f$, заданная следующим образом:

$$H([x, t], s) = \begin{cases} [x, t - s], & t \geq s, \\ [f(x), 1 + t - s], & t \leq s, \end{cases}$$

показывает, что $-\xi \in \Sigma^k(M_f)$ для всех $k \geq 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть X – конечный связный клеточный комплекс и $\xi \in H^1(X; \mathbb{Z})$ – ненулевой класс. Пусть $q: \bar{X} \rightarrow X$ – бесконечное циклическое накрытие, соответствующее $\text{Ker } \xi$. Предположим, что $\bar{X}$ гомотопически эквивалентно цепному комплексу Y с конечным k -остовом. Тогда $\pm \xi \in \Sigma^k(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h: \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}$ индуцировано функцией высоты $h_\xi: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{R}$ и $\zeta: \bar{X} \rightarrow \bar{X}$ – накрывающая трансляция с $h\zeta(x) > h(x)$ для всех $x \in \bar{X}$. Пусть $a: Y \rightarrow \bar{X}$ и $b: \bar{X} \rightarrow Y$ являются взаимно обратными гомотопическими эквивалентностями. Тогда существует гомотопическая эквивалентность $g: M_{b\zeta a} \rightarrow X$, заданная как

$$M_{b\zeta a} \simeq M_{\zeta ab} \simeq M_\zeta \simeq X,$$

где последняя гомотопическая эквивалентность задана как $[\bar{x}, t] \rightarrow q(\bar{x})$ для $\bar{x} \in \bar{X}$.

Можно предположить, что $b\zeta a: Y \rightarrow Y$ отображает k -остов в k -остов. Пусть $\varphi: Y^{(k)} \rightarrow Y^{(k)}$ – ограничение $b\zeta a$ на $Y^{(k)}$. Индуцированное отображение $M_\varphi \rightarrow M_{b\zeta a}$ является k -связным, и поэтому существует k -связное отображение $f: M_\varphi \rightarrow X$. В силу примера 2 верно включение $-f^*(\xi) \in \Sigma^k(M_\varphi)$. Из предложения 7 следует, что $-\xi \in \Sigma^k(X)$. Для получения $\xi \in \Sigma^k(X)$ заменим ζ на ζ^{-1} . Предложение 8 доказано.

В следующем разделе мы покажем, что имеет место и утверждение, обратное к предложению 8.

7. Результаты доминирования для накрывающих пространств

Пусть X – конечный связный клеточный комплекс и $q: \bar{X} \rightarrow X$ – регулярное накрытие с абелевой группой монодромии $\pi_1(X)/\pi_1(\bar{X})$. Тогда мы определяем

$$S(X, \bar{X}) = \{\xi \in S(X) \mid q^*\xi = 0\}.$$

В частности, если $\bar{X}$ универсальное абелево накрытие пространства X , то $S(X, \bar{X}) = S(X)$. Более общим образом, $S(X, \bar{X})$ является $(d-1)$ -мерной сферой, где d – ранг конечно порожденной абелевой группы $\pi_1(X)/\pi_1(\bar{X})$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть X – конечный связный клеточный комплекс, и пусть $q: \bar{X} \rightarrow X$ – регулярное накрытие с абелевой группой монодромии $\pi_1(X)/\pi_1(\bar{X})$. Если $k \geq 1$, то следующие условия эквивалентны:

- 1) $\bar{X}$ гомотопически эквивалентно пространству с конечным k -остовом;
- 2) $S(X, \bar{X}) \subset \Sigma^k(X)$.

Более того, если $S(X, \bar{X}) \subset \Sigma^{\dim X}(X)$, то $\bar{X}$ является конечно доминируемым.

Мы получим теорему 7 из ее более общей версии для цепных комплексов, которая является обобщением теоремы В из [9]. Чтобы получить другое доказательство импликации 1) $\implies$ 2), можно использовать технику из [24; теорема 3.2].

Если N – нормальная подгруппа группы G с абелевым фактором G/N , то

$$S(G, N) = \{\xi \in S(G) \mid N \leq \text{Ker } \xi\}.$$

ТЕОРЕМА 8. Пусть C – свободный $\mathbb{Z}G$ -цепной комплекс с конечным числом образующих в каждой размерности $i \leq n$ и N – такая нормальная подгруппа группы G , что факторгруппа G/N абелева. Тогда C имеет конечный n -тип над $\mathbb{Z}N$ в том и только том случае, когда $S(G, N) \subset \Sigma^n(C)$.

Согласно работам [25], [26], теорема 7 следует из теоремы 8.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть C имеет конечный n -тип над $\mathbb{Z}N$. Пусть $\xi \in S(G, N)$, обозначим $Q = G/N$. Тогда ξ индуцирует гомоморфизм, также обозначаемый через ξ , $\xi: Q \rightarrow \mathbb{R}$. Поскольку $\mathbb{Z}G$ является свободной над $\mathbb{Z}N$, то существует эквивалентность цепных комплексов $f: P \rightarrow C$ над $\mathbb{Z}N$, где P_j конечно порожденные модули для всех $j \leq n$. Тогда из $f: \mathbb{Z}G_\xi \otimes_{\mathbb{Z}N} P \rightarrow \mathbb{Z}G_\xi \otimes_{\mathbb{Z}N} C$ видно, что $\mathbb{Z}G_\xi \otimes_{\mathbb{Z}N} C$ имеет конечный n -тип над $\mathbb{Z}G_\xi$. Кроме того, $\mathbb{Z}G_\xi \otimes_{\mathbb{Z}N} C \cong \mathbb{Z}Q_\xi \otimes C$, где в цепном комплексе справа $\mathbb{Z}G_\xi$ действует диагонально. Изоморфизм задается отображением $g \otimes c \mapsto \pi(g) \otimes gc$, где $\pi: G \rightarrow Q$ является проекцией. Согласно [9; лемма 5.2], существует свободная резольвента $E_* \rightarrow \mathbb{Z}$ над $\mathbb{Z}Q_\xi$, которая конечно порождена в каждой размерности. Следовательно, каждый $E_p \otimes C$ имеет конечный n -тип над $\mathbb{Z}G_\xi$. Пусть $f: P_{pq} \rightarrow E_p \otimes C_q$ – соответствующее цепное отображение; заметим, что P_{pq} – положительная степень $\mathbb{Z}G_\xi \otimes_{\mathbb{Z}N} P_q$, зависящая от ранга E_p . Поскольку C – свободный над $\mathbb{Z}N$, то $\mathbb{Z}Q_\xi \otimes C \cong \mathbb{Z}G_\xi \otimes_{\mathbb{Z}N} C$ является свободным над $\mathbb{Z}G_\xi$, и можно предположить, что f является цепной гомотопической эквивалентностью с обратным отображением $g_q: E_p \otimes C_q \rightarrow P_{pq}$. Обозначим через $L: E_p \otimes C_q \rightarrow E_p \otimes C_{q+1}$ цепную гомотопию $L: fg \simeq 1$.

Для $k \geq 0$ определим $F^k: P_{pq} \rightarrow E_{p-k} \otimes C_{q+k}$ формулой

$$F^k = (Ld)^k f,$$

где $d: E_p \rightarrow E_{p-1}$ – граница резольвенты. Определим $K^i: P_{pq} \rightarrow P_{p-iq-1+i}$ формулой

$$K^i = gdF^{i-1}$$

для $i \geq 1$. Положим $K^0 = \partial: P_{pq} \rightarrow P_{p-1q}$.

