Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Болотин, Д. В. Трещёв, Формула Хилла, *УМН*,
2010, том 65, выпуск 2, 3–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9348>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 18:14:26

УДК 531.01

Формула Хилла

С. В. Болотин, Д. В. Трещёв

Изучая периодические орбиты задачи трех тел, Хилл получил формулу, связывающую характеристический многочлен матрицы монодромии периодической орбиты с бесконечным определителем гессиана функционала действия. Математически строгое определение определителя Хилла и доказательство формулы Хилла были даны позднее Пуанкаре. В настоящей работе рассмотрены два многомерных обобщения формулы Хилла: для дискретных лагранжевых систем (симплектических закручивающих отображений) и для непрерывных лагранжевых систем. Мы обсуждаем дополнительные аспекты, появляющиеся при наличии симметрий или обратимости. Мы также изучаем изменение индекса Морса периодической траектории при понижении порядка в системах с симметриями. Даны применения к задаче об устойчивости периодических траекторий.

Библиография: 34 названия.

Ключевые слова: периодическое решение, устойчивость, лагранжева система, мультипликаторы, биллиард.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	4
2. Дискретный случай.....	10
2.1. Дискретные лагранжевы системы (ДЛС).....	10
2.2. Дискретный определитель Хилла.....	12
2.3. Инвариантный смысл формулы Хилла.....	13
2.4. Обобщенный определитель Хилла.....	15
2.5. Некоторые приложения.....	16
3. Непрерывная симметрия в ДЛС.....	18
3.1. Дискретная симметрия.....	18
3.2. Нётерова симметрия.....	19
3.3. Понижение порядка по Раусу.....	20
3.4. Симплектическая редукция для отображения Пуанкаре.....	22
3.5. Понижение порядка по Раусу для линейных дискретных лагранжевых систем.....	23
3.6. Вырожденность h	26

Работа выполнена при поддержке программы Президиума РАН “Математическая теория управления” и гранта РФФИ 08-01-00681-а.

© С. В. Болотин, Д. В. Трещёв, 2010

3.7. Индексы h и $h^\perp$	31
3.8. Пространства Ω и $\Omega^\perp$	32
3.9. Вырождение для ρ -индексной формы	33
4. Обратимый случай	35
4.1. Обратимая ДЛС	35
4.2. Некоторые приложения	39
5. Формула Хилла для непрерывных лагранжевых систем	40
5.1. Непрерывный определитель Хилла	40
5.2. Связь с формулой Хилла для дискретных лагранжевых систем	43
5.3. Обобщенный определитель Хилла	43
5.4. Некоторые приложения	44
5.5. Доказательство теоремы 5.2	46
6. Вырождение в формуле Хилла	48
6.1. Редукция Рауса для линейных лагранжевых систем	51
6.2. Исключение вырожденности второй вариации	54
6.3. Индексы h и $h^\perp$	57
6.4. Пространства Ω и $\Omega^\perp$	57
6.5. Пример: автономные системы	59
6.6. Вырождение ρ -индексной формы h_ρ	60
7. Обратимый случай	61
Приложение А	64
А.1. Доказательство теоремы 3.3	64
А.2. Доказательство теоремы 6.4	65
А.3. Вырожденный случай	67
Список литературы	68

1. Введение

В 1886 г., изучая орбиты Луны, Хилл [1] получил формулу, дающую выражение характеристического многочлена матрицы монодромии для неавтономного дифференциального уравнения второго порядка с периодической зависимостью от времени в терминах определителя некоторой бесконечной матрицы. Вот слегка измененная версия этого результата. Рассмотрим уравнение Хилла

$$\ddot{x} = a(t)x, \quad (1.1)$$

где

$$a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{ikt}$$

– вещественная 2π -периодическая функция. Пусть ρ и ρ^{-1} – собственные значения матрицы монодромии. Хилл показал, что

$$\frac{\rho + \rho^{-1} - 2}{e^{2\pi} + e^{-2\pi} - 2} = \det H, \quad (1.2)$$

где H – бесконечная матрица¹

$$H = \left(\frac{k^2 \delta_{jk} + a_{k-j}}{k^2 + 1} \right)_{j,k \in \mathbb{Z}}, \quad (1.3)$$

а δ_{jk} – символ Кронекера.

Хилл приближенно вычислил $\det H$, заменив H (3×3) -матрицей, что дало достаточно хорошее приближение. Он использовал равенство (1.2) для нахождения мультипликаторов. Астрономические таблицы, полученные этим методом, хорошо известны.

Рассуждения Хилла не были строгими, так как он не доказал сходимости бесконечного определителя $\det H$. Несколькоми годами позже Пуанкаре [2] объяснил точный смысл определителя Хилла и дал строгое доказательство формулы Хилла. Результат Хилла вошел в учебники по дифференциальным уравнениям, но был почти забыт специалистами по динамическим системам, пока в конце XX века аналог равенства (1.2) не был обнаружен в дискретных лагранжевых системах в [3] и независимо в [4]. Здесь H оказался конечномерной матрицей гессаана для функционала действия в критической точке, соответствующей периодическому решению. В [5] (см. также [6]) была получена формула Хилла общего вида для периодического решения произвольной лагранжевой системы на многообразии. В этом случае H – надлежащим образом регуляризованный оператор Гессе функционала действия в критической точке, задаваемой периодическим решением.

Как дискретная, так и непрерывная версии формулы Хилла дают нетривиальную информацию о динамической устойчивости периодической орбиты в терминах индекса Морса. Недавно эта связь исследовалась средствами симплектической геометрии (см., например, [7], [8]), однако подход, основанный на определителе Хилла, хотя является менее общим, выглядит проще и дает дополнительный взгляд на задачу.

Как уже было сказано, имеются две похожие, но формально различные ситуации:

- Непрерывная лагранжева система (НЛС) с конфигурационным пространством M и τ -периодическим лагранжианом $\mathcal{L}(x, \dot{x}, t)$ на $TM \times \mathbb{R}$, строго выпуклым по скорости. Решения лагранжевой системы будут называться траекториями. Тогда τ -периодическая траектория γ является критической точкой функционала действия

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_0^\tau \mathcal{L}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) dt$$

на множестве τ -периодических кривых $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$.

- Дискретная лагранжева система (ДЛС) с лагранжианом $L(x, y)$ на $M \times M$, удовлетворяющим некоторому условию невырожденности. Тогда периодическая траектория – n -периодическая последовательность $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, являющаяся критической точкой функционала действия на M^n :

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n L(x_i, x_{i+1}), \quad x_{i+n} = x_i.$$

¹Матрица Хилла была немного другой.

Обычно эти случаи могут быть сведены друг к другу, но это сведение оказывается громоздким, так что имеет смысл рассматривать эти случаи отдельно.

Обе версии формулы Хилла выглядят похоже. Пусть P – матрица монодромии периодической траектории, h – вторая вариация функционала действия на периодической траектории и H – соответствующий гессиан. Тогда

$$\det(P - I) = \sigma(-1)^m \beta \det H, \quad (1.4)$$

где $m = \dim M$ и $\sigma = \pm 1$ отвечает за ориентируемость траектории. Коэффициент β – положительный скалярный множитель.

Оператор H самосопряжен в правильно выбранном гильбертовом пространстве. Для непрерывных систем H – неограниченный оператор, так что требуется его регуляризация. Например, для уравнения Хилла (1.1) H – оператор Штурма–Лиувилля.

Другая версия формулы Хилла, обобщение формулы (1.4), имеет вид

$$\rho^{-m} \det(P - \rho I) = \sigma(-1)^m \beta \det H_\rho, \quad \rho \in \mathbb{C}, \quad (1.5)$$

где H_ρ – ρ -гессиан, совпадающий с обычным гессианом при $\rho = 1$. Он самосопряжен, если $|\rho| = 1$. Так как оператор P симплектический, обе части (1.5) – многочлены степени m по $\rho + \rho^{-1}$.

Формула Хилла (1.4) имеет приложения в динамике. Первым из них является хорошо известное утверждение, что вырожденность периодической траектории по Пуанкаре (т. е. условие, что 1 – собственное значение P) эквивалентна вариационной вырожденности (условию $\det H = 0$).

Другое приложение касается динамической неустойчивости периодической траектории. Оно основано на наблюдении, что из неравенства $\det(P - I) < 0$ вытекает существование вещественного мультипликатора (собственного значения P) $\rho > 1$. Действительно, $F(\rho) = \det(P - \rho I) = \det(\rho I - P) \rightarrow \infty$ при $\rho \rightarrow +\infty$, так что из неравенства $F(1) < 0$ следует существование корня $\rho > 1$. Таким образом, γ имеет положительный показатель Ляпунова и, следовательно, экспоненциально неустойчива.

Если $\det H \neq 0$, имеем $\text{sign } \det H = (-1)^{\text{ind } H}$, где $\text{ind } H$ – индекс Морса периодической траектории. Поэтому если периодическая траектория невырождена, то согласно (1.4) из неравенства $\sigma(-1)^{m+\text{ind } H} < 0$ следует экспоненциальная неустойчивость.

В некоторых случаях удастся доказать, что при всех $|\rho| = 1$ гессиан H_ρ положительно определен и, следовательно, уравнение $\det H_\rho = 0$ не имеет решений на единичной окружности. В результате получаем экспоненциальную неустойчивость, более того, гиперболичность соответствующей периодической траектории (предложения 4.5 и 7.2).

Далее будут даны другие следствия из формулы Хилла.

Отметим, что связи между динамическими и геометрическими свойствами периодической орбиты не исчерпываются формулой Хилла. Отметим интересные связи между свойствами устойчивости и структурой (индекс, сигнатура и т. д.) квадратичного первого интеграла линеаризованной системы [9], [10]. Много интересных результатов являются следствиями формулы индекса из симплектической геометрии [7], [8]. Некоторые из наших результатов могут рассматриваться как лагранжевы варианты результатов из [11], [12].

Формула Хилла потенциально наиболее полезна для изучения периодических орбит, получаемых вариационными методами. Много таких орбит недавно получено в небесной механике путем минимизации функционала действия на надлежащих классах кривых (см., например, [13]–[15]). Самый знаменитый пример – “восьмерка” [13]. Однако из-за вращательной и других симметрий эти периодические орбиты являются вырожденными точками минимума для функционала действия.

В приложениях периодические траектории обычно вырождены. Например, любая периодическая орбита γ автономной непрерывной лагранжевой системы вырождена. В этом случае уравнение в вариациях имеет τ -периодическое решение $\dot{\gamma}$ и линейный первый интеграл, линеаризацию интеграла энергии. Другая причина для такой вырожденности (на этот раз как в дискретном, так и в непрерывном случае) – наличие группы симметрий, сохраняющей лагранжиан. Эта вырожденность также порождает τ -периодические решения и линейные интегралы уравнений в вариациях. Для вырожденной периодической траектории равенство (1.4) бесполезно, поскольку обе его части обращаются в нуль. С помощью процедуры понижения порядка можно получить невырожденный вариант формулы Хилла. Рассмотрим случай, когда алгебра Ли V векторных полей симметрии для уравнений в вариациях коммутативна, размерность обобщенного собственного пространства единицы N оператора P равна $2k$, где $k = \dim V$ (отсутствие дополнительного вырождения) и выполнено дополнительное условие, называемое невырожденностью траектории $\text{mod } V$. Последнее условие имеет скорее лагранжеву природу, чем гамильтонову.

Полученная таким образом редуцированная формула Хилла выглядит аналогично, но соответствующие операторы монодромии и Гессе $\tilde{P}$ и $H^\perp$ действуют на меньших (редуцированных) пространствах и невырождены, если учтены все симметрии:

$$\det(\tilde{P} - I) = \sigma^\perp (-1)^{m-k} \beta^\perp \det H^\perp.$$

Здесь $\sigma^\perp \in \{1, -1\}$ – “редуцированная ориентация” и $\beta^\perp > 0$.

При этом возникает интересный вопрос о связи между σ и $\sigma^\perp$, а также между $\text{ind } H$ и $\text{ind } H^\perp$, индексами Морса гессианов в исходной и редуцированной системах. Действительно, σ и $\text{ind } H$ часто известны для решений, получаемых вариационными методами, а $\sigma^\perp$ и $\text{ind } H^\perp$ появляются в задачах устойчивости. Наш ответ на этот вопрос дается следующей конструкцией.

Пусть h и $h^\perp$ – билинейные формы второй вариации, соответствующие операторам H и $H^\perp$ соответственно. Формы h и $h^\perp$ определены на векторных пространствах X и $X^\perp$ вариаций вдоль периодической орбиты в исходной и редуцированной лагранжевых системах соответственно. Процедура понижения порядка дает каноническую проекцию $\Pi: X \rightarrow X^\perp$.

Для любых $\zeta \in V$ и $\eta \in X$ имеем $h(\zeta, \eta) = 0$. Следовательно, h определяет билинейную форму $\hat{h}$ на $\hat{X} = X/V$ и $\text{ind } h = \text{ind } \hat{h}$. Пространства $\hat{X}$ и $X^\perp$ допускают разложения

$$\hat{X} = \hat{\Omega} \oplus \hat{Y}^0 \oplus \hat{Z}, \quad \hat{X}^\perp = \Omega^\perp \oplus Y^\perp$$

со следующими свойствами:

- 1) $\dim \hat{\Omega} = \dim \Omega^\perp = k$;
- 2) пространства $\hat{\Omega}$, $\hat{Y}^0$ и $\hat{Z}$ $\hat{h}$ -ортогональны, а $\Omega^\perp$ и $Y^\perp$ – $h^\perp$ -ортогональны;

- 3) ограничение $\hat{h}|_{\widehat{Z}}$ невырождено в дискретном случае и положительно определено в непрерывном случае;
- 4) $\Pi(\widehat{Z}) = 0$, а ограничения $\Pi|_{\widehat{Y}^0}: \widehat{Y}^0 \rightarrow Y^\perp$ и $\Pi|_{\widehat{\Omega}}: \widehat{\Omega} \rightarrow \Omega^\perp$ — линейные изоморфизмы;
- 5) формы $\hat{h}|_{\widehat{Y}^0}$ и $h^\perp|_{Y^\perp}$ совпадают в том смысле, что $h^\top|_{Y^\perp} = h^\perp|_{Y^\perp}$, где $\hat{h} = h^\top \circ \Pi$;
- 6) $h^\top|_{\Omega^\perp} - h^\perp|_{\Omega^\perp} = \chi$, где χ в непрерывном случае положительно определена.

