Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, Н. Ю. Ероховец, Алгебра операторов на кольце многогранников и квазисимметрические функции, *УМН*, 2010, том 65, выпуск 2, 197–198

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9347>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 17:46:36

Алгебра операторов на кольце многогранников и квазисимметрические функции

В. М. Бухштабер, Н. Ю. Ероховец

Два выпуклых многогранника называются *комбинаторно эквивалентными*, если существует взаимно однозначное соответствие между их гранями, сохраняющее отношение включения.

Обозначим через $\mathcal{P}^{2n}$ абелеву группу, порожденную всеми комбинаторными многогранниками размерности n . Тогда $\mathcal{P}^{2n} = \bigoplus_{m \geq n+1} \mathcal{P}^{2n, 2(m-n)}$, где $\mathcal{P}^{2n, 2(m-n)}$ — конечно порожденная абелева группа, образующими которой являются n -мерные комбинаторные многогранники с m гипергранями.

Декартово произведение многогранников $P \times Q$ задает в абелевой группе

$$\mathcal{P} = \sum_{n \geq 0} \mathcal{P}^{2n} = \mathcal{P}^0 + \sum_{m \geq 2} \bigoplus_{n=1}^{m-1} \mathcal{P}^{2n, 2(m-n)}$$

структуру коммутативного ассоциативного кольца, в котором роль единицы играет точка pt. Многогранник называется *неразложимым*, если его нельзя представить в виде прямого произведения двух многогранников положительной размерности.

ЛЕММА 1. $\mathcal{P}$ является кольцом многочленов от неразложимых многогранников.

Для $k \geq 0$ определим оператор d_k , сопоставляющий многограннику P^n сумму в кольце $\mathcal{P}$ всех его $(n - k)$ -мерных граней $d_k P^n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. $d_k(P \times Q) = \sum_{i+j=k} (d_i P) \times (d_j Q)$.

В частности, оператор $d = d_1$ является дифференцированием.

Обозначим через $\mathcal{D}$ подкольцо в $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{P}, \mathcal{P})$, порожденное операторами d_k , $k \geq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Алгеброй *Лейбница–Хопфа* над кольцом A называется алгебра Хопфа $\mathcal{H}$ над A с фиксированной конечной или счетной последовательностью образующих H_i , $i = 1, 2, \dots$, и коумножением $\Delta H_n = \sum_{i+j=n} H_i \otimes H_j$, $H_0 = 1$.

Рассмотрим свободную алгебру Лейбница–Хопфа $\mathcal{Z} = \mathbb{Z}\langle Z_1, Z_2, \dots \rangle$ со счетным числом образующих Z_i (см. [1], [2]). Положим $\deg Z_i = 2i$ и $\Phi(t) = \sum_{i \geq 0} Z_i t^i \in \mathcal{Z}[[t]]$. Ясно, что $\mathcal{Z}$ является *универсальной алгеброй Лейбница–Хопфа*, т. е. для любой алгебры Лейбница–Хопфа $\mathcal{H}$ соответствие $Z_i \rightarrow H_i$ задает гомоморфизм алгебр Хопфа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Обозначим через $\mathcal{U}$ алгебру Хопфа, универсальную в категории алгебр Лейбница–Хопфа $\mathcal{H}$ с антиподом $\chi(H_i) = (-1)^i H_i$.

ЛЕММА 5. $\mathcal{U} \simeq \mathcal{Z}/J_{\mathcal{U}}$, где двухсторонний идеал $J_{\mathcal{U}}$ порожден многочленами $u_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i Z_{n-i} Z_i$, $n \geq 2$.

Многочлены u_n — это коэффициенты ряда $\Phi(t)\Phi(-t)$, поэтому алгебра Хопфа $\mathcal{U}$ универсальна в категории алгебр Лейбница–Хопфа, для которых $\Phi(t)\Phi(-t) = 1$.

Соответствие $Z_k \rightarrow d_k$ задает на кольце $\mathcal{P}$ структуру градуированного модуля Милнора (см. [3]) над алгеброй Хопфа $\mathcal{Z}$.

ТЕОРЕМА 6. $\mathcal{D} \simeq \mathcal{Z}/J_{\mathcal{U}} \simeq \mathcal{U}$.

Кольцо простых многогранников $\mathcal{P}_s$ (см. [4]) замкнуто относительно действия алгебры $\mathcal{D}$, при этом алгебра $\mathcal{D}(\mathcal{P}_s)$ изоморфна алгебре разделенных степеней, т. е. $d_k d_l = \binom{k+l}{k} d_{k+l}$.