ЛЕММА 3. Пусть ∂ обозначает границы $\partial: P_{pq} \rightarrow P_{pq-1}$ и $\partial: E_p \otimes C_q \rightarrow E_p \otimes C_{q-1}$. Тогда $\partial F^0 = F^0 \partial$ и для любого $m \geq 1$ имеем

$$\partial F^m + (-1)^{m+1} F^m \partial = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k F^k K^{m-k} - dF^{m-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно получается по индукции.

ЛЕММА 4. Для $m \geq 0$ имеем

$$\sum_{s=0}^m (-1)^s K^{m-s} K^s = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $m = 0$ это означает, что $\partial \partial = 0$, поэтому допустим, что наше утверждение верно для $m \geq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{m+1} (-1)^s K^{m-s} K^s &= g d F^m \partial + (-1)^{m+1} \partial g d F^m + \sum_{s=1}^m (-1)^s K^{m-s} K^s \\ &= (-1)^{m+1} \left(g d \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k F^k K^{m-k} - g d d F^{m-1} \right) \\ &\quad + \sum_{s=1}^m (-1)^s g d F^{m-s-1} K^s = 0 \end{aligned}$$

согласно лемме 3 и поскольку $dd = 0$. Лемма 4 доказана.

Определим цепной комплекс TP формулой $TP_k = \bigoplus_{p+q=k} P_{pq}$ и $\delta: TP_k \rightarrow TP_{k-1}$ формулой

$$\delta = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s K^s,$$

где $(-1)^s$ связано с P_{pk-s} . Из леммы 4 получаем $\delta \delta = 0$. Определим также $TE_k = \bigoplus_{p+q=k} E_p \otimes C_q$ с дифференциалом $\delta = (-1)^p (\partial + d)$. Мы получаем цепной комплекс $F: TP \rightarrow TE$, полагая

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k F^k.$$

Тогда, как следует из лемм 3 и 4, F является цепным отображением.

Используя фильтрации

$$(TP^{(m)})_k = \bigoplus_{p+q=k, p \leq m} P_{pq} \quad \text{и} \quad (TE^{(m)})_k = \bigoplus_{p+q=k, p \leq m} E_p \otimes C_q,$$

видим, что F индуцирует гомотопическую цепную эквивалентность

$$\bar{F}: TP^{(m)}/TP^{(m-1)} \rightarrow TE^{(m)}/TE^{(m-1)},$$

и из стандартных аргументов спектральных последовательностей следует, что F является гомотопической цепной эквивалентностью. Аналогичное рас-

суждение дает гомологическую эквивалентность TE и C . Поскольку TP_k – свободный конечно порожденный модуль над $\mathbb{Z}G_\xi$, получаем, что C имеет конечный n -тип над $\mathbb{Z}G_\xi$.

Далее, предположим, что $S(G, N) \subset \Sigma^n(C)$.

Пусть X_i является конечным $\mathbb{Z}G$ -базисом в множестве C_i , $i \leq n$. Для $c \in C_i$ можно написать

$$c = \sum_{j=1}^{m_i} n_j^i x_j^i, \quad n_j^i \in \mathbb{Z}G, \quad \partial c = \sum_{j=1}^{m_{i-1}} n_j^{i-1} x_j^{i-1}$$

(здесь x_j^i обозначают элементы множества X_i). Для $y \in \mathbb{Z}G$ определим $\text{supp } y$ как элементы G с ненулевыми коэффициентами, а для $c \in C_i$ положим

$$\text{supp } c = \bigcup_{j=1}^{m_i} \text{supp } n_j^i \cup \bigcup_{j=1}^{m_{i-1}} \text{supp } n_j^{i-1}.$$

В частности, $\text{supp } \partial c \subset \text{supp } c$. Носитель зависит от выбора базиса, но мы фиксируем базис раз и навсегда.

Обозначим $\pi: G \rightarrow G/N = Q$. Выбирая внутреннее произведение в $Q_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \otimes Q$, мы получаем норму $\|\cdot\|$ в $Q_{\mathbb{R}}$ и можем рассматривать $S(G, N) \subset Q_{\mathbb{R}}$ как единичную сферу в этом нормированном векторном пространстве. Продолжим эту норму на C , положив

$$\|c\| = \begin{cases} \max\{\|\pi(g)\| \mid g \in \text{supp } c\}, & c \neq 0, \\ 0, & c = 0. \end{cases}$$

Заметим, что мы полагаем $\|0\| = 0$ – вопреки равенству $\|0\| = -\infty$ из [9]. Для $\xi \in S(G, N) \subset Q_{\mathbb{R}}$ мы также получаем v_ξ , полагая

$$v_\xi(c) = \begin{cases} \min\{\langle \pi(g), \xi \rangle \mid g \in \text{supp } c\}, & c \neq 0, \\ \infty, & c = 0. \end{cases}$$

Для $a, b \in C$ положим

$$\text{diam}(a, b) = \max\{\|\pi(g) - \pi(h)\| \mid g \in \text{supp } a, h \in \text{supp } b\},$$

считая, что $\text{diam}(a, b) = 0$, если a или b есть нуль. Наконец, для $r > 0$ и $c \in C$ положим

$$B_r(c) = \{d \in C \mid \text{diam}(c, d) \leq r\}.$$

Пусть $r > 0$ задано. Тогда, поскольку $S(G, N) \subset \Sigma^n(C)$, для любого $\xi \in S(G, N)$ мы можем найти цепное отображение $\varphi^\xi: C \rightarrow C$ и цепную гомотопию $H^\xi: 1 \simeq \varphi^\xi$ такие, что $v_\xi(\varphi^\xi c) - v_\xi(c) \geq 2r$ для всех $c \in C$. Более того, существует такая открытая окрестность U_ξ класса ξ в $S(G, N)$, что

$$v_\eta(\varphi^\xi c) - v_\eta(c) \geq r$$

для всех $\eta \in U_\xi$ и $c \in C_l$, $l \leq n$.

Поскольку $S(G, N)$ компактно, то для покрытия $S(G, N)$ достаточно конечного числа U_ξ ; пусть (U_i, φ^i, H^i) , $i = 1, \dots, k$, – тройки, где $\{U_i\}$ покрывает $S(G, N)$, $\varphi^i: C \rightarrow C$ – цепное отображение такое, что $v_\eta(\varphi^i c) - v_\eta(c) \geq r$ для всех $\eta \in U_i$ и $c \in C_l$, $l \leq n$, и $H^i: 1 \simeq \varphi^i$ – цепная гомотопия.

Поскольку мы имеем дело лишь с конечным числом цепных гомотопий, то существует такое $M \geq 0$, что $v_\eta(c) - v_\eta(H^i c) \leq M$ для всех $\eta \in U_i$ и $c \in C_l$, $l \leq n$. Более того, заменой цепной гомотопии H^i на $H^i - \varphi^i H^i: 1 \simeq (\varphi^i)^2$ можно увеличить $r > 0$ без увеличения $M > 0$. Следовательно, можно предположить, что

$$r > 3Mn. \quad (3)$$

Наконец, существует такое $L > 0$, что

$$\text{diam}(x, x) \leq L, \quad \text{diam}(x, \varphi^i x) \leq L, \quad \text{diam}(x, H^i x) \leq L$$

для всех $i = 1, \dots, k$ и всех $x \in X_l$, $l \leq n$, поскольку условий конечное число.

Заметим, что C является свободным цепным комплексом над $\mathbb{Z}N$ и базис задается следующим образом: $TX_i = \{tx \mid t \in T, x \in X_i\}$, где $T \subset G$ – такое подмножество, что $\pi|_T$ индуцирует биекцию из T на Q .