В удобном базисе мы даем явные выражения для матриц $h^\top|_{\Omega^\perp}$ и $h^\perp|_{\Omega^\perp}$. Используя эти выражения, мы показываем, что

$$\sigma(-1)^{\text{ind } H} = \sigma^\perp(-1)^{\text{ind } H^\perp + \text{ind } b},$$

где квадратичная форма b на обобщенном собственном пространстве $N = \text{Ker}(P-I)^2$ определена равенством $b(v) = \omega((P-I)v, v)$, где ω — симплектическая структура.

В некоторых случаях $(-1)^{\text{ind } b}$ имеет ясный динамический смысл. Например, предположим, что вырожденность порождена исключительно автономностью непрерывного лагранжиана. Тогда $\dim V = 1$. Периодическая траектория γ лежит в гладком семействе периодических траекторий. Пусть E и τ — энергия и период вдоль этого семейства. Тогда (лемма 6.4)

$$(-1)^{\text{ind } b} = -\text{sign} \frac{dE}{d\tau}.$$

Предположим, что периодическая траектория γ автономной лагранжевой системы не имеет других вырождений. Тогда $k = 1$ и по редуцированной формуле Хилла она имеет вещественный мультипликатор $\rho > 1$ при условии

$$\sigma(-1)^{m+\text{ind } H} \frac{dE}{d\tau} < 0. \quad (1.6)$$

Знак величины $dE/d\tau$ легко вычисляется, например, в задаче о движении точки в $\mathbb{R}^m$ в однородном потенциальном поле сил.

Замкнутые геодезические не удовлетворяют условию невырожденности mod V . Тем не менее, из неравенства (1.6) по-прежнему вытекает существование мультипликатора $\rho > 1$ при условии отсутствия дополнительного вырождения (следствие 5.2). (Отметим, что в этом случае $dE/d\tau < 0$.)

Как уже было отмечено, предмет настоящей статьи близко связан с теорией индекса Морса–Маслова для периодической орбиты гамильтоновой системы (см., например, [7], [8], [11], [12]). Некоторые из наших результатов могут быть получены этими чисто симплектическими методами. Другие результаты лагранжевы и не имеют прямой симплектической переформулировки. Ситуация аналогична соотношению между гамильтоновыми и лагранжевыми системами: гамильтонова теория проще, является более общей и мощной. Тем не менее, во многих задачах приходится обращаться к лагранжеву формализму.

Статья состоит из двух частей: дискретной и непрерывной. Хотя большая часть конструкций и утверждений в дискретной и непрерывной частях аналогичны, имеется много технических отличий, вынуждающих нас рассматривать эти два случая по отдельности.

План статьи следующий. В разделе 2 мы сначала даем определение и напоминаем об основных свойствах дискретных лагранжевых систем (ДЛС). Этот материал хорошо известен специалистам, но появляющиеся при этом объекты не так стандартны, как их непрерывные аналоги.

Затем приводится несколько вариантов формулы Хилла для периодической траектории ДЛС. В качестве приложения мы даем некоторые достаточные условия неустойчивости периодических траекторий. Часть утверждений касается задачи устойчивости для билиардных систем произвольной размерности. Например, любая n -периодическая траектория $\mathbf{x}$ билиарда внутри гиперповерхности в $\mathbb{R}^{m+1}$ такая, что $(-1)^{m+n+\text{ind } \mathbf{x}} < 0$, экспоненциально неустойчива (следствие 2.6). Насколько нам известно, существует довольно мало публикаций о проблеме устойчивости периодических траекторий в многомерных ДЛС. Отметим работы [16] и [17], где изучаются траектории периода 2.

В разделе 3 рассматриваются ДЛС с симметриями. Мы описываем дискретный вариант процедуры понижения порядка по Раусу и приводим редуцированный вариант формулы Хилла, в котором удалена вырожденность, порожденная симметриями. Мы также получаем формулу для разности между индексом Морса периодической траектории исходной системы и индексом Морса соответствующей периодической орбиты редуцированной системы.

В разделе 4 изучаются обратимые ДЛС, т. е. дискретные лагранжевы системы с лагранжианом L , инвариантным относительно обращения времени, в композиции с инволюцией $S: M \rightarrow M$, $S^2 = \text{id}$. Таким образом, $L(S(x), S(y)) = L(y, x)$ при всех $x, y \in M$. Для любой траектории $\mathbf{x} = (x_i)$ ДЛС последовательность $\tilde{\mathbf{x}} = (Sx_{-i})$ — также траектория. Если $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}$ по модулю трансляции, то траектория $\mathbf{x}$ называется S -обратимой. Тогда соответствующее пространство вариаций разбивается в прямую сумму пространств четных и нечетных вариаций относительно S . Определитель Хилла также допускает расщепление в произведение двух определителей. Обратимые периодические траектории являются также критическими точками другого функционала действия $\mathcal{A}_+$, получаемого из исходного, $\mathcal{A}$, ограничением на пространство четных вариаций. Индекс Морса траектории относительно $\mathcal{A}_+$ в общем случае отличается от индекса относительно $\mathcal{A}$.

Любая S -обратимая траектория $\mathbf{x}$ ДЛС имеет 0, 1 или 2 неподвижные точки инволюции S . Соответственно, мы говорим, что $\text{type}(\mathbf{x}) = 0, 1$ или 2 . Отметим одно из приложений, полученных в разделе 4 (следствие 4.4). Предположим, что билиардная поверхность $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ симметрична относительно гиперплоскости и S обозначает эту симметрию. Пусть $\mathbf{x}$ — S -обратимая периодическая билиардная траектория типа $\tau \in \{0, 1, 2\}$, являющаяся невырожденным минимумом “половинной длины” $\mathcal{A}_+$. Если $m + \tau$ нечетно, то $\mathbf{x}$ экспоненциально неустойчива.

В разделе 5 начинается непрерывная часть статьи. Основное техническое отличие непрерывного случая состоит в бесконечной размерности пространства вариаций. Из-за этого определитель Хилла требует большей аккуратности. Мы даем конструкцию определителя Хилла и получаем несколько вариантов формулы Хилла, аналогичных дискретному случаю. Затем мы указываем на приложения к задаче об устойчивости периодических орбит в лагранжевых системах, включая случай замкнутых геодезических. Типичное утвер-

ждение из этой части (в сущности, восходящее к Пуанкаре) – следующее. Пусть γ – невырожденная замкнутая геодезическая на m -мерном многообразии и $\sigma(-1)^{m+\text{ind } \gamma} > 0$. Тогда γ – экспоненциально неустойчива (следствие 5.3).

В разделе 6 мы обсуждаем роль симметрий и приводим вариант формулы Хилла, в котором удалена соответствующая вырожденность. Затем мы изучаем соотношение между индексом Морса периодической траектории исходной системы и соответствующего периодического решения редуцированной системы. Мы указываем приложения этой формулы в задаче об устойчивости лагранжевых систем с симметрией.

Наконец, в разделе 7 мы рассматриваем обратимую НЛС. Лагранжиан $\mathcal{L}$ S -обратимой НЛС согласован с инволюцией S в следующем смысле:

$$\mathcal{L}(S(x), dS(x)\dot{x}, t) = \mathcal{L}(x, -\dot{x}, -t).$$

Как и в дискретном случае, определяется функционал $\mathcal{A}_+$, соответствующий четным вариациям. Основными вопросами являются соотношение между индексами S -обратимой периодической траектории относительно $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_+$ и связь между индексом относительно $\mathcal{A}_+$ и свойствами устойчивости. Мы показываем, что во многих ситуациях вычисление $\text{ind } \gamma \pmod{2}$ можно производить на вариациях, лежащих в некотором $2m$ -мерном пространстве.

Авторы благодарят В. В. Козлова за полезные обсуждения.

2. Дискретный случай

2.1. Дискретные лагранжевы системы (ДЛС). Пусть M – m -мерное многообразие и L – гладкая² функция на $M^2 = M \times M$. Обозначим

$$\partial_1 L(x, y) = \frac{\partial L(x, y)}{\partial x}, \quad \partial_2 L(x, y) = \frac{\partial L(x, y)}{\partial y} \quad (2.1)$$

и положим

$$B(x, y) = -\partial_1 \partial_2 L(x, y).$$

В локальных координатах

$$B(x, y) = -\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y_j \partial x_i} \right). \quad (2.2)$$

В инвариантных терминах $B(x, y)$ – линейный оператор $T_x M \rightarrow T_y^* M$, или билинейная форма на $T_x M \times T_y M$. Назовем L дискретным лагранжианом, если он удовлетворяет следующему условию.

УСЛОВИЕ ЗАКРУЧИВАНИЯ. $B(x, y)$ невырождена при всех $x, y \in M$.

Любой дискретный лагранжиан L локально определяет отображение

$$T: M^2 \rightarrow M^2, \quad T(x, y) = (y, z),$$

где точка $z = z(x, y)$ определена равенством

$$\frac{\partial}{\partial y}(L(x, y) + L(y, z)) = \partial_2 L(x, y) + \partial_1 L(y, z) = 0. \quad (2.3)$$

² C^2 -гладкость достаточна.

В общей ситуации T – многозначное отображение (соответствие) с графиком

$$\Gamma = \{(x, y, y, z) \in M^2 \times M^2 : \partial_2 L(x, y) + \partial_1 L(y, z) = 0\}.$$

Динамическая система, определяемая отображением T , называется дискретной лагранжевой системой (ДЛС) с конфигурационным пространством M и лагранжианом L .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В этой статье мы интересуемся малой окрестностью периодической орбиты. Таким образом, достаточно предполагать, что условие невырожденности выполнено локально.

Легко проверить (см., например, [18]), что T симплектично относительно симплектической 2-формы $\omega = B(x, y) dx \wedge dy$,

$$\omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle B(x, y)u_1, v_2 \rangle - \langle B(x, y)v_1, u_2 \rangle, \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2), \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2) \quad (2.4)$$

($\langle \cdot, \cdot \rangle$ – каноническое действие ковектора на вектор).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Перейдем к гамильтоновым переменным с помощью отображения $S: M^2 \rightarrow T^*M$, $(x, y) \mapsto (x, p_x)$, $p_x = -\partial_1 L(x, y)$. Оно локально обратимо и заменяет T на локально определенное отображение $F = STS^{-1}: T^*M \rightarrow T^*M$. Отображение F симплектично относительно стандартной симплектической формы $dp_x \wedge dx$ на T^*M , и L – производящая функция для F :

$$F(x, p_x) = (y, p_y), \quad p_x = -\partial_1 L(x, y), \quad p_y = \partial_2 L(x, y).$$

Такое симплектическое отображение F обычно называется закручивающим.

Отображение T сохраняется при умножении лагранжиана на постоянную, при добавлении к L постоянной и при так называемом калибровочном преобразовании

$$L(x, y) \mapsto L(x, y) + f(x) - f(y)$$

с произвольной гладкой функцией f на M .

Типичным примером ДЛС является многомерное стандартное отображение:

$$L(x, y) = \frac{1}{2} \langle B(x - y), x - y \rangle - \frac{1}{2} (V(x) + V(y)), \quad x, y \in \mathbb{R}^m, \quad (2.5)$$

где B – симметрическая постоянная невырожденная матрица.³

Рассмотрим область в $\mathbb{R}^{m+1}$, ограниченную гладкой выпуклой гиперповерхностью M . Билиардом называется ДЛС с лагранжианом $L(x, y) = |x - y|$ на $M \times M$. Пусть $\langle B(x, y)v, w \rangle$ – билинейная форма на $T_x M \times T_y M$, соответствующая оператору $B(x, y): T_x M \rightarrow T_y M$. Прямое вычисление дает

$$\langle B(x, y)v, w \rangle = \frac{\langle v, w \rangle - \langle v, e \rangle \langle w, e \rangle}{|x - y|}, \quad e = \frac{x - y}{|x - y|}. \quad (2.6)$$

³Потенциал $(V(x) + V(y))/2$ можно заменить на $V(x)$ или на $V(y)$, так как соответствующие лагранжианы калибровочно эквивалентны.

Можно отождествить $T_x M$ и $T_y M$ с помощью изоморфизма $\Pi(x, y): T_x M \rightarrow T_y M$, являющегося параллельной проекцией в $\mathbb{R}^{m+1}$ вдоль отрезка $[x, y]: \Pi v = v \pmod{e}$. Тогда

$$\langle B(x, y)v, \Pi(x, y)v \rangle = \frac{|v|^2 - \langle v, e \rangle^2}{|x - y|} > 0, \quad v \in T_x M \setminus \{0\}.$$

Ориентируем M как границу области. Так как $\Pi(x, y)$ меняет ориентацию, получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. $\det B(x, y) < 0$.