ЛЕММА 5. Если $S(G, N) \subset \Sigma^n(C)$, то существуют константы $r > 0$, $M > 0$, $A > 0$, а также $\mathbb{Z}N$ -цепное отображение $\psi: C \rightarrow C$ и $\mathbb{Z}N$ -цепная гомотопия $K: 1 \simeq \psi$ такие, что при $m \leq n$ имеем $\psi_m(z) = z$, если $\|z\| \leq A$, а для $tx \in TX_m$ с $\|tx\| > A$ выполнено неравенство

$$\|\psi_m(tx)\| \leq \|tx\| - r.$$

Кроме того, $\|K_m(z)\| \leq \|z\| + M$ для всех $z \in C_m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы определить ψ и K , мы определим их над TX_m . Пусть $r > 0$ и $M > 0$ такие же, как перед леммой 5.

ЛЕММА 6. Пусть $tx \in TX_m$ и $\|tx\| \geq \max\{3r/4 + L^2/r, L^2/M\}$. Пусть i такое, что $\xi_t/\|\xi_t\| \in U_i$, где $\xi_t(g) = \langle \pi(g), \pi(t) \rangle$ для $g \in G$. Тогда

$$\|\varphi^i(tx)\| \leq \|tx\| - \frac{1}{2}r, \quad \|H^i(tx)\| \leq \|tx\| + \frac{3}{2}M.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для $g \in \text{supp } tx$ выполнено равенство $\|\pi(g)\| = \|tx\|$. Поскольку $\text{diam}(tx, \varphi^i(tx)) \leq L$, то для $h \in \text{supp } \varphi^i(tx)$

$$\begin{aligned} \|\pi(h)\|^2 &\leq (\|\pi(g)\| - r)^2 + L^2 = \|\pi(g)\|^2 - 2r\|\pi(g)\| + r^2 + L^2 \\ &\leq \|\pi(g)\|^2 - r\|\pi(g)\| - \frac{3}{4}r^2 - L^2 + r^2 + L^2 = \left(\|\pi(g)\| - \frac{r}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Следовательно, $\|\varphi^i(tx)\| \leq \|tx\| - r/2$. Аналогично, используя неравенство $\|\pi(g)\| \geq L^2/M$, получаем $\|H^i(tx)\| \leq \|tx\| + 3M/2$. Лемма 6 доказана.

Если $\|tx\| > L$, то $\pi(\text{supp } tx) \subset Q_{\mathbb{R}} - \{0\}$. Обозначим через $p: Q_{\mathbb{R}} - \{0\} \rightarrow S(G, N)$ стандартную ретракцию. Используя число Лебега накрытия $U_1 \cup \dots \cup U_k$, можно найти такую константу $A' > 0$, что из $\|tx\| > A'$ следует

$$p(\pi(\text{supp } B_{L'}(tx))) \subset U_i \quad (4)$$

для некоторого i , где $L' = \max\{3r/4 + L^2/r, L^2/M\} + (2n+1)L$. Пусть $A = A' + L'$.

Определим $K_0: C_0 \rightarrow C_1$ формулами $K_0(tx) = 0$ при $\|tx\| \leq A$ и $K_0(tx) = H_0^i(tx)$ при $\|tx\| > A$, где i – наименьшее число, удовлетворяющее (4). Определим также $\psi_0: C_0 \rightarrow C_0$ следующим образом:

$$\psi_0(tx) = \begin{cases} tx, & \text{если } \|tx\| \leq A, \\ \varphi^i(tx), & \text{если } \|tx\| > A, \end{cases}$$

где i – опять наименьшее число, для которого имеет место (4). Отсюда следует, что $\partial K_0 = 1 - \psi_0$. Из леммы 6 получаем

$$\|\psi_0(tx)\| \leq \|tx\| - \frac{r}{2}, \quad \|K_0(tx)\| \leq \|tx\| + \frac{3}{2}M$$

при $\|tx\| > A$. Кроме того,

$$\text{diam}(\psi_0(tx), tx) \leq L, \quad \text{diam}(K_0(tx), tx) \leq L$$

для всех базисных элементов tx .

Предположим по индукции, что для всех $j \leq m-1$ при $m \leq n$ мы имеем $K_j: C_j \rightarrow C_{j+1}$ и $\psi_j: C_j \rightarrow C_j$ такие, что

$$\partial K_j + K_{j-1}\partial = 1 - \psi_j$$

и

$$\|\psi_j(tx)\| \leq \|tx\| - \frac{r}{2} + j \frac{3}{2}M, \quad (5)$$

$$\|K_j(tx)\| \leq \|tx\| + \frac{3}{2}M(j+1) \quad (6)$$

при $\|tx\| > A$ и

$$\text{diam}(\psi_j(tx), tx) \leq (2j+1)L, \quad (7)$$

$$\text{diam}(K_j(tx), tx) \leq (2j+1)L \quad (8)$$

для всех базисных элементов tx .

Тогда определим $K_m: C_m \rightarrow C_{m+1}$ формулами $K_m(tx) = 0$ при $\|tx\| \leq A$ и

$$K_m(tx) = H_m^i(tx) - H_m^i K_{m-1}\partial(tx)$$

при $\|tx\| > A$, где i удовлетворяет (4). Непосредственная проверка показывает, что

$$(\partial K_m + K_{m-1}\partial)(tx) = tx - \varphi_m^i(tx) + \varphi_m^i(K_{m-1}\partial tx) - H_{m-1}^i \psi_{m-1}\partial tx$$

для $\|tx\| > A$. Следовательно, можно определить $\psi_m: C_m \rightarrow C_m$ как $\psi_m(tx) = tx$ при $\|tx\| \leq A$ и

$$\psi_m(tx) = \varphi_m^i(tx) - \varphi_m^i(K_{m-1}\partial tx) + H_{m-1}^i \psi_{m-1}\partial tx,$$

если $\|tx\| > A$. Тогда $\partial K_m + K_{m-1}\partial = 1 - \psi_m$. Поскольку

$$\begin{aligned} & \|\varphi_m^i(tx) - \varphi_m^i(K_{m-1}\partial tx) + H_{m-1}^i \psi_{m-1}\partial tx\| \\ & \leq \max\{\|\varphi_m^i(tx)\|, \|\varphi_m^i(K_{m-1}\partial tx)\|, \|H_{m-1}^i \psi_{m-1}\partial tx\|\}, \end{aligned}$$

легко видеть, что (5) имеет место при $j = m$. Здесь мы используем тот факт, что $\text{diam}(K_{m-1}\partial tx, tx) \leq (2m-1)L + L$ и, следовательно, лемма 6 применима ко всем базисным элементам, оказывающимся в $K_{m-1}\partial tx$ в силу выбора A .

Аналогично, оценки (6)–(8) верны при $j = m$. При $m > n$ положим $K_m = 0$ и определим ψ_m так, что

$$\partial K_m + K_{m-1}\partial = 1 - \psi_m.$$

Поскольку тождественное отображение является цепным, мы получаем, что ψ – цепное отображение. Заменяя r на $r/2 - 3nM/2$ и M на $3M(n+1)/2$, мы получим лемму 5. Заметим, что новое r строго больше нуля согласно (3).

ЛЕММА 7. *Если $S(G, N) \subset \Sigma^n(C)$, то существуют свободный цепной комплекс D над $\mathbb{Z}N$, у которого все D_i конечно порождены при $i \leq n$, и $\mathbb{Z}N$ -цепные отображения $a: D \rightarrow C$, $b: C \rightarrow D$ такие, что ab цепно-гомотопно тождественному отображению на C . Кроме того, можно считать, что $a: D_i \rightarrow C_i$ является вложением при $i \leq n$ и $D_i = C_i$ при $i > n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r, M, A > 0$, ψ и K такие же, как в лемме 5. Если l положительное целое число, $B \geq 0$ и $z \in C_m$ при $m \leq n$, то

$$\|\psi^l(z)\| \leq A + B, \quad \text{если } \|z\| \leq A + lr + B. \quad (9)$$

Определим цепную гомотопию $\Phi: C \rightarrow C_{+1}$ над $\mathbb{Z}N$ следующим образом. При $s \leq n$ положим

$$\Phi_s(tx) = \sum_{j=0}^l K_s \psi^j tx - K_s \psi^j \Phi_{s-1} \partial tx,$$

где l – такое целое число, что $\|tx\| \in (A + lr, A + (l+1)r]$, а при $s > n$ мы просто положим $\Phi_s = 0$. Мы получаем $\mathbb{Z}N$ -цепное отображение $\zeta: C \rightarrow C$, полагая $\zeta = 1 - \partial\Phi - \Phi\partial$. В частности, отображение ζ цепно-гомотопически эквивалентно тождественному.

Используя индукцию, мы видим, что

$$\|\Phi_s(tx)\| \leq \|tx\| + (s+1)M \quad \text{при } s \leq n-1.$$

Отсюда следует неравенство

$$\|\Phi_s(z)\| \leq \|z\| + (s+1)M$$

для всех $z \in C_s$.

Мы утверждаем, что при $s \leq n$ имеет место неравенство

$$\|\zeta(z)\| \leq A + sM \quad (10)$$

для всех $z \in C_s$.

При $s = 0$ это верно согласно (9), поскольку $\zeta(tx) = \psi^{l+1}(tx)$, если $\|tx\| \in (A + lr, A + (l+1)r]$.

Заметим, что

$$\begin{aligned}
 (\partial\Phi_s + \Phi_{s-1}\partial)(tx) &= \sum_{j=0}^l (K_s\psi^j tx - K_s\psi^j \Phi_{s-1}\partial tx) + \Phi_{s-1}\partial(tx) \\
 &= \sum_{j=0}^l (\partial K_s\psi^j + K_{s-1}\partial\psi^j)(tx) - \sum_{j=0}^l (\partial K_s\psi^j \Phi_{s-1} + K_{s-1}\partial\psi^j \Phi_{s-1})(\partial tx) \\
 &\quad + \sum_{j=0}^l (K_{s-1}\psi^j \partial\Phi_{s-1}\partial tx - K_{s-1}\partial\psi^j tx) + \Phi_{s-1}\partial tx \\
 &= tx - \psi^{l+1}tx - \Phi_{s-1}\partial tx + \psi^{l+1}\Phi_{s-1}\partial tx \\
 &\quad - \sum_{j=0}^l K_{s-1}\partial\psi^j tx + \Phi_{s-1}\partial tx + \sum_{j=0}^l (K_{s-1}\psi^j \partial tx - K_{s-1}\psi^j \zeta \partial tx) \\
 &= tx - \psi^{l+1}tx + \psi^{l+1}\Phi_{s-1}\partial tx - \sum_{j=0}^l K_{s-1}\psi^j \zeta \partial tx.
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\zeta_s(tx) = \psi^{l+1}tx - \psi^{l+1}\Phi_{s-1}\partial tx + \sum_{j=0}^l K_{s-1}\psi^j \zeta_{s-1}\partial tx.$$

Используя индукцию, мы получаем, снова ввиду (9), что (10) имеет место.

Определим цепной комплекс D следующим образом:

$$D_s = \{z \in C_s \mid \|z\| \leq A + nM\}$$

при $s \leq n$; при $s > n$ положим $D_s = C_s$. Граничное отображение $\partial_D: D_{n+1} \rightarrow D_n$ задается формулой $\partial_D = \zeta \circ \partial_C$. Мы можем определить цепное отображение $b: C \rightarrow D$ как ζ при $s \leq n$ и тождественное отображение при $s > n$, а цепное отображение $a: D \rightarrow C$ как вложение при $s \leq n$ и ζ при $s > n$. Тогда отображение $ab = \zeta: C \rightarrow C$ цепно-гомотопно тождественному. Поскольку только конечное число $q \in Q$ удовлетворяют неравенству $\|q\| \leq A + nM$, мы получаем, что D_s является конечно порожденным свободным модулем над $\mathbb{Z}N$ (ср. [9; п. 5.4]). Это завершает доказательство леммы 7.

Для завершения доказательства теоремы 8 заметим, что согласно лемме 7 цепной комплекс C доминируется над $\mathbb{Z}N$ цепным комплексом D с конечно порожденными свободными модулями D_i при $i \leq n$. По стандартной конструкции (ср. [27; § 3] или [26]), существует $\mathbb{Z}N$ -цепной комплекс E , цепно-гомотопически эквивалентный C , такой, что E_i являются конечно порожденными модулями при $i \leq n$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть C – конечно порожденный свободный $\mathbb{Z}G$ -цепной комплекс с $C_i = 0$ при $i > n$. Тогда C цепно-гомотопически эквивалентен конечно порожденному проективному $\mathbb{Z}N$ -цепному комплексу D , в котором $D_i = 0$ при $i > n$ тогда и только тогда, когда $S(G, N) \subset \Sigma^n(C)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если C цепно-гомотопически эквивалентен над $\mathbb{Z}N$ конечно порожденному $\mathbb{Z}N$ -комплекс, то он имеет, по определению, конечный n -тип над $\mathbb{Z}N$, следовательно, $S(G, N) \subset \Sigma^n(C)$ по теореме 8.

Если $S(G, N) \subset \Sigma^n(C)$, то по лемме 7 существует цепной комплекс D' , конечно порожденный и свободный над $\mathbb{Z}N$ с $D'_i = 0$ при $i > n$, который доминирует C . Согласно [27; предложение 3.1], требуемый цепной комплекс D существует.

8. Подвижность гомологических классов

Напомним, что, согласно предложению 5, свойство зануления гомологий Новикова–Сикорава в случае универсального накрытия определяется инвариантом $\Sigma^k(X, \mathbb{Z})$. Сейчас мы хотим более подробно рассмотреть случаи других накрытий, в частности накрытий абелевой группой монодромии.

В этом разделе R – кольцо, хотя в основном мы будем иметь в виду случай $R = \mathbb{Z}$ или $R = \mathbf{k}$, где $\mathbf{k}$ – поле.

Пусть $p: \bar{X} \rightarrow X$ – регулярное накрытие, где X – опять конечный связный клеточный комплекс. Введем обозначение $G = \pi_1(X)/\pi_1(\bar{X})$. Напомним, что $S(X, \bar{X})$ состоит из таких $\xi \in S(X)$, что $p^*\xi = 0$. Для такого класса ξ можно определить функцию высоты $h: \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}$ и окрестности $N \subset \bar{X}$ бесконечности относительно ξ , как в случае универсального накрытия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Будем говорить, что класс гомологий $z \in H_q(\bar{X}; R)$ является *удаляемым на бесконечность в $\bar{X}$ относительно $\xi \in S(X, \bar{X})$* , если z можно реализовать сингулярным циклом в любой окрестности N бесконечности относительно ξ .