Поскольку область определения и образ $B(x, y)$ – различные пространства, то $\det B(x, y)$ не определен инвариантно в отличие от его знака. Тот факт, что отображение $B(x, y)$ невырождено при условии, что гиперплоскости $T_x M$ и $T_y M$ не параллельны друг другу в $\mathbb{R}^m$, хорошо известен (см., например, недавнюю работу [19]).

В [18] читатель найдет много примеров ДЛС (в основном, интегрируемых), включая многомерные.

Для непрерывной лагранжевой системы (НЛС) с лагранжианом $\mathcal{L}(x, \dot{x})$ аналогом оператора $B(x, y)$ является матрица $\mathcal{L}_{\dot{x}\dot{x}}(x, \dot{x})$ вторых частных производных. Действительно, рассмотрим ДЛС на $\mathbb{R}^m$ с лагранжианом $L(x, y) = \mathcal{L}(x, (y - x)/\varepsilon)$. В пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ орбиты ДЛС сходятся к орбитам НЛС с лагранжианом $\mathcal{L}(x, \dot{x})$. При этом

$$\varepsilon^2 B(x, y) = \mathcal{L}_{\dot{x}\dot{x}}(x, (y - x)/\varepsilon) + O(\varepsilon).$$

В частности, для аналога положительно определенной лагранжевой системы $\det B(x, y) > 0$.

При $m \geq 2$ в литературе отсутствует универсальный дискретный аналог положительно определенной непрерывной лагранжевой системы. В самом деле, в общей ситуации B несимметрична и, более того, ее симметрия не имеет инвариантного смысла, так как B и B^* определены на различных пространствах. Отметим, что одномерная теория Обри–Мезера развита для закручивающих отображений, тогда как случай произвольной размерности рассматривается для непрерывных положительно определенных лагранжевых систем.

Наиболее часто используемое определение положительно определенной ДЛС – следующее. Пусть $M = \mathbb{R}^m$ и L удовлетворяет следующим условиям (см., например, [20]):

- функция $L(x, x + v)$ периодична по $x \in \mathbb{T}^m$ и суперлинейна по $v \in \mathbb{R}^m$;
- для любого $x \in \mathbb{R}^m$ отображение $y \mapsto \partial_1 L(x, y)$ – диффеоморфизм $\mathbb{R}^m$.

В этом случае L – производящая функция глобально определенного симплектического закручивающего отображения $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^m$ на себя. Очевидно, что такой лагранжиан L удовлетворяет условию $\det B(x, y) > 0$.

2.2. Дискретный определитель Хилла. Пусть $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, $x_{i+n} = x_i$, – n -периодическая траектория ДЛС, т. е. $T(x_{i-1}, x_i) = (x_i, x_{i+1})$ при всех i . Периодическая орбита определяется точкой $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in M^n$, причем считаем, что циклическая перестановка в $\mathbf{x}$ дает ту же орбиту. Согласно (2.3),

$$\partial_2 L(x_{i-1}, x_i) + \partial_1 L(x_i, x_{i+1}) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.7)$$

где $x_0 = x_n$ и $x_1 = x_{n+1}$. Таким образом, $\mathbf{x}$ – критическая точка функционала действия

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = L(x_1, x_2) + L(x_2, x_3) + \cdots + L(x_n, x_1), \quad \mathbf{x} \in M^n.$$

Точка $p = (x_1, x_2)$ неподвижна при отображении $T^n: M^2 \rightarrow M^2$. Линейное приближение для динамики T около периодической траектории определяется линейным отображением Пуанкаре $P = DT^n(p): W \rightarrow W$, $W = T_p M^2$. В локальных координатах P задается матрицей монодромии, которая определена с точностью до подобия $P \mapsto S^{-1}PS$. Собственные значения P называются мультипликаторами периодической орбиты. Они определяют динамические свойства периодической траектории в линейном приближении.

Пусть

$$\mathbf{H} = \frac{\partial^2 \mathcal{A}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2}$$

– матрица Гессе функционала $\mathcal{A}$ в критической точке $\mathbf{x}$. Обозначим

$$B_i = B(x_i, x_{i+1}), \quad x_{n+1} = x_1.$$

ТЕОРЕМА 2.1 (дискретная формула Хилла). *Выполнено равенство*

$$\det(P - I) = \frac{(-1)^m \det \mathbf{H}}{\prod_{i=1}^n \det B_i} = \sigma(-1)^m \beta \det \mathbf{H}, \quad (2.8)$$

$$\sigma(\mathbf{x}) = \text{sign} \prod_{i=1}^n \det B_i, \quad \beta = \left| \prod_{i=1}^n \det B_i \right|^{-1}. \quad (2.9)$$

Для “физических” дискретных лагранжианов геометрический смысл σ – это ориентируемость: траектория $\mathbf{x}$, в определенном смысле, ориентируема, если $\sigma(\mathbf{x}) > 0$, и неориентируема в противном случае. Например, геометрический смысл именно такой, если ДЛС получена в результате дискретизации положительно определенной НЛС. Согласно предложению 2.1, в случае n -периодической траектории бильярда $\mathbf{x}$ выполнено равенство $\sigma(\mathbf{x}) = (-1)^n$. Следовательно, в указанном смысле периодические траектории бильярда с нечетным периодом неориентируемы. Отметим, что σ меняется на $(-1)^{mn}\sigma$ при замене L на $-L$.

2.3. Инвариантный смысл формулы Хилла. Ясно, что левая часть равенства (2.8), не зависит от выбора локальных координат на M . При этом инвариантный смысл правой части априори неясен. Попробуем объяснить ее независимость от выбора координат. Пусть $E_i = T_{x_i} M$. Тогда $B_i = B(x_i, x_{i+1})$ – линейный оператор $E_i \rightarrow E_{i+1}^*$ и

$$A_i = \partial_{22} L(x_{i-1}, x_i) + \partial_{11} L(x_i, x_{i+1})$$

– симметрический оператор $A_i: E_i \rightarrow E_i^*$.

Гессиан функционала $\mathcal{A}$ в критической точке $\mathbf{x} \in M^n$ – симметрическая билинейная форма h на $X = T_{\mathbf{x}} M^n = E_1 \times \cdots \times E_n$, заданная равенством

$$h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n (\langle A_i u_i, v_i \rangle - \langle B_{i-1} u_{i-1}, v_i \rangle - \langle B_i^* u_{i+1}, v_i \rangle), \quad (2.10)$$

где

$$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n), \quad \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n), \quad u_0 = u_n, \quad u_{n+1} = u_1.$$

Форма h представляется симметрическим оператором $\mathbf{H}: X \rightarrow X^*$:

$$h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{H}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in X,$$

где

$$(\mathbf{H}\mathbf{u})_i = A_i u_i - B_{i-1} u_{i-1} - B_i^* u_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Определим линейные операторы $\mathbf{A}, \mathbf{B}: X \rightarrow X^*$ равенствами

$$(\mathbf{A}\mathbf{u})_i = A_i u_i, \quad (\mathbf{B}\mathbf{u})_i = -B_{i-1} u_{i-1}, \quad (\mathbf{B}^*\mathbf{u})_i = -B_i^* u_{i+1}. \quad (2.11)$$

Тогда

$$\mathbf{H} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{B}^*.$$

Так как B_i невырождены, $\mathbf{B}$ обратим. В локальных координатах $\mathbf{B}$ есть $(mn \times mn)$ -матрица, и

$$\det \mathbf{B} = (-1)^m \prod_{i=1}^n \det B_i. \quad (2.12)$$

Таким образом, формула Хилла приобретает инвариантный вид⁴

$$\det(P - I) = \frac{\det \mathbf{H}}{\det \mathbf{B}} = \det(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{H}). \quad (2.13)$$

Равенство $\mathbf{H}\mathbf{u} = 0$ определяет систему уравнений в вариациях периодической траектории $\mathbf{x}$:

$$A_i u_i - B_{i-1} u_{i-1} - B_i^* u_{i+1} = 0, \quad u_i \in E_i, \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (2.14)$$

Это линейное приближение к системе (2.7) около периодической траектории $\mathbf{x}$. Точнее, если u_i – произвольное решение системы уравнений в вариациях, то линеаризованное отображение $P_i = dT(x_{i-1}, x_i)$ действует следующим образом:

$$P_i(u_{i-1}, u_i) = (u_i, u_{i+1}), \quad u_{i+1} = (B_i^*)^{-1}(A_i u_i - B_{i-1} u_{i-1}).$$

Ядро оператора $\mathbf{H}: X \rightarrow X^*$ является пространством n -периодических решений $\mathbf{v} = (v_i)$, $v_{i+n} = v_i$, системы (2.14).

Система уравнений в вариациях лагранжева.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Линейная периодическая дискретная лагранжева система (E, Λ) определяется n -периодическими последовательностями $E = (E_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ векторных пространств и линейных операторов $A_i: E_i \rightarrow E_i^*$, $B_i: E_i \rightarrow E_{i+1}^*$, где A_i симметричны и B_i невырождены. Лагранжиан имеет вид

$$\Lambda_i(u_i, u_{i+1}) = \frac{1}{2} \langle A_i u_i, u_i \rangle - \langle B_i u_i, u_{i+1} \rangle. \quad (2.15)$$

Траектории системы (E, Λ) – последовательности $\mathbf{u} = (u_i)$ такие, что

$$\partial_{u_i} (\Lambda_{i-1}(u_{i-1}, u_i) + \Lambda_i(u_i, u_{i+1})) = 0.$$

⁴Так как $\det \mathbf{H}$, $\det \mathbf{B}$ – линейные операторы на одномерных пространствах $\wedge^{mn} X \rightarrow \wedge^{mn} X^*$, их отношение – корректно определенный скаляр.

Таким образом, траектории системы (E, Λ) удовлетворяют системе уравнений в вариациях (2.14) и являются экстремальными квадратичного функционала действия

$$\frac{1}{2} h(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^n \Lambda_i(u_i, u_{i+1}). \quad (2.16)$$

Система (E, Λ) – линейаризация системы (M, L) в $\mathbf{x}$.

2.4. Обобщенный определитель Хилла. Определим обобщение гессия на $\mathbf{H}$. Положим $S^1 = \{\rho \in \mathbb{C} : |\rho| = 1\}$. Для любого $\rho \in S^1$ пусть X_ρ – пространство всех квазипериодических комплексных векторных последовательностей $\mathbf{u} = (u_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ таких, что $u_{j+n} = \rho u_j$. Здесь u_j лежит в комплексификации пространства E_j , обозначаемой для простоты E_j . Гессия действия определяет эрмитову форму на X_ρ :

$$h(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}) = \sum_{j=1}^n (\langle A_j u_j, \bar{v}_j \rangle - \langle B_{j-1} u_{j-1}, \bar{v}_j \rangle - \langle B_j^* u_{j+1}, \bar{v}_j \rangle).$$

Так как квазипериодическая последовательность $(u_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ определяется своей частью $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in E_1 \times \dots \times E_n = X$, можно отождествить X_ρ с X (точнее, с комплексификацией X). Получаем эрмитову форму

$$h_\rho(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}) = \langle \mathbf{H}_\rho \mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}} \rangle, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in X,$$

где $\mathbf{H}_\rho: X \rightarrow X^*$ определен равенствами

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}_\rho \mathbf{u})_j &= A_j u_j - B_{j-1} u_{j-1} - B_j^* u_{j+1}, \\ j &= 1, \dots, n, \quad u_0 = \rho^{-1} u_n, \quad u_{n+1} = \rho u_1. \end{aligned}$$

Аналогично определяем оператор $\mathbf{B}_\rho: X \rightarrow X^*$:

$$(\mathbf{B}_\rho \mathbf{u})_j = -B_{j-1} u_{j-1}, \quad j = 1, \dots, n, \quad u_0 = \rho^{-1} u_n.$$

Тогда

$$\mathbf{H}_\rho = \mathbf{A} + \mathbf{B}_\rho + \mathbf{B}_\rho^*.$$

Операторы $\mathbf{H}_\rho, \mathbf{B}_\rho$ имеют смысл при любом ненулевом $\rho \in \mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА 2.2 (обобщенная формула Хилла). Для любого $\rho \in \mathbb{C}$

$$\det(P - \rho I) = \frac{\det \mathbf{H}_\rho}{\det \mathbf{B}_\rho}. \quad (2.17)$$

Так как $\det \mathbf{B}_\rho = \rho^{-m} \det \mathbf{B}$, получаем

$$\rho^{-m} \det(P - \rho I) = \frac{\det \mathbf{H}_\rho}{\det \mathbf{B}}. \quad (2.18)$$

Это инвариантная версия результата из [3]. При $\rho = 1$ равенство (2.18) дает (2.8).

Обе части равенства (2.18) – многочлены степени m относительно *дискриминанта Хилла* $\rho + \rho^{-1}$ со старшим коэффициентом 1. Действительно, характеристический многочлен $F(\rho) = \det(P - \rho I)$ симплектического оператора P удовлетворяет тождеству $F(\rho) = \rho^{2m} F(\rho^{-1})$. Поэтому $\rho^{-m} F(\rho)$ симметричен относительно ρ и ρ^{-1} . Таким образом, он является функцией от $\rho + \rho^{-1}$.

В координатах $\mathbf{H}_\rho$ есть $(mn \times mn)$ -матрица, совпадающая с $\mathbf{H}$ за двумя исключениями: в правом верхнем $(m \times m)$ -блоке $-B_n$ заменен на $-\rho^{-1}B_n$ и в левом нижнем $(m \times m)$ -блоке $-B_n^*$ заменен на $-\rho B_n^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. Покажем, что $G(\rho) = \det(\mathbf{B}_\rho^{-1}\mathbf{H}_\rho)$ – многочлен степени $2m$ со старшим коэффициентом, равным 1.