Другими словами, $z \in H_q(\bar{X}; R)$ является удаляемым на бесконечность относительно ξ , если z является элементом

$$\bigcap_N \text{Im}(H_q(N; R) \rightarrow H_q(\bar{X}; R)),$$

где пересечение берется по всем окрестностям бесконечности относительно ξ .

Заметим, что мы имеем обратную систему R -модулей

$$\{H_q(\bar{X}, N; R) \leftarrow H_q(\bar{X}, N'; R)\},$$

которая пробегает все окрестности $N' \subset N$ бесконечности относительно ξ . Следовательно, z является удаляемым на бесконечность относительно ξ тогда и только тогда, когда

$$z \in \text{Ker}(H_q(\bar{X}; R) \rightarrow \varprojlim H_q(\bar{X}, N; R)).$$

Так же, как и для целочисленных коэффициентов, мы можем определить кольцо Новикова–Сикорава $\widehat{RG}_\xi$ с коэффициентами в произвольном кольце R . Поскольку это кольцо представляется как обратный предел, стандартные методы дают следующую точную последовательность:

$$0 \rightarrow \varprojlim^1 H_{q+1}(\bar{X}, N; R) \rightarrow H_q(X; \widehat{RG}_{-\xi}) \rightarrow \varprojlim H_q(\bar{X}, N; R) \rightarrow 0 \quad (11)$$

(см. [22] или [16] для более детального ознакомления).

Дадим простой критерий для проверки удаляемости класса $z \in H_i(\bar{X}; R)$ на бесконечность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Будем говорить, что элемент $\Delta \in RG$ имеет ξ -минимальный коэффициент 1, если $\Delta = 1 - y$, где $y = \sum a_j g_j \in RG$ и каждый $g_j \in G$ удовлетворяет неравенству $\xi(g_j) > 0$.

Такое Δ обратимо над $\widehat{RG}_{-\xi}$. Следовательно, если $\Delta \cdot z = 0 \in H_q(\bar{X}; R)$, мы получаем, что образ z в $H_q(X; \widehat{RG}_{-\xi})$ нулевой, и, согласно (11), z является удаляемым на бесконечность. При некоторых условиях свойство “ Δ имеет ξ -минимальный коэффициент 1” является необходимым для удаляемости на бесконечность. Следующая теорема взята из [22], [28].

ТЕОРЕМА 9. Пусть X – конечный связный клеточный комплекс, и пусть $p: \bar{X} \rightarrow X$ – регулярное накрытие с группой монодромии $G \cong \mathbb{Z}^r$. Предположим, что $\xi \in S(X, \bar{X})$ индуцирует инъективный гомоморфизм $G \rightarrow \mathbb{R}$ и R – кольцо $\mathbb{Z}$ или поле. При $z \in H_q(\bar{X}; R)$ следующие условия равносильны:

- 1) z удаляем на бесконечность относительно ξ ;
- 2) $i_*(z) = 0 \in H_q(X; \widehat{RG}_{-\xi})$, где $i_*: H_q(\bar{X}; R) \cong H_q(X; RG) \rightarrow H_q(X; \widehat{RG}_{-\xi})$ является заменой коэффициентов;
- 3) существует элемент $\Delta \in RG$ с ξ -минимальным коэффициентом 1 такой, что $\Delta \cdot z = 0$.

Когда кольцо R является полем, условие 3) эквивалентно существованию ненулевого $\Delta \in RG$ с $\Delta \cdot z = 0 \in H_q(\bar{X}; R)$, поскольку мы можем найти такие $r \in R$ и $g \in G$, что $\Delta \cdot rg$ имеет ξ -минимальный коэффициент 1.

Заметим, что свойство “ $\Delta \in RG$ имеет ξ -минимальный коэффициент 1” является открытым свойством в $\xi \in S(X, \bar{X})$; в частности, если z удаляем на бесконечность относительно ξ , то при условиях теоремы 9 он также удаляем на бесконечность относительно близких ξ' .

Эквивалентность условий 1) и 2) будет доказана, если показать, что член $\varprojlim^1$ в (11) нулевой. Это сделано в [22], [28] в условиях теоремы 9. Используя [29; теорема 1.3], можно показать, что член $\varprojlim^1$ в (11) на самом деле обращается в нуль для любого абелева накрытия и любого нётерова кольца R .

Теорема 9 является важным элементом для получения нижней оценки $\text{cat}(X, \xi)$ и $\text{cat}^1(X, \xi)$ через произведения. Подробности см. в [30], [28].

9. Функциональное пространство путей в бесконечность

Если $\gamma: [0, \infty) \rightarrow X$ – отображение, то мы можем поднять его на универсальное накрытие, $\tilde{\gamma}: [0, \infty) \rightarrow \tilde{X}$. Мы хотим найти отображения, которые при поднятии дают пути в бесконечность относительно заданного класса ξ (ср. определение 7). Это не зависит от конкретного поднятия отображения γ .

Введем множество

$$\mathcal{C}_\xi(X) = \{\gamma: [0, \infty) \rightarrow X \mid \tilde{\gamma} \text{ – путь в бесконечность относительно } \xi\}.$$

Оно снабжается следующей топологией: для $a, b \in [0, \infty)$ и открытого множества U пространства X положим

$$W(a, b; U) = \{\gamma \in \mathcal{C}_\xi(X) \mid \gamma([a, b]) \subset U\}$$

а при $a, A \in [0, \infty)$ пусть

$$W(a, A) = \{\gamma \in \mathcal{C}_\xi(X) \mid h_\xi \tilde{\gamma}(t) - h_\xi \tilde{\gamma}(0) > A \text{ для любого } t \geq a\}.$$

Эти множества образуют базу топологии на $\mathcal{C}_\xi(X)$. Заметим, что множества $W(a, b; U)$ задают компактно-открытую топологию на $\mathcal{C}_\xi(X)$, тогда как множества $W(a, A)$ задают “поведение на бесконечности”.

Функция $e: \mathcal{C}_\xi(X) \rightarrow X$, заданная формулой $e(\gamma) = \gamma(0)$, является расслоением, и для $x_0 \in X$ получаем слой

$$\mathcal{M}_\xi = \{\gamma \in \mathcal{C}_\xi(X) \mid \gamma(0) = x_0\}$$

(ср. [11]).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Относительно компактно-открытой топологии слой $\mathcal{M}_\xi$ является стягиваемым. Чтобы доказать это, выберем $\gamma_\infty \in \mathcal{M}_\xi$. Для любого $\gamma \in \mathcal{M}_\xi$ и $t \in [0, \infty)$ зададим $\gamma_t \in \mathcal{M}_\xi$ как

$$\gamma_t(s) = \begin{cases} \gamma_\infty(s), & 0 \leq s \leq t, \\ \gamma_\infty(2t - s), & t \leq s \leq 2t, \\ \gamma(s - 2t), & 2t \leq s. \end{cases}$$

Легко видеть, что отображение $H: \mathcal{M}_\xi \times [0, \infty] \rightarrow \mathcal{M}_\xi$, заданное формулой $H(\gamma, t) = \gamma_t$, является непрерывным в компактно-открытой топологии и, следовательно, задает стягивание. Однако H уже не является непрерывным, если множества $W(a, A)$ открыты в $\mathcal{M}_\xi$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Дадим иную интерпретацию топологии на пространстве $\mathcal{M}_\xi$. Пусть $\tilde{X}_\infty = \tilde{X} \cup \{\infty\}$, т. е. мы добавили к $\tilde{X}$ точку ∞ ; топология на $\tilde{X}_\infty$ задается открытыми множествами пространства $\tilde{X}$ и множествами $N \cup \{\infty\}$, где N – открытая окрестность бесконечности относительно ξ (в смысле раздела 2).

Введем множество

$$\mathcal{P}(\tilde{X}_\infty) = \{\gamma: [0, \infty] \rightarrow \tilde{X}_\infty \mid \gamma(\infty) = \infty\}$$

и снабдим его компактно-открытой топологией. Это обычное пространство путей, где бесконечность ∞ является отмеченной точкой. Пространство $\mathcal{C}_\xi$ путей в бесконечность относительно класса ξ можно отождествить с подпространством в пространстве $\mathcal{P}(\tilde{X}_\infty)$, состоящим из таких путей γ , что $\gamma([0, \infty)) \subset \tilde{X}$. Аналогичным образом, $\mathcal{M}_\xi$ можно отождествить с подпространством пространства $\Omega(\tilde{X}_\infty) = e^{-1}(\{\tilde{x}_0\})$, где $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(\{x_0\}) \subset \tilde{X}$ и $e: \mathcal{P}(\tilde{X}_\infty) \rightarrow \tilde{X}_\infty$ – обычное расслоение. Заметим, что $\mathcal{C}_\xi$ является накрывающим для $\mathcal{C}_\xi(X)$ с группой монодромии $\pi_1(X)$.

Имея $\gamma_0 \in \mathcal{M}_\xi$, мы хотим изучить гомотопические группы $\pi_k(\mathcal{M}_\xi, \gamma_0)$ при $k \geq 0$. Для этого введем отображение $g: (S^k, *) \rightarrow (\mathcal{M}_\xi, \gamma_0)$. Оно поднимается до отображения $\phi_g: S^k \times [0, \infty) \rightarrow X$ по формуле $\phi_g(x, t) = g(x)(t)$, и, поскольку $\phi_g(x, 0) = x_0$, до отображения $\Phi_g: \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow X$ такого, что $\Phi_g(x \cdot t) = \phi(x, t)$ для $x \in S^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$. Если предположить, что $*$ в S^k соответствует $(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{k+1}$, то $\Phi_g(t, 0, \dots, 0) = \gamma_0(t)$. Более того, если поднять Φ_g до отображения

$\tilde{\Phi}_g: \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \tilde{X}$, получим, что $h_\xi \circ \tilde{\Phi}(x) \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow \infty$. Гомотопия между двумя отображениями $g_0, g_1: (S^k, *) \rightarrow (\mathcal{M}_\xi, \gamma_0)$ относительно отмеченной точки соответствует гомотопии $\Phi: \mathbb{R}^{k+1} \times [0, 1] \rightarrow X$ между Φ_{g_0} и Φ_{g_1} относительно $[0, \infty) \times \{0\}$ такой, что $h_\xi \circ \tilde{\Phi}(x, s) \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow \infty$ равномерно по $s \in [0, 1]$ для поднятия $\tilde{\Phi}$.

Предположим, что $(N_i)_{i \geq 0}$ – система окрестностей бесконечности относительно ξ такая, что $N_i \subset N_{i-1}$ для всех i и $\bigcap_{i \geq 0} N_i = \emptyset$. Пусть $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ – поднятие $x_0 \in X$. Пусть также $\tilde{\gamma}_0: [0, \infty) \rightarrow \tilde{X}$ – такое поднятие γ_0 , что $\tilde{\gamma}_0(0) = \tilde{x}_0$. Возьмем последовательность $t_i > 0$ такую, что $t_{i+1} > t_i$ для всех $i \geq 0$ и $\tilde{\gamma}_0(t) \in N_i$ для любого $t \geq t_i$. Такая последовательность существует по определению $\gamma_0 \in \mathcal{M}_\xi$. Пусть

$$y_i = \tilde{\gamma}_0(t_i) \in N_i$$

– последовательность отмеченных точек окрестностей N_i для всех $i \geq 0$. Имеем естественные гомоморфизмы $\chi_i: \pi_k(\tilde{X}, N_{i+1}, y_{i+1}) \rightarrow \pi_k(\tilde{X}, N_i, y_i)$, индуцированные вложениями, где изменение отмеченной точки задается путем $\tilde{\gamma}_0|_{[t_i, t_{i+1}]}$. Они поднимаются на обратную систему $(\chi_i: \pi_k(\tilde{X}, N_{i+1}, y_{i+1}) \rightarrow \pi_k(\tilde{X}, N_i, y_i))$ для всех $k \geq 0$. Заметим, что она является обратной системой с отмеченными точками для всех $k \leq 1$.

Для любых $i \geq 0$ и $k \geq 0$ определим $\varphi_i: \pi_k(\mathcal{M}_\xi, \gamma_0) \rightarrow \pi_{k+1}(\tilde{X}, N_i, y_i)$ следующим образом. Для данного $g: (S^k, *) \rightarrow (\mathcal{M}_\xi, \gamma_0)$ определим $\varphi_g: (D^{k+1}, S^k, *) \rightarrow (\tilde{X}, N_i, y_i)$ формулой $\varphi_g(x \cdot t) = \tilde{\Phi}_g(\lambda(x) \cdot x \cdot t)$ для $x \in S^k$ и $t \in [0, 1]$, где $\lambda: S^k \rightarrow (0, \infty)$ – такое отображение, что $\lambda(*) = t_i$, и для любого $x \in S^k$ имеем $g(x)(t) \in N_i$ при всех $t \geq \lambda(x)$. Очевидно, что гомотопический класс φ_g не зависит от выбора конкретного λ . Мы используем $\tilde{\Phi}_g$ и ограничим его на достаточно большой шар в $\mathbb{R}^{k+1}$.

Это индуцирует отображение $\varphi_i: \pi_k(\mathcal{M}_\xi, \gamma_0) \rightarrow \pi_{k+1}(\tilde{X}, N_i, y_i)$, при этом очевидно, что $\chi_i \varphi_{i+1} = \varphi_i$. Следовательно, мы получаем групповой гомоморфизм

$$\varphi: \pi_k(\mathcal{M}_\xi, \gamma_0) \rightarrow \varprojlim \pi_{k+1}(\tilde{X}, N_i, y_i)$$

для $k \geq 1$ и отображение пространств с отмеченными точками для $k = 0$.

Далее, определим отображение $\psi': \prod_{i \geq 0} \pi_{k+2}(\tilde{X}, N_i, y_i) \rightarrow \pi_k(\mathcal{M}_\xi, \gamma_0)$ и положим $a_i \in \pi_{k+2}(\tilde{X}, N_i, y_i)$. Представим a_i отображением $g_i: (D^{k+2}, S^{k+1}, *) \rightarrow (\tilde{X}, N_i, y_i)$. Далее, пусть $G': \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \tilde{X}$ задано как $G'(x \cdot t) = \tilde{\gamma}_0(t)$ для $x \in S^k$ и $t \in [0, \infty)$. Выберем диски $B(t_i)$ с центрами в точках $(-t_i, 0) \in \mathbb{R}^{k+1}$ настолько малыми, чтобы они попарно не пересекались. Мы используем $(-t_i, 0)$ как центр, поскольку мы хотим изменить G' на $B(t_i)$, не изменяя его на $[0, \infty) \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{k+1}$. Следовательно, мы гомотопируем G' в отображение G относительно $\mathbb{R}^{k+1} - \bigcup B'(t_i)$ так, что G является постоянным $\tilde{\gamma}_0(t_i)$ на $B(t_i)$ для всех $i \geq 0$. Здесь $B'(t_i)$ – чуть бóльшие диски, по-прежнему попарно не пересекающиеся.