Положим $\nu = \rho^{1/n}$ и произведем замену переменных $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{w}$, $u_j = \nu^j w_j$. Тогда оператор $\mathbf{H}_\rho$ заменится на $\hat{\mathbf{H}}_\rho: X \rightarrow X^*$, где

$$(\hat{\mathbf{H}}_\rho \mathbf{w})_j = A_j w_j - \nu^{-1} B_{j-1} w_{j-1} - \nu B_j^* w_{j+1}, \quad w_n = w_0, \quad w_{n+1} = w_1.$$

Следовательно,

$$\hat{\mathbf{H}}_\rho = \mathbf{A} + \nu^{-1}\mathbf{B} + \nu\mathbf{B}^*.$$

Аналогично, $\mathbf{B}_\rho$ меняется на $\hat{\mathbf{B}}_\rho = \nu^{-1}\mathbf{B}$. В силу инвариантности определителя,

$$G(\rho) = \det(\hat{\mathbf{B}}_\rho^{-1}\hat{\mathbf{H}}_\rho) = \det(\nu\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} + I + \nu^2\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}^*)$$

– многочлен степени $2mn$ по ν . Так как $\mathbf{B}_\rho$, $\mathbf{H}_\rho$ линейны по ρ , ρ^{-1} , то $G(\rho)$ – многочлен по ρ , ρ^{-1} . Таким образом, $G(\rho)$ – многочлен степени $2m$ по ρ . Старший коэффициент равен $\det(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}^*) = 1$.

Имеем: $\mathbf{H}_\rho \mathbf{u} = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{u}$ удовлетворяет уравнениям в вариациях и $u_n = \rho u_0$, $u_{n+1} = \rho u_1$ или $Pw = \rho w$, где $w = (u_0, u_1)$. Следовательно, равенство $F(\rho) = \det(P - \rho I) = 0$ эквивалентно равенству $\det \mathbf{H}_\rho = 0$. Таким образом, многочлены $F(\rho)$ и $G(\rho)$ имеют одинаковые корни и, значит, совпадают.

2.5. Некоторые приложения. Из равенства (2.8) вытекает, что динамическая невырожденность периодической траектории эквивалентна геометрической невырожденности: $\det \mathbf{H} = 0 \Leftrightarrow \det(P - I) = 0$. В сущности, доказательство теоремы 2.2 основано на этом факте.

Равенство (2.8) дает

$$\sigma(\mathbf{x})(-1)^m \det \mathbf{H} \det(P - I) > 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Предположим, что $\sigma(\mathbf{x})(-1)^{m+\text{ind } \mathbf{H}} < 0$. Тогда $\mathbf{x}$ динамически неустойчива: существует вещественный мультипликатор $\rho > 1$.*

Например, условие следствия выполнено, когда $\sigma(\mathbf{x})(-1)^m < 0$ и $\mathbf{x}$ – невырожденный локальный минимум функции действия $\mathcal{A}$.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. *Предположим, что $\sigma(\mathbf{x})(-1)^{m+n} < 0$ и $\mathbf{x}$ – точка невырожденного локального максимума функции действия $\mathcal{A}$. Тогда $\mathbf{x}$ имеет вещественный мультипликатор $\rho > 1$.*

Действительно, достаточно использовать следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Если $\det(P - I) < 0$, то существует вещественный мультипликатор $\rho > 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим характеристический многочлен $F(\rho) = \det(P - \rho I)$. Его корни – мультипликаторы периодического решения $\mathbf{x}$. Имеем: $F(+\infty) = +\infty$ и $F(1) = \det(P - I) < 0$. Тогда существует вещественный корень $\rho > 1$.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Если $\sigma(\mathbf{x})(-1)^{\text{ind } \mathbf{H}_{-1}} < 0$, то существует вещественный мультипликатор $\rho < -1$.

Действительно, при $\rho = -1$ формула Хилла (2.18) дает

$$\sigma(\mathbf{x}) \det \mathbf{H}_{-1} \det(I + P) > 0.$$

Пусть $\mathbf{x}^2$ – удвоение периодической траектории $\mathbf{x}$, т.е. соответствующая $2n$ -периодическая траектория.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Предположим, что $\sigma(\mathbf{x})(-1)^{\text{ind } \mathbf{H}(\mathbf{x}^2) - \text{ind } \mathbf{H}(\mathbf{x})} < 0$. Тогда траектория $\mathbf{x}$ экспоненциально неустойчива.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как всякое $2n$ -периодическое векторное поле вдоль траектории $\mathbf{x}^2$ представляется в виде суммы n -периодического и n -антипериодического, то $\text{ind } \mathbf{H}(\mathbf{x}^2) = \text{ind } \mathbf{H}(\mathbf{x}) + \text{ind } \mathbf{H}_{-1}(\mathbf{x})$. Остается воспользоваться следствием 2.3.

В случае $m = 1$ появляется возможность установить факт гиперболичности или эллиптичности в терминах индекса.

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Предположим, что $m = 1$. Тогда невырожденная периодическая траектория $\mathbf{x}$ гиперболична в том и только том случае, когда $\text{ind } \mathbf{x}^2$ четный, и эллиптична, когда $\text{ind } \mathbf{x}^2$ нечетный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Гиперболичность $\mathbf{x}$ эквивалентна гиперболичности $\mathbf{x}^2$. При $m = 1$ траектория $\mathbf{x}^2$ гиперболична тогда и только тогда, когда она имеет мультипликатор $\rho > 1$. Это эквивалентно неравенству $\sigma(\mathbf{x}^2)(-1)^{1 + \text{ind } \mathbf{H}(\mathbf{x}^2)} < 0$. Остается заметить, что $\sigma(\mathbf{x}^2) = \sigma^2(\mathbf{x}) > 0$.

Рассмотрим выпуклый бильярд в области, ограниченной гиперповерхностью M в $\mathbb{R}^{n+1}$. Тогда соответствующее действие является длиной и, согласно предложению 2.1, $\det B(x, y) > 0$. Следовательно, $\sigma = (-1)^n$ и мы получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2.6. Предположим, что $(-1)^{m+n+\text{ind } \mathbf{H}(\mathbf{x})} < 0$. Тогда $\mathbf{x}$ экспоненциально неустойчива согласно следствию 2.1.

В частности, $\mathbf{x}$ экспоненциально неустойчива в каждом из следующих двух случаев:

- если m нечетно и $\mathbf{x}$ – невырожденный локальный максимум функционала длины;
- если $m + n$ нечетно и $\mathbf{x}$ – невырожденный минимум функционала длины.

При $m = 1$ по теореме Биркгофа [21] (см. также [6]) любой выпуклый бильярд имеет (по крайней мере) две периодические траектории периода n с числом вращения $k < n$, причем одна из них – максимум длины и, следовательно, в общем случае гиперболична. Другая имеет индекс 1, и, значит, $\det(P - I) > 0$. Отсюда следует, что эта траектория не имеет вещественных мультипликаторов $\rho > 1$. Действительно, если бы такой мультипликатор существовал, другой был бы тоже вещественным и больше 1. Это противоречит равенству $\det P = 1$.

Задача об устойчивости для бильярдных траекторий периода 2 систематически изучена в недавней работе [17]. В этом случае характеристический многочлен, как функция $\rho + \rho^{-1}$, может быть представлен как определитель

некоторой $(m \times m)$ -матрицы. Эта матрица явно задается матрицами вторых фундаментальных форм поверхности M в конечных точках траектории.

Требование четности для n в условии гиперболичности для периодической траектории минимальной длины ($m = 1$) на первый взгляд представляется странным, поскольку билиардная траектория, минимизирующая $\mathcal{A}$, естественно ассоциируется с локально кратчайшей замкнутой геодезической на двумерном римановом многообразии. Согласно Пуанкаре [2], такие геодезические гиперболичны. Однако следует иметь в виду, что этот результат Пуанкаре верен лишь для ориентируемых геодезических (см. детали в разделе 5), а периодическая траектория билиарда с нечетным периодом должна ассоциироваться с неориентируемой геодезической.

Простой пример эллиптической билиардной траектории, минимизирующей действие и имеющей нечетный период можно построить следующим образом. Пусть кривая билиарда является остроугольным треугольником ABC . Тогда, согласно известной теореме из планиметрии, основания высот A', B', C' образуют треугольник (ортотреугольник), доставляющий локальный невырожденный минимум билиардного действия (рис. 1, а)). Соответствующая периодическая траектория параболична: ее мультипликаторы $\rho_{1,2}$ равны -1 .

Рис. 1. Деформация параболической периодической орбиты

Малая деформация билиардной кривой не разрушает периодическую траекторию $A'B'C'$, а лишь слегка деформирует ее. Если граничная кривая становится вогнутой, получаем билиард Синая [22]. В этом случае траектория гиперболична (рис. 1, b)). Если граничная кривая становится строго выпуклой (кривизна становится положительной, см. рис. 1, c)), то траектория становится эллиптической, все еще оставаясь локальным минимумом действия, пока деформация мала.

3. Непрерывная симметрия в ДЛС

3.1. Дискретная симметрия. Диффеоморфизм $\psi: M \rightarrow M$ называется дискретной симметрией лагранжиана L , если отображение $\tilde{\psi} = \psi \times \psi: M^2 \rightarrow M^2$, $\tilde{\psi}(x, y) = (\psi(x), \psi(y))$ сохраняет L :

$$L(\psi(x), \psi(y)) = L(x, y).$$

Более общее определение состоит в том, что ψ сохраняет L с точностью до коцикла:

$$L(\psi(x), \psi(y)) = L(x, y) + f(x) - f(y).$$

Если существует функция g такая, что $g \circ \psi - g = f$, то ψ сохраняет калибровочно эквивалентный лагранжиан $\widehat{L}(x, y) = L(x, y) + g(x) - g(y)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Симметрия переводит траекторию ДЛС в траекторию, так что $\widetilde{\psi} \circ T = T \circ \widetilde{\psi}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как ψ сохраняет действие $\mathcal{A}$, то она переводит критические точки в критические точки.

Если ДЛС (M, L) допускает дискретную группу симметрий Γ , то, в принципе, от симметрии можно избавиться путем факторизации $\widetilde{M} = M/\Gamma$ конфигурационного пространства. Однако полезно иметь в виду следующие два аспекта.

1. Так как в общей ситуации $L(x, y) \neq L(g_1 x, g_2 y)$ при $g_1 \neq g_2$, то после факторизации M/Γ лагранжиан становится многозначным. Это явление эффективно используется при построении символической динамики методом антиинтегрируемого предела, см. [23], [24] (более общая постановка обсуждается в [25], а в [26] имеется непрерывный аналог).

2. Периодическая траектория исходной системы может перейти в траекторию факторизованной системы с меньшим периодом. При этом траектория может потерять ориентируемость. Более того, само конфигурационное пространство может потерять ориентируемость. Это происходит, например, в случае бильярда внутри выпуклой гиперповерхности $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$, симметричной относительно начала координат. Тогда $G = \{\text{id}, S\}$, где $S(x) = -x$. В этом случае $\widehat{M} = M/G$ гомеоморфно m -мерному проективному пространству, которое при четных m неориентируемо.

3.2. Нётерова симметрия. Пусть $\mathbf{w}$ – гладкое векторное поле на конфигурационном пространстве M и $\psi_s: M \rightarrow M$ – его фазовый поток. Скажем, что $\mathbf{w}$ – *поле симметрий* для ДЛС, если ψ_s – симметрия для L при всех s .

Определим векторные поля $\mathbf{w}_1 = (\mathbf{w}, 0)$ и $\mathbf{w}_2 = (0, \mathbf{w})$ на M^2 . Пусть $\widetilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = (\mathbf{w}, \mathbf{w})$ – векторное поле, соответствующее действию группы $\widetilde{\psi}_s = \psi_s \times \psi_s$. Имеем эквивалентную версию определения: $\mathbf{w}$ – поле симметрий для L тогда и только тогда, когда

$$D_{\widetilde{\mathbf{w}}} L(x, y) = D_{\mathbf{w}} f(x) - D_{\mathbf{w}} f(y) \quad (3.1)$$

для некоторой функции f на M . Если заменить L его надлежащей калибровкой, то равенство (3.1) можно заменить на следующее:

$$D_{\widetilde{\mathbf{w}}} L = D_{\mathbf{w}_1} L + D_{\mathbf{w}_2} L = 0. \quad (3.2)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Пусть $\mathbf{w}$ – поле симметрий для L . Тогда*

$$\mathcal{J} = D_{\mathbf{w}_1} L = -D_{\mathbf{w}_2} L$$

– первый интеграл соответствующей ДЛС, т. е. $\mathcal{J} \circ T = \mathcal{J}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $(y, z) = T(x, y)$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(x, y) - \mathcal{J}(y, z) &= D_{\mathbf{w}_2}L(y, z) - D_{\mathbf{w}_2}L(x, y) \\ &= D_{\mathbf{w}_2}L(y, z) + D_{\mathbf{w}_1}L(y, z) = D_{\tilde{\mathbf{w}}}L(y, z) = 0.\end{aligned}$$

Равенство нулю справедливо в силу (3.2).

Мы называем $\mathcal{J}$ нётеровым интегралом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть $\mathbf{w}$ – поле симметрий. Тогда действие группы $\tilde{\psi}_s: M^2 \rightarrow M^2$ сохраняет $\mathcal{J}$. Эквивалентно, $\tilde{\mathbf{w}}$ касательно к поверхностям уровня

$$N_c = \mathcal{J}^{-1}(c) \subset M^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для производной $\mathcal{J}$ вдоль $\tilde{\mathbf{w}}$ имеем

$$D_{\tilde{\mathbf{w}}}\mathcal{J} = (D_{\mathbf{w}_1} + D_{\mathbf{w}_2})D_{\mathbf{w}_1}L = 0,$$

согласно (3.2), так как дифференциальные операторы $D_{\mathbf{w}_1}$ и $D_{\mathbf{w}_1} + D_{\mathbf{w}_2}$ коммутируют.

Отметим, что $\mathcal{J}$ является гамильтонианом, порождающим группу $\tilde{\psi}_s$ преобразований, симплектических относительно симплектической формы (2.4) на M^2 .

3.3. Понижение порядка по Раусу. Предположим, что система (M, L) допускает k коммутирующих независимых полей симметрий $\mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^k$:

$$[\mathbf{w}^\alpha, \mathbf{w}^\beta] = 0, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, k.$$

Тогда потоки $\psi_s^\alpha: M \rightarrow M$ полей симметрий коммутируют. Пусть G – соответствующая коммутативная группа, действующая на M :

$$x \mapsto \psi_s(x) = \psi_{s_1}^1 \circ \dots \circ \psi_{s_k}^k(x), \quad s \in \mathbb{R}^k.$$

В общей ситуации потоки $\psi_{s_\alpha}^\alpha$ могут оказаться неполными и тогда G является локальной группой, действующей на M . Так как мы интересуемся окрестностью периодической орбиты, эти нелокальные проблемы для нас несущественны. Предположим, что $\tilde{M} = M/G$ – гладкое многообразие и $\pi: M \rightarrow \tilde{M}$ – гладкое расслоение (по крайней мере локально это всегда так).

Пусть $\mathcal{J}^\alpha$ – нётеров интеграл на (M, L) , соответствующий $\mathbf{w}^\alpha$, а $\mathcal{J} = (\mathcal{J}^1, \dots, \mathcal{J}^k)$ – соответствующий векторный интеграл. Зафиксируем значение $c \in \mathbb{R}^k$ и ограничим T на множество уровня $N_c = \mathcal{J}^{-1}(c) \subset M^2$. Согласно предложению 3.3, группа G действует на N_c . Если $\tilde{M}$ – гладкое многообразие, то $\tilde{N} = N_c/G$ – также гладкое многообразие и T определяет отображение $\tilde{T}: \tilde{N} \rightarrow \tilde{N}$. Оно симплектично относительно симплектической факторструктуры $\tilde{\omega}$ на $\tilde{N}$. Мы собираемся представить $\tilde{T}$ как дискретную лагранжеву систему с конфигурационным пространством $\tilde{M}$ и лагранжианом $\tilde{L}$ на $\tilde{M} \times \tilde{M}$. Для этого нам потребуется следующее условие.

УСЛОВИЕ НЕВЫРОЖДЕННОСТИ. Матрица $G = (g^{\alpha\beta})$, где

$$g^{\alpha\beta}(x, y) = \langle B(x, y)\mathbf{w}^\alpha(x), \mathbf{w}^\beta(y) \rangle, \quad x, y \in M, \quad (3.3)$$

невырождена.

Предположим сначала, что $c = 0$. Пусть $f(x, y) \in \mathbb{R}^k$ – критическая точка функции $s \mapsto L(x, \psi_s(y))$ при условии, что она существует и единственна. Гессиан этой функции равен $G(x, \psi_s(y))$ и, следовательно, невырожден. Редуцированный лагранжиан определяется равенством

$$\tilde{L}(x, y) = L(x, \psi_{f(x, y)}(y)). \quad (3.4)$$

Так как $\tilde{L}(x, y) = \tilde{L}(\tilde{x}, \tilde{y})$ зависит лишь от $\tilde{x} = \pi(x)$ и $\tilde{y} = \pi(y)$, то он является функцией на $\widetilde{M} \times \widetilde{M}$.

Теперь предположим, что $c = (c^1, \dots, c^k) \neq 0$. Локально существуют гладкие функции ϕ_β , $\beta = 1, \dots, k$, на M такие, что $D_{\mathbf{w}^\alpha} \phi_\beta = \delta_\beta^\alpha$. В общей ситуации имеются топологические препятствия к существованию однозначных глобально определенных ϕ_α . Однако, если $\pi: M \rightarrow \widetilde{M}$ имеет слой $\mathbb{R}^k$, то ϕ_α существуют глобально. Впрочем, поскольку мы работаем в окрестности периодической орбиты, это для нас несущественно.

Заменим L калибровочно эквивалентным лагранжианом⁵

$$\hat{L}(x, y) = L(x, y) + c^\alpha (\phi_\alpha(y) - \phi_\alpha(x)).$$

Тогда $\mathcal{J}^\alpha$ заменяется на

$$\hat{\mathcal{J}}^\alpha = \mathcal{J}^\alpha - c^\beta D_{\mathbf{w}^\alpha} \phi_\beta = \mathcal{J}^\alpha - c^\alpha.$$

Теперь $\hat{c} = 0$, так что $\tilde{L}$ можно определить с помощью (3.4), где L заменен на $\hat{L}$.

Теорема Рауса для дискретных лагранжевых систем выглядит следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Проекция $\pi: M \rightarrow \widetilde{M}$ переводит траектории системы (M, L) с $\mathcal{J} = c$ в траектории редуцированной лагранжевой системы $(\widetilde{M}, \tilde{L})$.*

Теперь мы дадим координатную версию понижения порядка по Раусу. Так как результат локален, достаточно произвести редукцию около данной траектории $\mathbf{x}^0 = (x_i^0)$. Поскольку векторные поля $\mathbf{w}^\alpha$ независимы и коммутируют, в окрестности U_i точки x_i^0 существуют локальные координаты $y_i \in \mathbb{R}^{m-k}$, $z_i \in \mathbb{R}^k$ такие, что $\mathbf{w}^\alpha|_{U_i} = \partial/\partial z_i^\alpha$. Аналогично непрерывному случаю, координаты z_i^α называются циклическими. Переменные $y_i \in \mathbb{R}^{m-k}$ – локальные координаты на $\widetilde{M}$. Равенство (3.2) означает, что

$$L(x_i, x_{i+1}) = \mathcal{L}(y_i, y_{i+1}, u_i), \quad u_i = z_{i+1} - z_i.$$

Согласно (3.3), матрица

$$G_i = - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial z_i^\alpha \partial z_{i+1}^\beta} \right) = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u_i^\alpha \partial u_i^\beta} \right) = (g_i^{\alpha\beta}) \quad (3.5)$$

невырождена.

Без потери общности предположим, что $c = 0$. Тогда

$$\mathcal{J} = \partial_{u_i} \mathcal{L}(y_i, y_{i+1}, u_i) = 0. \quad (3.6)$$

⁵Мы пользуемся эйнштейновым правилом суммирования по повторяющимся греческим (но не латинским) индексам.

Равенство (3.6) можно локально разрешить относительно $u_i = f_i(y_i, y_{i+1})$. Тогда функция Рауса определяется следующим образом:

$$\tilde{L}(y_i, y_{i+1}) = \mathcal{L}(y_i, y_{i+1}, f_i(y_i, y_{i+1})). \quad (3.7)$$

Следовательно,

$$\partial_{y_i} \tilde{L}(y_i, y_{i+1}) = \partial_{y_i} \mathcal{L}(y_i, y_{i+1}, u_i) \big|_{u_i=f(y_i, y_{i+1})}, \quad (3.8)$$

и аналогично для производной по y_{i+1} .

Предположим, что $x_i = (y_i, z_i)$ – траектория системы (M, L) с $\mathcal{J} = 0$. Тогда

$$\partial_{y_i} (\mathcal{L}(y_{i-1}, y_i, u_{i-1}) + \mathcal{L}(y_i, y_{i+1}, u_i)) = 0.$$

Согласно (3.8),

$$\partial_{y_i} (\tilde{L}(y_{i-1}, y_i) + \tilde{L}(y_i, y_{i+1})) = 0,$$

так что (y_i) – траектория редуцированной системы $(\tilde{M}, \tilde{L})$.

Чтобы завершить доказательство теоремы Рауса, остается показать, что $\tilde{L}$ – дискретный лагранжиан, т. е. он удовлетворяет условию закручивания (с. 10). Это вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 3.1. Пусть $\tilde{B}_i = \tilde{B}(y_i, y_{i+1}) = -\partial_{12} \tilde{L}(y_i, y_{i+1})$ и $B_i = B(x_i, x_{i+1})$. Тогда

$$\det \tilde{B}_i = \frac{\det B_i}{\det G_i} \neq 0. \quad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим $(g_{\alpha\beta i}) = G_i^{-1}$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial y_i} f_\alpha(y_i, y_{i+1}) = -g_{\alpha\beta i} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial u_i^\beta} \mathcal{L}(y_i, y_{i+1}, u_i) \big|_{u_i=f_i(y_i, y_{i+1})}. \quad (3.10)$$

Продифференцируем (3.8) по y_{i+1} , используя (3.10):

$$-\tilde{B}_i = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y_i \partial y_{i+1}} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_{i+1}} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial u_i^\alpha \partial y_i} = \frac{\partial^2 L}{\partial y_i \partial y_{i+1}} + g_{\alpha\beta i} \frac{\partial^2 L}{\partial y_{i+1} \partial z_{i+1}^\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial y_i \partial z_i^\beta},$$

или, в матричных обозначениях, $\tilde{B}_i^{jk} = B_i^{jk} - B_i^{\alpha j} g_{\alpha\beta i} B_i^{k\beta}$. Остается упражнение по линейной алгебре.

3.4. Симплектическая редукция для отображения Пуанкаре. Предположим, что периодическая траектория вырождена. Тогда линейное отображение Пуанкаре $P: W \rightarrow W$ имеет единичное собственное значение: существует вектор $w \neq 0$ такой, что $Pw = w$. Так как P симплектическое, то $\omega(w, Pu) = \omega(w, u)$, так что $J_w(u) = \omega(w, u)$ – линейный первый интеграл P . Тогда можно редуцировать P к линейному симплектическому отображению $\tilde{P}: \tilde{W} \rightarrow \tilde{W}$ меньшей размерности.

В этом пункте мы имеем дело с симплектической линейной алгеброй, и происхождение симплектического отображения P несущественно. В частности, предлагаемые ниже обозначения будут использоваться как в дискретной, так и в непрерывной лагранжевых системах.

Предположим, что имеется несколько собственных векторов, соответствующих единичному собственному значению. Пусть $V \subset \{w \in W : Pw = w\}$ – собственное подпространство. Тогда P имеет первый интеграл $J: W \rightarrow V^*$: $\langle J(u), w \rangle = J_w(u)$ при $w \in V$. Предположим, что V изотропно: $\omega|_V = 0$. Тогда $V \subset J^{-1}(0)$. Положим $\widetilde{W} = J^{-1}(0)/V$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5 (Пуанкаре). *P порождает редуцированный симплектический оператор $\tilde{P}: \widetilde{W} \rightarrow \widetilde{W}$ такой, что диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{P} & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{W} & \xrightarrow{\tilde{P}} & \widetilde{W} \end{array}$$

коммутативна. Более того,

$$\det(P - \rho I_W) = (1 - \rho)^{2k} \det(\tilde{P} - \rho I_{\widetilde{W}}), \quad k = \dim V.$$

3.5. Понижение порядка по Раусу для линейных дискретных лагранжевых систем. Теперь мы переведем предложение 3.5 на язык системы уравнений в вариациях, т. е. линейной лагранжевой системы (E, Λ) . Каждому собственному вектору w отображения Пуанкаре P соответствует ненулевое n -периодическое решение $\mathbf{w} = (w_i)$ уравнений в вариациях. Периодическому решению $\mathbf{w}$ соответствует линейный периодический первый интеграл

$$I_j(u_j, u_{j+1}) = \langle B_j w_j, u_{j+1} \rangle - \langle B_j u_j, w_{j+1} \rangle.$$

В самом деле, если $\mathbf{u} = (u_j)$ – решение системы (2.14), то

$$\begin{aligned} 0 &= \langle A_j w_j - B_j^* w_{j+1} - B_{j-1} w_{j-1}, u_j \rangle - \langle A_j u_j - B_j^* u_{j+1} - B_{j-1} u_{j-1}, w_j \rangle \\ &= I_j(u_j, u_{j+1}) - I_{j-1}(u_{j-1}, u_j). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$I_{j-1}(u_{j-1}, u_j) = I_j(u_j, u_{j+1}). \quad (3.11)$$

Несложно показать, что $I_j(u_j, u_{j+1}) = J_w(u)$, где J_w – интеграл отображения Пуанкаре, а $u \in W$ соответствует траектории (u_j) .

Теперь предположим, что имеется несколько собственных векторов, и пусть $V \subset \text{Ker}(P - I)$ – изотропное подпространство. Обозначим через $\Gamma \subset X$ пространство периодических траекторий, соответствующее V . Пусть $w^\alpha \in V$, $\alpha = 1, \dots, k$, – базис в V . Тогда соответствующие периодические траектории $\mathbf{w}^\alpha = (w_i^\alpha)$ образуют базис в γ . Пусть

$$I_j^\alpha(u_j, u_{j+1}) = \langle B_j w_j^\alpha, u_{j+1} \rangle - \langle B_j u_j, w_{j+1}^\alpha \rangle$$

– соответствующие интегралы уравнений в вариациях. Так как V изотропно, интегралы коммутируют:

$$I_j^\alpha(w_j^\beta, w_{j+1}^\beta) = \langle B_j w_j^\alpha, w_{j+1}^\beta \rangle - \langle B_j w_j^\beta, w_{j+1}^\alpha \rangle = \omega(w^\alpha, w^\beta) = 0. \quad (3.12)$$

Иногда мы пишем $I_j = (I_j^1, \dots, I_j^k)$.