Если ограничить отображение g_i на S^{k+1} , его можно рассматривать как отображение $\tilde{g}_i: (D^{k+1}, S^k) \rightarrow (N_i, y_i)$. Теперь мы можем заменить G на такое отображение $\tilde{G}: \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \tilde{X}$, что $\tilde{G}|_{B(t_i)} \equiv \tilde{g}_i$ и $\tilde{G}$ совпадает с G в остальной

части. Очевидно, что $\tilde{G}$ индуцирует отображение $g: (S^k, *) \rightarrow (\mathcal{M}_\xi, \gamma_0)$ и это определяет отображение

$$\psi': \prod_{i \geq 0} \pi_{k+2}(\tilde{X}, N_i, y_i) \rightarrow \pi_k(\mathcal{M}_\xi, \gamma_0).$$

Заметим, что если $g'_i: (D^{k+2}, S^{k+1}, *) \rightarrow (\tilde{X}, N_i, y_i)$ также представляют a_i для любого $i \geq 0$, то $g_i|_{S^{k+1}}$ гомотопны $g'_i|_{S^{k+1}}$ внутри N_i , следовательно, результирующие отображения g и g' задают один и тот же элемент в $\pi_k(\mathcal{M}_\xi, \gamma_0)$. Стоит отметить, что $\tilde{G}$ гомотопно G относительно $[0, \infty) \times \{0\}$, но результирующая функция $H: S^k \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}_\xi$ не обязана быть непрерывной, поскольку g_i являются нуль-гомотопными в $\tilde{X}$, но не обязательно в смысле определения 4.

Напомним определение предела для нашей обратной системы. Две последовательности $(a_i), (b_i) \in \prod_{i \geq 0} \pi_{k+2}(\tilde{X}, N_i, y_i)$ называются эквивалентными, если существует такая последовательность $(c_i) \in \prod_{i \geq 0} \pi_{k+2}(\tilde{X}, N_i, y_i)$, что $b_i = c_i \cdot a_i \cdot \chi_i(c_{i+1})$ для всех $i \geq 0$. Тогда $\varprojlim^1 \pi_{k+2}(\tilde{X}, N_i, y_i)$ является множеством классов эквивалентности. Для $k \geq 1$ оно имеет структуру абелевой группы, но при $k = 0$ имеем только множество с отмеченной точкой.

Легко видеть, что ψ' индуцирует отображение

$$\psi: \varprojlim^1 \pi_{k+2}(\tilde{X}, N_i, y_i) \rightarrow \pi_k(\mathcal{M}_\xi, \gamma_0),$$

которое является гомоморфизмом при $k \geq 1$ и отображением множеств с отмеченной точкой при $k = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *При вышеприведенных обозначениях существует короткая точная последовательность*

$$1 \rightarrow \varprojlim^1 \pi_{k+2}(\tilde{X}, N_i, y_i) \xrightarrow{\psi} \pi_k(\mathcal{M}_\xi, \gamma_0) \xrightarrow{\varphi} \varprojlim \pi_{k+1}(\tilde{X}, N_i, y_i) \rightarrow 1,$$

которая является короткой точной последовательностью абелевых групп при $k \geq 1$ и множеств с отмеченной точкой при $k = 0$. Если $k = 0$, то ψ инъективна.

Доказательство стандартное (см. [16]), и мы его опускаем. Отметим схожесть между последовательностью предложения 9 и последовательностью из (11).

Используя это, можно дать другое, эквивалентное определение $\xi \in \Sigma^k(X)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Пусть X – конечный связный клеточный комплекс, $\xi \in H^1(X; \mathbb{R})$ – ненулевой класс и $k \geq 1$. Тогда $\xi \in \Sigma^k(X)$ в том и только том случае, когда $\mathcal{M}_\xi$ является $(k-1)$ -связным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathcal{M}_\xi$ является $(k-1)$ -связным, то по предложению 9 имеем обратную систему $\{\pi_l(\tilde{X}, N)\}$, которая про-тривиальна при $l \leq k$, что согласно предложению 2 дает $\xi \in \Sigma^k(X)$.

Чтобы доказать утверждение в части “только в том случае”, мы должны побеспокоиться о $\varprojlim^1 \pi_{k+1}(\tilde{X}, N_i)$. Но согласно следующей лемме система $\{\pi_{k+1}(\tilde{X}, N)\}$ является полустабильной, следовательно, $\varprojlim^1$ -член обращается в нуль. Из предложения 9 следует, что $\mathcal{M}_\xi$ является $(k-1)$ -связным.

ЛЕММА 8. Пусть X – конечный связный клеточный комплекс, класс $\xi \in H^1(X; \mathbb{R})$ – ненулевой и $h_\xi: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{R}$ – функция высоты. Если $\xi \in \Sigma^k(X)$, то система $\{\pi_{k+1}(\tilde{X}, N)\}$ является полустабильной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем гомотопию из предложения 2, 4), чтобы удалить любую k -сферу в N достаточно далеко; это дает полустабильность, поскольку процедура может быть проделана в окрестности N' , несколько большей, чем N (зависит только от H).

Приложение А. Сигма-инварианты цепных комплексов

В этом приложении мы покажем, как $\Sigma^k(C)$ связан с критерием, в котором участвуют цепные гомотопии на C .

Если цепной комплекс C состоит из плоских R -модулей, мы имеем следующий критерий.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Пусть C – цепной комплекс плоских R -модулей и n – неотрицательное целое число. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) C имеет конечный n -тип;
- 2) для любого множества индексов J естественное отображение

$$H_k\left(C, \prod_J R\right) \rightarrow \prod_J H_k(C)$$

является изоморфизмом при $k < n$ и эпиморфизмом при $k = n$.

По существу это теорема 2 из [31], но мы разрешаем комплексу C быть плоским и не обязательно проективным, поэтому мы получаем только гомологический критерий. Доказательство проходит для плоских модулей.

Под фильтрацией в C мы понимаем семейство $\{C^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ цепных подкомплексов, где $\mathcal{A}$ – направленное множество, $C^\alpha \subset C^\beta$ для $\alpha \leq \beta$ и $C = \bigcup C^\alpha$.

Имея фильтрацию, определяем $D^\alpha = C/C^\alpha$.

Справедлив следующий аналог теоремы 2.2. работы [32].

ТЕОРЕМА 10. Пусть C – цепной комплекс над R с фильтрацией $\{C^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ конечного n -типа комплексами C^α плоских R -модулей. Тогда C имеет конечный n -тип в том и только том случае, когда прямая система $\{H_i(D^\alpha)\}$ существенно тривиальна при $i \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 2.2 в [32], но надо использовать предложение 11. Детали мы опустим.

Пусть G – конечно порожденная группа и $\xi: G \rightarrow \mathbb{R}$ – ненулевой гомоморфизм. Пусть C – свободный конечно порожденный в каждой размерности цепной комплекс над $\mathbb{Z}G$. Для заданного нормирования на C , продолжающего ξ , определим подкомплекс $C^\xi = \{x \in C \mid v(x) \geq 0\}$. Нормирования определяются своими значениями на базисных элементах, поэтому легко видеть, что C^ξ является конечно порожденным свободным цепным комплексом над $\mathbb{Z}G_\xi$ (ср. [9; лемма 3.1]). Для $g \in G$ мы также можем рассмотреть подкомплекс $gC^\xi \subset C$, который изоморфен C^ξ . Обозначим $D^g = C/gC^\xi$.