Далее нам понадобится несколько условий невырожденности.

УСЛОВИЕ А. *Симметрическая матрица*

$$G_i = (g_i^{\alpha\beta}), \quad g_i^{\alpha\beta} = \langle B_i w_i^\alpha, w_{i+1}^\beta \rangle,$$

невыврождена при всех i . Обозначим $(g_{\alpha\beta i}) = (g_i^{\alpha\beta})^{-1} = G_i^{-1}$.

УСЛОВИЕ В. *Матрица*

$$\bar{G} = \sum_{i=1}^n G_i^{-1} = (\bar{g}_{\alpha\beta}), \quad \bar{g}_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^n g_{\alpha\beta i}, \quad (3.13)$$

невыврождена.

Многие из наших результатов верны без условия В, так что мы наложим его позже. Условие А используется почти везде, так что мы считаем, что оно выполнено уже сейчас. В случае НЛС также вводится аналог условия А, но в конце концов он оказывается несущественным (см. приложение А.3). Аналог условия В для НЛС выполнен всегда.

Обозначим

$$F_i = \{w_i : \mathbf{w} \in \Gamma\} = \text{span}(w_i^1, \dots, w_i^k) \subset E_i.$$

Редуцированное отображение Пуанкаре $\tilde{P}$ соответствует редуцированной линейной лагранжевой системе $(\tilde{E}, \tilde{\Lambda})$ с $\tilde{E}_i = E_i/F_i$, полученной в результате понижения порядка по Раусу из системы (E, Λ) . Если выполнено условие А, то $\dim F_i = k$ и редуцированное конфигурационное пространство $\tilde{E}_i = E_i/F_i$ можно отождествить с

$$E_i^\perp = \{u \in E_i : \langle B_{i-1} w_{i-1}^\alpha, u \rangle = 0, \alpha = 1, \dots, k\}$$

с помощью проекции $\Pi_i : E_i \rightarrow E_i^\perp$:

$$\Pi_i u = u_i - g_{\alpha\beta i} \langle B_{i-1} w_{i-1}^\alpha, u \rangle w_i^\beta. \quad (3.14)$$

Представим любой вектор $u_i \in E_i$ в виде

$$u_i = v_i + \lambda_{\beta i} w_i^\beta, \quad v_i = \Pi_i u_i \in E_i^\perp, \quad \lambda_{\beta i} = g_{\alpha\beta i-1} \langle B_{i-1} w_{i-1}^\alpha, u \rangle. \quad (3.15)$$

Понижение порядка по Раусу для ДЛС описывается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\mathbf{u} = (u_i)$, $u_i \in E_i$, – траектория системы (E, Λ) такая, что $I_i(u_i, u_{i+1}) = 0$. Тогда $\mathbf{v} = (v_i)$, $v_i = \Pi_i u_i \in E_i^\perp$, – траектория линейной лагранжевой системы $(E^\perp, \Lambda^\perp)$ с лагранжианом

$$\Lambda_i^\perp(v_i, v_{i+1}) = \frac{1}{2} \langle A_i v_i, v_i \rangle - \langle B_i v_i, v_{i+1} \rangle - \frac{1}{2} \langle C_i v_i, v_i \rangle,$$

где

$$\langle C_i v_i, v_i \rangle = g_{\alpha\beta i} \langle B_i v_i, w_{i+1}^\alpha \rangle \langle B_i v_i, w_{i+1}^\beta \rangle.$$

Обратно, если $\mathbf{v}$ – траектория системы $(E^\perp, \Lambda^\perp)$, то существует траектория $\mathbf{u}$ системы (E, Λ) , определенная по модулю Γ , такая, что $I_i(u_i, u_{i+1}) = 0$ и $\Pi \mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Для доказательства нам понадобится следующая очевидная лемма.

ЛЕММА 3.2. Пусть $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ таковы, что $u_i - v_i \in F_i$:

$$u_i = v_i + \lambda_{\beta i} w_i^\beta.$$

Тогда равенства $I_i^\alpha(u_i, u_{i+1}) = c^\alpha$ при всех $\alpha = 1, \dots, k$ и всех i выполнены в том и только том случае, когда

$$\Delta \lambda_{\alpha i} = \lambda_{\alpha i+1} - \lambda_{\alpha i} = g_{\alpha \beta i} (c^\beta - I_i^\beta(v_i, v_{i+1})). \quad (3.16)$$

Равенство (3.16) следует из

$$c^\alpha = I_i^\alpha(u_i, u_{i+1}) = I_i^\alpha(v_i, v_{i+1}) + g_i^{\alpha \beta} \Delta \lambda_{\beta i}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Пусть $\mathbf{u} = (u_i)$, $u_i \in E_i$, – траектория системы (E, Λ) такая, что $I_i^\alpha(u_i, u_{i+1}) = 0$. Тогда для любой вариации $\phi_i \in E_i$ такой, что $\phi_i = 0$ для всех i , кроме $i = 1, \dots, n$, имеем

$$0 = h(\mathbf{u}, \phi) = \sum_{i=1}^n \langle A_i u_i - B_i^* u_{i+1} - B_{i-1} u_{i-1}, \phi_i \rangle.$$

Пусть $\mathbf{v} = \Pi \mathbf{u}$. Ввиду (3.15) и (3.16),

$$I_i^\alpha(v_i, v_{i+1}) = -\langle B_i v_i, w_{i+1}^\alpha \rangle, \quad \Delta \lambda_{\alpha i} = g_{\alpha \beta i} \langle B_i v_i, w_{i+1}^\beta \rangle.$$

Выберем вариацию ϕ так, что $\phi_i \in E_i^\perp$. Используя

$$A_i w_i^\alpha = B_{i-1} w_{i-1}^\alpha + B_i^* w_{i+1}^\alpha \quad (3.17)$$

и $\langle B_{i-1} w_{i-1}^\beta, \phi_i \rangle = 0$, получаем

$$\begin{aligned} h(\mathbf{u}, \phi) &= \sum_{i=1}^n \langle A_i v_i - B_i^* v_{i+1} - B_{i-1} v_{i-1}, \phi_i \rangle - \sum_{i=1}^n \Delta \lambda_{\beta i} \langle B_i \phi_i, w_{i+1}^\beta \rangle \\ &= h(\mathbf{v}, \phi) - \sum_{i=1}^n g_{\alpha \beta i} \langle B_i v_i, w_{i+1}^\alpha \rangle \langle B_i \phi_i, w_{i+1}^\beta \rangle = h^\perp(\mathbf{v}, \phi), \end{aligned}$$

где

$$h^\perp(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = h(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \sum_{i=1}^n g_{\alpha \beta i} \langle B_i v_i, w_{i+1}^\alpha \rangle \langle B_i v_i, w_{i+1}^\beta \rangle. \quad (3.18)$$

Это квадратичный функционал действия для системы $(E^\perp, \Lambda^\perp)$. Так как $\phi_i \in E_i^\perp$, $i = 1, \dots, n$, произвольны, то $\mathbf{v}$ – траектория системы $(E^\perp, \Lambda^\perp)$. Доказательство обратного утверждения опустим.

Для n -периодической последовательности $\mathbf{v}$ билинейная форма $h^\perp$ на $X^\perp = E_1^\perp \times \dots \times E_n^\perp$ имеет вид

$$h^\perp(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n \langle A_i^\perp v_i - B_i^{\perp *} v_{i+1} - B_{i-1}^\perp v_{i-1}, v_i \rangle, \quad v_{n+1} = v_1, \quad v_0 = v_n, \quad (3.19)$$

где

$$A_i^\perp = R_i(A_i - C_i), \quad B_i^\perp = R_{i+1}B_i$$

и $R_i: E_i^* \rightarrow (E_i^\perp)^*$ – отображение ограничения. Редуцированная система уравнений в вариациях имеет вид

$$A_i^\perp v_i - B_i^{\perp*} v_{i+1} - B_{i-1}^\perp v_{i-1} = 0.$$

Пусть $\mathbf{H}^\perp, \mathbf{B}^\perp: X^\perp \rightarrow X^{\perp*}$ – соответствующие линейные операторы. Положим также

$$\sigma^\perp \beta^\perp = \left(\prod \det B_i^\perp \right)^{-1}, \quad \beta^\perp > 0, \quad \sigma^\perp \in \{1, -1\}.$$

Тогда, аналогично (2.12),

$$\det \mathbf{B}^\perp = (-1)^{m-k} \prod \det B_i^\perp.$$

Теорема Хилла 2.1, примененная к редуцированной системе, дает следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Справедлива редуцированная формула Хилла:*

$$\det(\tilde{P} - I) = \frac{\det \mathbf{H}^\perp}{\det \mathbf{B}^\perp} = \sigma^\perp (-1)^{m-k} \beta^\perp \det \mathbf{H}^\perp.$$

Чтобы использовать эту формулу в задачах устойчивости, нам надо знать $\sigma^\perp$ и индекс Морса формы $h^\perp$. Однако соотношение между индексами Морса h и $h^\perp$ неочевидно. Причина состоит в том, что периодическая последовательность $\mathbf{v} \in X^\perp$, вообще говоря, соответствует непериодической последовательности $\mathbf{u} \notin X$ такой, что $I_i(u_i, u_{i+1}) = 0$. Мы обсудим эту проблему в пп. 3.6, 3.7.

Из леммы 3.1 следует, что $\text{ind } B_i = \text{ind } B_i^\perp + \text{ind } G_i \pmod{2}$. Следовательно,

$$\sigma^\perp = (-1)^{\sum \text{ind } B_i^\perp} = \sigma(-1)^{\sum \text{ind } G_i}. \quad (3.20)$$

3.6. Вырожденность h . Пусть $\Gamma \subset X$ обозначает пространство периодических траекторий, соответствующее $V \subset \text{Ker}(P - I)$. Оно является линейной оболочкой векторов $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k \in X$. Так как $\mathbf{H}\mathbf{w} = 0$ при $\mathbf{w} \in \Gamma$, то билинейная форма $h(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \langle \mathbf{H}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ невырождена и определяет билинейную форму $\hat{h}$ на $\hat{X} = X/\Gamma$. Чтобы сравнить h с $h^\perp$, нам придется ограничить h на множество уровня интегралов I . Пусть

$$Y = \{\mathbf{u} \in X : I_1(u_1, u_2) = \dots = I_n(u_n, u_1)\}, \quad (3.21)$$

$$Z = \{\mathbf{v} \in X : v_i \in F_i\} = \{\mathbf{v} \in X : v_i = \lambda_{\alpha i} w_i^\alpha\}. \quad (3.22)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. *Пространства Y и Z h -ортогональны, т. е. $h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ при всех $\mathbf{u} \in Y$ и $\mathbf{v} \in Z$. Более того, Y является h -ортогональным дополнением к Z :*

$$Y = \{\mathbf{u} \in X : h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \text{ для всех } \mathbf{v} \in Z\}.$$

Ограничение h на Z имеет вид

$$h(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n g_i^{\alpha\beta} \Delta \lambda_{\alpha i} \Delta \lambda_{\beta i} = \sum_{i=1}^n \langle G_i \Delta \lambda_i, \Delta \lambda_i \rangle, \quad v_i = \lambda_{\alpha i} w_i^\alpha.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{u} \in Y$ и $\mathbf{v} = (\lambda_{\alpha i} \mathbf{w}_i^\alpha) \in Z$. Тогда

$$\begin{aligned} h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^n \langle A_i u_i - B_i^* u_{i+1} - B_{i-1} u_{i-1}, \lambda_{\alpha i} w_i^\alpha \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_{\alpha i} (\langle A_i u_i, w_i^\alpha \rangle - \langle B_i w_i^\alpha, u_{i+1} \rangle - \langle B_{i-1} u_{i-1}, w_i^\alpha \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_{\alpha i} (\langle A_i w_i^\alpha, u_i \rangle - \langle B_i u_i, w_{i+1}^\alpha \rangle - \langle B_{i-1} w_{i-1}^\alpha, u_i \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^n \langle A_i w_i^\alpha - B_i^* w_{i+1}^\alpha - B_{i-1} w_{i-1}^\alpha, \lambda_{\alpha i} u_i \rangle = 0 \end{aligned}$$

согласно (3.17); мы также использовали равенства

$$\langle B_i w_i^\alpha, u_{i+1} \rangle = \langle B_i u_i, w_{i+1}^\alpha \rangle + c^\alpha, \quad \langle B_{i-1} u_{i-1}, w_i^\alpha \rangle = \langle B_{i-1} w_{i-1}^\alpha, u_i \rangle - c^\alpha.$$

Обратно, если $\mathbf{v} = (\lambda_{\alpha i} w_i^\alpha)$ и $h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ при всех λ_α , то

$$\langle A_i u_i - B_i^* u_{i+1} - B_{i-1} u_{i-1}, w_i^\alpha \rangle = 0.$$

Используя (3.17), получаем

$$I_i^\alpha(u_i, u_{i+1}) = I_{i-1}^\alpha(u_{i-1}, u_i).$$

Таким образом, $\mathbf{u} \in Y$.

Далее мы вычисляем ограничение h на Z . Пусть $\mathbf{v} = (\lambda_{\alpha i} \mathbf{w}_i^\alpha)$. Тогда, ввиду (3.17),

$$\begin{aligned} h(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^n (\lambda_{\alpha i} \lambda_{\beta i} \langle A_i w_i^\alpha, w_i^\beta \rangle - \lambda_{\alpha i} \lambda_{\beta i-1} \langle B_{i-1} w_{i-1}^\alpha, w_i^\beta \rangle \\ &\quad - \lambda_{\alpha i} \lambda_{\beta i+1} \langle B_i w_i^\alpha, w_{i+1}^\beta \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^n (\lambda_{\alpha i} (\lambda_{\beta i} - \lambda_{\beta i+1}) \langle B_i w_i^\alpha, w_{i+1}^\beta \rangle \\ &\quad + \lambda_{\beta i} (\lambda_{\alpha i} - \lambda_{\alpha i-1}) \langle B_{i-1} w_{i-1}^\beta, w_i^\alpha \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^n (g_i^{\alpha\beta} \lambda_{\alpha i} (\lambda_{\beta i} - \lambda_{\beta i+1}) + g_{i-1}^{\alpha\beta} \lambda_{\alpha i} (\lambda_{\beta i} - \lambda_{\beta i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^n g_i^{\alpha\beta} \Delta \lambda_{\alpha i} \Delta \lambda_{\beta i}. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Получаем квадратичную форму на Z :

$$h|_Z(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{H}_Z \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n \langle G_i \Delta \lambda_i, \Delta \lambda_i \rangle = \langle \mathbf{G} \lambda, \lambda \rangle,$$

где $\lambda_i \in \mathbb{R}^k$, $\mathbf{H}_Z: Z \rightarrow Z^*$ и оператор $\mathbf{G}: \mathbb{R}^{kn} \rightarrow \mathbb{R}^{kn}$ задается формулой

$$(\mathbf{G} \lambda)_i = G_{i-1} \Delta \lambda_{i-1} - G_i \Delta \lambda_i.$$

Имеем:

$$\text{Ker } \mathbf{G} = \{\lambda \in \mathbb{R}^{kn} : G_1 \Delta \lambda_1 = \dots = G_n \Delta \lambda_n\}.$$

Следовательно, $\Delta \lambda_i = G_i^{-1} c$. Для $\lambda \in \text{Ker } \mathbf{G}$ из равенства $\sum_{i=1}^n \Delta \lambda_i = 0$ вытекает, что $\overline{G}c = 0$, где $\overline{G}$ – матрица (3.13).

Пусть теперь выполнено условие невырожденности В: матрица $\overline{G}$ – невырождена. Тогда

$$\text{Ker } \mathbf{G} = \{\lambda \in \mathbb{R}^{nk} : \lambda_1 = \dots = \lambda_n\} \quad \text{и} \quad \text{Ker } \mathbf{H}_Z = \Gamma.$$

Положим $\widehat{Z} = Z/\Gamma$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.7. *Форма $h|_{\widehat{Z}}$ невырождена и*

$$\text{ind } h|_{\widehat{Z}} = \sum_{i=1}^n \text{ind } G_i - \text{ind } \overline{G}. \quad (3.23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 3.6, в координатах $\mu_i = \Delta \lambda_i \in \mathbb{R}^k$ имеем $h|_{\widehat{Z}} = \chi|_{\Theta}$, где χ – следующая квадратичная форма на $\mathbb{R}^{nk}$:

$$\chi(\mu, \mu) = \sum_{i=1}^n \langle G_i \mu_i, \mu_i \rangle,$$

а пространство $\Theta \subset \mathbb{R}^{nk}$ определено условием

$$\Theta = \left\{ \mu \in \mathbb{R}^{nk} : \sum_{i=1}^n \mu_i = 0 \right\}.$$

Далее обозначение χ используется также для соответствующей билинейной формы. Рассмотрим k -мерное пространство

$$\Xi = \{\mu \in \mathbb{R}^{nk} : \mu_i = G_i^{-1} \nu, \nu \in \mathbb{R}^k, j = 1, \dots, n\}.$$

Так как $\overline{G}$ невырождена, то $\mathbb{R}^{nk} = \Xi \oplus \Theta$ и, более того, $\chi(\mu, \xi) = 0$ при всех $\mu \in \Theta$ и $\xi \in \Xi$. Следовательно, пространства Ξ и Θ χ -ортогональны и

$$\sum_{i=1}^n \text{ind } G_i = \text{ind } \chi = \text{ind } \chi|_{\Xi} + \text{ind } \chi|_{\Theta} = \text{ind } \overline{G} + \text{ind } h|_{\widehat{Z}}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8. $Y + Z = X$ и $Y \cap Z = \Gamma$.

Это вытекает из следующего утверждения.

ЛЕММА 3.3. *Для любого $\mathbf{v} \in X$ существует $\mathbf{u} = \Phi \mathbf{v} \in Y$, единственный по модулю Γ , такой, что $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in Z$. Более подробно: $u_i = v_i + \lambda_{\beta_i} w_i^{\beta}$, где λ_{β_i} удовлетворяют (3.16) и*

$$c^{\alpha} = \kappa^{\alpha\beta} \sum_{i=1}^n g_{\beta\delta_i} I_i^{\delta}(v_i, v_{i+1}), \quad (\kappa^{\alpha\beta}) = (\bar{g}_{\alpha\beta})^{-1} = \overline{G}^{-1}. \quad (3.24)$$

Отображение $\Phi: X \rightarrow \hat{Y} = Y/\Gamma$ удовлетворяет равенству $\Phi(Z) = 0$ и $\Phi|_Y$ тождественно по модулю Γ . Отсюда немедленно вытекает предложение 3.8.

Чтобы доказать лемму 3.3, для данного $\mathbf{v} \in X$ найдем $\mathbf{u}$ такой, что

$$I_i^\alpha(u_i, u_{i+1}) = c^\alpha = \text{const.}$$

Согласно лемме 3.2, $\lambda_{\alpha i}$ удовлетворяют (3.16). Если $\lambda_{\alpha i}$ n -периодические по i , то $\sum_{i=1}^n \Delta \lambda_{\alpha i} = 0$, откуда получаем (3.24). Если выполнены равенства (3.24), то равенство (3.16) определяет n -периодические $\lambda_{\alpha i}$ по модулю постоянных, не зависящих от i . Итак, $\mathbf{u}$ определен единственным образом по модулю Γ .

Положим $\hat{X} = X/\Gamma$ и соответствующую каноническую проекцию обозначим $\pi_\Gamma: X \rightarrow \hat{X}$. Тогда существует линейное отображение $\hat{\Pi}: \hat{X} \rightarrow X^\perp$ такое, что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi_\Gamma} & \hat{X} \\ & \searrow \Pi & \swarrow \hat{\Pi} \\ & X^\perp & \end{array}$$

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Отображения $\hat{\Pi}|_{\hat{Y}}: \hat{Y} \rightarrow X^\perp$ и $\Phi|_{X^\perp}: X^\perp \rightarrow \hat{Y}$ – взаимно обратные изоморфизмы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\Pi \mathbf{v} = 0$ при $\mathbf{v} \in Y$, то $\mathbf{v} \in Z$ и, следовательно, $\mathbf{v} \in Y \cap Z = \Gamma$ согласно предложению 3.7. Из равенства $Y + Z = X$ следует, что $\Pi|_Y$ сюръективно. Имеем также $\Phi(Z) = 0$.

Пространства $\hat{Y}, \hat{Z} \subset \hat{X}$ ортогональны относительно билинейной формы $\hat{h}$ на $\hat{X}$. Согласно предложению 3.7, $\hat{h}$ невырождена на $\hat{Z}$ и ее индекс дается равенством (3.23).

С точки зрения понижения порядка по Раусу естественно рассмотреть пространство

$$Y^0 = \{\mathbf{u} \in X : I_i(u_i, u_{i+1}) = 0, i = 1, \dots, n\} \subset Y.$$

Определим $\mathbf{d}_\alpha = (d_{\alpha i}) \in X^*$ равенствами

$$d_{\alpha i} = g_{\alpha\beta} i_{i-1} B_{i-1} w_{i-1}^\beta - g_{\alpha\beta} B_i^* w_{i+1}^\beta. \quad (3.25)$$

Отметим, что $\langle d_{\alpha i}, w_i^\alpha \rangle = 0$. Имеем:

$$\langle \mathbf{d}_\alpha, \mathbf{u} \rangle = \sum_{i=1}^n g_{\alpha\beta} I_i^\beta(u_i, u_{i+1}), \quad \mathbf{u} \in X.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.9. *Сумма пространств Y^0 и Z имеет вид*

$$Y^0 + Z = \{\mathbf{v} \in X : \langle \mathbf{d}_\alpha, \mathbf{v} \rangle = 0, \alpha = 1, \dots, k\}. \quad (3.26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{v} \in X$. Тогда $\mathbf{v} \in Y^0 + Z$, $\mathbf{u} = \Phi(\mathbf{v}) \in Y^0$. Согласно лемме 3.3,

$$0 = \sum_{i=1}^n g_{\alpha\beta} I_i^\beta(v_i, v_{i+1}) = \sum_{i=1}^n \langle d_{\alpha i}, v_i \rangle = \langle \mathbf{d}_\alpha, \mathbf{v} \rangle,$$

что и доказывает предложение.

Далее мы вычислим ограничение $h|_Y$. Пусть $h^\perp$ – билинейная форма действия для редуцированной системы $(E^\perp, \Lambda^\perp)$ и $h^\top = h \circ \Phi|_{X^\perp}$, где Φ – оператор из следствия 3.2, – билинейная форма на $X^\perp$, соответствующая $h|_Y$, см. коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} & \hat{Y} & \\ \hat{\Pi}|_{\hat{Y}} \uparrow & \Phi & \searrow \hat{h}|_{\hat{Y}} \\ X^\perp & & \mathbb{R} \\ & \downarrow & \nearrow h^\top \end{array}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.10. Для любого $\mathbf{v} \in X^\perp$

$$h^\top(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = h^\perp(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \bar{g}_{\alpha\beta} c^\alpha c^\beta, \quad (3.27)$$

где коэффициенты $c^\alpha(\mathbf{v})$ определены в (3.24).

Это утверждение следует из более общей формулы, которую мы сейчас докажем.

ЛЕММА 3.4. Пусть $\mathbf{v} \in X$ и $\mathbf{u} = \Phi(\mathbf{v})$. Тогда

$$h(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = h(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \bar{g}_{\alpha\beta} c^\alpha c^\beta + \sum_{i=1}^n g_{\alpha\beta i} I_i^\alpha(v_i, v_{i+1}) I_i^\beta(v_i, v_{i+1}), \quad (3.28)$$

где коэффициенты $c^\alpha(\mathbf{v})$ определены в (3.24).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 3.6,

$$h(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = h(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \sum_{i=1}^n g_i^{\alpha\beta} \Delta \lambda_{\alpha i} \Delta \lambda_{\beta i}.$$

Ввиду (3.16) и (3.24),

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n g_i^{\alpha\beta} \Delta \lambda_{\alpha i} \Delta \lambda_{\beta i} &= \sum_{i=1}^n g_{\alpha\beta i} (c^\alpha - I_i^\alpha(v_i, v_{i+1})) (c^\beta - I_i^\beta(v_i, v_{i+1})) \\ &= \sum_{i=1}^n g_{\alpha\beta i} I_i^\alpha(v_i, v_{i+1}) I_i^\beta(v_i, v_{i+1}) - \bar{g}_{\alpha\beta} c^\alpha c^\beta. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.10. Используем (3.28) с $\mathbf{v} \in X^\perp$. Тогда

$$I_i^\alpha(v_i, v_{i+1}) = -\langle B_i v_i, w_{i+1}^\alpha \rangle,$$

так что

$$\sum_{i=1}^n g_{\alpha\beta i} I_i^\alpha(v_i, v_{i+1}) I_i^\beta(v_i, v_{i+1}) = \sum_{i=1}^n g_{\alpha\beta i} \langle B_i v_i, w_{i+1}^\alpha \rangle \langle B_i v_i, w_{i+1}^\beta \rangle.$$

Осталось использовать (3.18).

3.7. Индексы h и $h^\perp$. В этом пункте мы обсуждаем соотношение между $\text{ind } h|_Y = \text{ind } \hat{h}|_{\hat{Y}}$ и $\text{ind } h^\perp$. Используя изоморфизмы $\Phi: X^\perp \rightarrow \hat{Y}$ и $\hat{\Pi}: \hat{Y} \rightarrow X^\perp$, мы можем ограничиться сравнением индексов $h^\perp$ и $h^\top = h \circ \Phi$ на $X^\perp$. Как уже было отмечено, $h^\top$ и $h^\perp$ совпадают на $X_0^\perp = \Pi Y^0$.

Нам понадобятся некоторые предположения об устройстве собственного пространства единицы в линейном отображении Пуанкаре $P: W \rightarrow W$. Предположим, что $V = \text{Ker}(P - I)$ изотропно. Хорошо известно (см., например, [27]), что обобщенное собственное пространство $N = \text{Ker}(P - I)^{2m}$ симплектическое. Так как $V \subset N$ изотропно, то $\dim N \geq 2k$. Мы рассмотрим наименее вырожденный случай $\dim N = 2k$. Тогда пространство

$$N = \text{Ker}(P - I)^2 = \{v \in W : Pv - v \in V\}$$

симплектическое и $V = \text{Ker}(P - I)$ – лагранжево подпространство в N . Рассмотрим билинейную форму

$$b(v, w) = \omega((P - I)v, w), \quad v, w \in N. \quad (3.29)$$

Несложно показать [27], что b симметрическая.