Используя теорему 10, получаем следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Пусть C – свободный конечно порожденный в каждой размерности цепной комплекс над $\mathbb{Z}G$, v – нормирование, продолжающее ξ , и n – неотрицательное целое число. Тогда следующие свойства эквивалентны:

- 1) $\xi \in \Sigma^n(C)$;
- 2) прямая система $\{H_i(D^g)\}$ существенно тривиальна при $i \leq n$;
- 3) существует цепное отображение $\varphi: C \rightarrow C$, цепно-гомотопное тождественному и такое, что $v(\varphi(x)) > v(x)$ для всех ненулевых $x \in C_i$ при $i \leq n$.

Список литературы

- [1] С. П. Новиков, “Многозначные функции и функционалы. Аналог теории Морса”, *Докл. АН СССР*, **260** (1981), 31–35; англ. пер.: S. P. Novikov, “Multivalued functions and functionals. An analogue of the Morse theory”, *Soviet Math. Dokl.*, **24** (1981), 222–226.
- [2] С. П. Новиков, “Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса”, *УМН*, **37:5** (1982), 3–49; англ. пер.: S. P. Novikov, “The Hamiltonian formalism and a multi-valued analogue of Morse theory”, *Russian Math. Surveys*, **37:5** (1982), 1–56.
- [3] С. П. Новиков, “Блоховские гомологии. Критические точки функций и замкнутых 1-форм”, *Докл. АН СССР*, **287** (1986), 1321–1324; англ. пер.: S. P. Novikov, “Bloch homology. Critical points of functions and closed 1-forms”, *Soviet Math. Dokl.*, **33** (1986), 551–555.
- [4] С. П. Новиков, И. Шмельцер, “Периодические решения уравнений Кирхгофа для свободного движения твердого тела в жидкости и расширенная теория Люстерника–Шнирельмана–Морса (ЛШМ). I”, *Функц. анализ и его прил.*, **15:3** (1981), 54–66; англ. пер.: S. P. Novikov, I. Smeltser, “Periodic solutions of the Kirchhoff’s equations for the free motion of a rigid body in a fluid and the extended theory of Lusternik–Shnirel’man–Morse theory (LSM). I”, *Funct. Anal. Appl.*, **15:3** (1981), 197–207.
- [5] M. Farber, *Topology of closed one-forms*, Math. Surveys Monogr., **108**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [6] М. Фарбер, Д. Шютц, “Замкнутые 1-формы в топологии и динамике”, *УМН*, **63:6** (2008), 91–156; англ. пер.: B. Farber, D. Schutz, “Closed 1-forms in topology and dynamics”, *Russian Math. Surveys*, **63:6** (2008), 1079–1139.
- [7] J.-Cl. Sikorav, *Points fixes de difféomorphismes symplectiques, intersections de sous-variétés lagrangiennes, et singularités de un-formes fermées*, Thèse de Doctorat d’Etat ès Sciences Mathématiques, Université Paris-Sud, Centre d’Orsay, 1987.
- [8] R. Bieri, W. D. Neumann, R. Strebel, “A geometric invariant of discrete groups”, *Invent. Math.*, **90:3** (1987), 451–477.
- [9] R. Bieri, B. Renz, “Valuations on free resolutions and higher geometric invariants of groups”, *Comment. Math. Helv.*, **63:3** (1988), 464–497.
- [10] M. Farber, “Zeros of closed 1-forms, homoclinic orbits and Lusternik–Schnirelman theory”, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, **19:1** (2002), 123–152.
- [11] F. Latour, “Existence de 1-formes fermées non singulières dans une classe de cohomologie de de Rham”, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, **80** (1994), 135–194.
- [12] M. Farber, “Lusternik–Schnirelman theory and dynamics”, *Lusternik–Schnirelman category and related topics* (South Hadley, MA, 2001), Contemp. Math., **316**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, 95–111.

- [13] М. Фарбер, Т. Каппелер, “Теория Люстерника–Шнирельмана и динамика. II”, *Геометрическая топология и теория множеств: К 100-летию со дня рожд. проф. Л.В. Келдыш: Сб. ст.*, Тр. МИАН, **247**, 2004, 252–266; англ. пер.: M. Farber, T. Kappeler, “Lusternik–Schnirelman theory and dynamics. II”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2004, № 4, 232–245.
- [14] M. Bestvina, N. Brady, “Morse theory and finiteness properties of groups”, *Invent. Math.*, **129**:3 (1997), 445–470.
- [15] K. S. Brown, *Cohomology of groups*, Grad. Texts in Math., **87**, Springer, New York–Berlin, 1982.
- [16] R. Geoghegan, *Topological methods in group theory*, Grad. Texts in Math., **243**, Springer, New York, 2008.
- [17] J. Meier, H. Meinert, L. van Wyk, “Higher generation subgroup sets and the Σ -invariants of graph groups”, *Comment. Math. Helv.*, **73**:1 (1998), 22–44.
- [18] R. Bieri, R. Geoghegan, D. Kochloukova, *The Sigma invariants of Thompson’s group F*, [arXiv: 0807.5138](https://arxiv.org/abs/0807.5138), 2008.
- [19] R. Bieri, “Finiteness length and connectivity length for groups”, *Geometric group theory down under* (Canberra, 1996), de Gruyter, Berlin, 1999, 9–22.
- [20] R. Bieri, R. Geoghegan, “Connectivity properties of group actions on non-positively curved spaces”, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **161**:765 (2003).
- [21] J. Harlander, D. Kochloukova, “The Σ^3 -conjecture for metabelian groups”, *J. London Math. Soc.* (2), **67**:3 (2003), 609–625.
- [22] M. Farber, D. Schütz, “Moving homology classes to infinity”, *Forum Math.*, **19**:2 (2007), 281–296.
- [23] Э. Спеньер, *Алгебраическая топология*, Мир, М., 1971; англ. пер.: E. H. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [24] D. Schütz, “Finite domination, Novikov homology and nonsingular closed 1-forms”, *Math. Z.*, **252**:3 (2006), 623–654.
- [25] C. T. C. Wall, “Finiteness conditions for CW-complexes”, *Ann. of Math.* (2), **81**:1 (1965), 56–69.
- [26] C. T. C. Wall, “Finiteness conditions for CW-complexes. II”, *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, **295**:1441 (1966), 129–139.
- [27] A. Ranicki, “The algebraic theory of finiteness obstruction”, *Math. Scand.*, **57**:1 (1985), 105–126.
- [28] M. Farber, D. Schütz, “Homological category weights and estimates for $\text{cat}^1(X, \xi)$ ”, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, **10**:1 (2008), 243–266.
- [29] M. Usher, *Spectral numbers in Floer theories*, [arXiv: 0709.1127](https://arxiv.org/abs/0709.1127), 2007.
- [30] M. Farber, D. Schütz, “Cohomological estimates for $\text{cat}(X, \xi)$ ”, *Geom. Topol.*, **11** (2007), 1255–1288.
- [31] K. S. Brown, “Homological criteria for finiteness”, *Comment. Math. Helv.*, **50**:1 (1975), 129–135.
- [32] K. S. Brown, “Finiteness properties of groups”, Proceedings of the Northwestern conference on cohomology of groups, *J. Pure Appl. Algebra*, **44**:1–3 (1987), 45–75.

М. Фарбер (M. Farber)

University of Durham, UK

E-mail: Michael.Farber@durham.ac.uk

Поступила в редакцию

06.10.2008

Р. Гейган (R. Geoghegan)

State University of New York, Binghamton, USA

E-mail: ross@math.binghamton.edu

Д. Шютц (D. Schütz)

University of Durham, UK

E-mail: dirk.schuetz@durham.ac.uk