Пусть Σ – пространство траекторий $\mathbf{v}$ уравнений в вариациях, соответствующих векторам $v \in N$. Тогда $\Gamma \subset \Sigma$. Траектории из $\Sigma \setminus \Gamma$ не являются периодическими. Проекция

$$\Omega^\perp = \Pi \Sigma \subset X^\perp$$

состоит из периодических последовательностей. Имеем естественное отображение $\Psi = \Phi \Pi: \Sigma \rightarrow \hat{Y}$. Положим $\hat{\Omega} = \Psi \Sigma$. Мы покажем, что $\Omega^\perp$ ортогонально $X_0^\perp = \Pi Y^0$ относительно $h^\perp$ и $\hat{\Omega}$ ортогонально $\hat{Y}$ относительно h . Так как $h^\top$ и $h^\perp$ совпадают на $X_0^\perp$, то разность их индексов определяется их ограничениями на дополнение к $X_0^\perp$. Таким образом, если $\Omega^\perp \oplus X_0^\perp = X^\perp$, то разность индексов определяется формами $h^\top|_{\Omega^\perp}$ и $h^\perp|_{\Omega^\perp}$. В общей ситуации $X^\perp \neq \Omega^\perp \oplus X_0^\perp$. Чтобы иметь это разложение, нам понадобится еще одно условие невырожденности (условие C ниже).

Рассмотрим базис $w^1, \dots, w^k$ в V и сопряженный базис $q_1, \dots, q_k$ в лагранжевом дополнении к V в N . Тогда $w^1, \dots, w^k, q_1, \dots, q_k$ – симплектический базис в N и

$$\omega(w^\alpha, w^\beta) = 0, \quad \omega(q_\alpha, q_\beta) = 0, \quad \omega(w^\alpha, q_\beta) = \delta_\beta^\alpha, \quad Pq_\alpha = q_\alpha + s_{\alpha\beta}w^\beta. \quad (3.30)$$

Ввиду (3.29) и (3.30) получаем

$$b(q_\alpha, q_\beta) = s_{\alpha\beta}.$$

Таким образом, матрица $S = (s_{\alpha\beta})$ симметрическая. Определим симметрические матрицы $A = (a_{\alpha\beta})$ и $A^\perp = (a_{\alpha\beta}^\perp)$:

$$a_{\alpha\beta} = s_{\alpha\delta} \kappa^{\delta\varepsilon} s_{\varepsilon\beta} - s_{\alpha\beta}, \quad a_{\alpha\beta}^\perp = s_{\alpha\beta} - \bar{g}_{\alpha\beta}. \quad (3.31)$$

Далее используется еще одно условие невырожденности.

УСЛОВИЕ C. Матрица $A^\perp = (a_{\alpha\beta}^\perp)$ невырождена.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что периодическая траектория невырождена mod V , если выполнены условия невырожденности [A](#), [B](#), [C](#).

ТЕОРЕМА 3.2. *Предположим, что $\mathbf{x}$ невырождена mod V . Тогда*

$$\text{ind } h - \text{ind } h|_Z - \text{ind } h^\perp = \text{ind } A - \text{ind } A^\perp. \quad (3.32)$$

Теорема [3.2](#) будет доказана в п. [3.8](#).

СЛЕДСТВИЕ 3.3. *Предположим, что $\mathbf{x}$ невырождена mod V . Тогда*

$$\text{ind } h = \text{ind } h^\perp + \text{ind } h|_Z + \text{ind } b + \text{ind } \overline{G} \pmod{2}.$$

Действительно, из равенства $SA^\perp = A\overline{G}$ вытекает, что

$$\text{sign det } A = \text{sign}(\text{det } S \text{ det } G \text{ det } A^\perp).$$

Следовательно, $\text{ind } A - \text{ind } A^\perp = \text{ind } b + \text{ind } \overline{G} \pmod{2}$.

Из предложения [3.7](#) следует соотношение между индексами форм h и $h^\perp$.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. $\text{ind } h = \text{ind } h^\perp + \sum_{i=1}^n \text{ind } G_i + \text{ind } b \pmod{2}$.

Из равенства [\(3.20\)](#) и следствия [3.4](#) вытекает следующее полезное равенство.

СЛЕДСТВИЕ 3.5. $\sigma(-1)^{\text{ind } h} = \sigma^\perp(-1)^{\text{ind } h^\perp + \text{ind } b}$.

3.8. Пространства Ω и $\Omega^\perp$. Рассмотрим решения

$$\mathbf{w}^\alpha = (w_i^\alpha), \quad \mathbf{q}_\alpha = (q_{\alpha i})$$

уравнений в вариациях, соответствующие симплектическому базису w^α , q_α пространства N . Они образуют базис в Σ . Решения $\mathbf{w}^\alpha \in \Gamma$ n -периодичны и удовлетворяют [\(3.12\)](#). Из [\(3.30\)](#) следует, что $\mathbf{q}_\alpha$ таковы, что

$$q_{\alpha, i+n} - q_{\alpha i} = s_{\alpha\beta} w_i^\beta. \quad (3.33)$$

Так как базис симплектический, то

$$I_i^\alpha(q_{\beta i}, q_{\beta i+1}) = \langle B_i w_i^\alpha, q_{\beta i+1} \rangle - \langle B_i q_{\beta i}, w_{i+1}^\alpha \rangle = \omega(w^\alpha, q_\beta) = \delta_\beta^\alpha, \quad (3.34)$$

$$\langle B_j q_{\alpha j}, q_{\beta j+1} \rangle - \langle B_j q_{\beta j}, q_{\alpha j+1} \rangle = \omega(q_\alpha, q_\beta) = 0. \quad (3.35)$$

Положим $\mathbf{q}_\alpha^\perp = \Pi \mathbf{q}_\alpha \in \Omega^\perp \subset X^\perp$. Тогда $q_{\alpha i}^\perp = q_{\alpha i} - \lambda_{\alpha\beta i}^\perp w_i^\beta$, где

$$\lambda_{\alpha\beta i+n}^\perp - \lambda_{\alpha\beta i}^\perp = s_{\alpha\beta}, \quad \lambda_{\alpha\beta i}^\perp = g_{\gamma\beta i-1} \langle B_{i-1} w_{i-1}^\gamma, q_{\alpha i} \rangle. \quad (3.36)$$

Для любого $\alpha = 1, \dots, k$ определим $\hat{\mathbf{q}}_\alpha \in \hat{Y}$ равенствами $\hat{\mathbf{q}}_\alpha = \Psi \mathbf{q}_\alpha$. Тогда

$$\hat{q}_{\alpha i} = q_{\alpha i} - \nu_{\alpha\beta i} w_i^\beta,$$

где коэффициенты $\nu_{\alpha\beta i}$ выбраны так, что $\hat{q}_\alpha$ периодичны и величины

$$I_j(\hat{q}_{\beta j}, \hat{q}_{\beta j+1}) = -\langle B_j \hat{q}_{\beta j}, w_{j+1}^\alpha \rangle + \langle B_j w_j^\alpha, \hat{q}_{\beta j+1} \rangle = c_\beta^\alpha \quad (3.37)$$

не зависят от j . Тогда

$$\nu_{\alpha\beta i+n} - \nu_{\alpha\beta i} = s_{\alpha\beta}, \quad \Delta\nu_{\alpha\beta i} = s_{\alpha\gamma}\kappa^{\gamma\delta}g_{\delta\beta i}, \quad c_{\beta}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha} - s_{\beta\gamma}\kappa^{\gamma\alpha}. \quad (3.38)$$

Так как $\hat{\mathbf{q}}_{\alpha}$ определены по модулю Γ , имеем $\hat{\mathbf{q}}_{\alpha} \in \hat{Y}$ и $\hat{\mathbf{q}}_{\alpha} = \Phi\mathbf{q}_{\alpha}^{\perp}$.

Введем пространства

$$\Omega^{\perp} = \Pi\Sigma = \text{span}(\mathbf{q}_1^{\perp}, \dots, \mathbf{q}_k^{\perp}) \subset X^{\perp}, \quad \hat{\Omega} = \Psi\Sigma = \Phi\Omega^{\perp} = \text{span}(\hat{\mathbf{q}}_1, \dots, \hat{\mathbf{q}}_k) \subset \hat{Y}.$$

Определим $\hat{Y}^0$ как образ Y^0 при проекции $\pi_{\Gamma}: X \rightarrow \hat{X} = X/\Gamma$.

ТЕОРЕМА 3.3. *Предположим, что выполнены условия невырожденности А, В, С. Тогда*

- (а) $\hat{Y} = \hat{\Omega} \oplus \hat{Y}^0$ и $X^{\perp} = \Omega^{\perp} \oplus X_0^{\perp}$;
- (б) отображения $\hat{\Pi}|_{\hat{\Omega}}: \hat{\Omega} \rightarrow \Omega^{\perp}$ и $\hat{\Pi}|_{\hat{Y}^0}: \hat{Y}^0 \rightarrow X_0^{\perp}$ — линейные изоморфизмы;
- (в) $h|_{Y^0} = h^{\perp}|_{X_0^{\perp}} \circ \Pi|_{Y^0}$, $\hat{h}|_{\hat{Y}^0} = h^{\perp}|_{X_0^{\perp}} \circ \hat{\Pi}|_{\hat{Y}^0}$;
- (д) для любого $\mathbf{u} \in Y^0$ и $\alpha, \beta = 1, \dots, k$

$$h(\hat{\mathbf{q}}_{\alpha}, \mathbf{u}) = 0, \quad h(\hat{\mathbf{q}}_{\alpha}, \hat{\mathbf{q}}_{\beta}) = a_{\alpha\beta};$$

- (е) для любого $\mathbf{u}^{\perp} \in \Pi Y^0$ и $\alpha, \beta = 1, \dots, k$

$$h^{\perp}(\mathbf{q}_{\alpha}^{\perp}, \mathbf{u}^{\perp}) = 0, \quad h^{\perp}(\mathbf{q}_{\alpha}^{\perp}, \mathbf{q}_{\beta}^{\perp}) = a_{\alpha\beta}^{\perp}.$$

Доказательство теоремы 3.3 содержится в приложении А.1.

Теперь докажем теорему 3.2. Напомним, что, согласно предложению 3.6, $Y \perp_h Z$ и $\hat{Y} \perp_{\hat{h}} \hat{Z}$. По теореме 3.3 имеем $\hat{h}$ -ортогональное разложение $\hat{X} = \hat{Z} \oplus \hat{\Omega} \oplus \hat{Y}^0$ и $h^{\perp}$ -ортогональное разложение $X^{\perp} = \Omega^{\perp} \oplus X_0^{\perp}$ и $\hat{h}|_{\hat{Y}^0} = h^{\perp}|_{\hat{\Pi}\hat{Y}^0} \circ \hat{\Pi}|_{\hat{Y}^0}$. Следовательно,

$$\text{ind } \hat{h} - \text{ind } \hat{h}|_{\hat{Z}} - \text{ind } h^{\perp} = \text{ind } \hat{h}|_{\hat{\Omega}} - \text{ind } h^{\perp}|_{\Omega^{\perp}} = \text{ind}(a_{\alpha\beta}) - \text{ind}(a_{\alpha\beta}^{\perp}).$$

Остается использовать равенства

$$\text{ind } h = \text{ind } \hat{h}, \quad \text{ind } h|_Z = \text{ind } \hat{h}|_{\hat{Z}}, \quad \text{ind } h|_{\Omega} = \text{ind } \hat{h}|_{\hat{\Omega}}.$$

3.9. Вырождение для ρ -индексной формы. Связь между индексами для исходной и редуцированной систем гораздо проще для ρ -индексной формы. Возьмем комплексное $\rho \in S^1$ и произведем те же вычисления для соответствующей эрмитовой формы h_{ρ} на комплексном пространстве

$$X_{\rho} = \{\mathbf{u} = (u_j)_{j \in \mathbb{Z}} : u_j \in E_j, u_{j+n} = \rho u_j\}$$

квазипериодических последовательностей. Определим $Y_{\rho}, Z_{\rho} \subset X_{\rho}$ теми же формулами (3.21):

$$Y_{\rho} = \{\mathbf{u} \in X_{\rho} : I^1(u_1, u_2) = \dots = I^n(u_n, u_{n+1})\}, \quad (3.39)$$

$$Z_{\rho} = \{\mathbf{v} \in X_{\rho} : v_i = \lambda_{\alpha i} w_j^{\alpha}, \lambda_{\alpha i+n} = \rho \lambda_{\alpha j}\}. \quad (3.40)$$

Основное отличие состоит в том, что если $\rho \neq 1$, то $\mathbf{w}^{\alpha} \notin X_{\rho}$. Отсюда, в частности, вытекает, что

$$Y_{\rho} = Y_{\rho}^0 = \{\mathbf{u} \in X_{\rho} : I_j(u_j, u_{j+1}) = 0, j = 1, \dots, n\},$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.11. Пространства Y_ρ, Z_ρ являются h -ортогональными, т. е. $h(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}) = 0$ для всех $\mathbf{u} \in Y_\rho$ и $\mathbf{v} \in Z_\rho$. Если $h(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}) = 0$ при всех $\mathbf{v} \in Z_\rho$, то $\mathbf{u} \in Y_\rho$. Ограничение h_ρ на Z_ρ дается равенством

$$h(\mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}}) = \sum_{i=1}^n g_i^{\alpha\beta} \Delta \lambda_{\alpha i} \Delta \bar{\lambda}_{\beta i} = \sum_{i=1}^n \langle G_i \Delta \lambda_i, \Delta \bar{\lambda}_i \rangle,$$

$$\mathbf{v} = (\lambda_{\alpha i} \mathbf{w}_i^\alpha), \quad \lambda_{\alpha n+i} = \rho \lambda_{\alpha i}.$$

Доказательство то же, что и при $\rho = 1$ (см. предложение 3.6).

Предположим, что выполнено условие А.⁶ Тогда при $\rho \neq 1$ пространство Y_ρ — h -ортогональное дополнение к Z_ρ и форма $h|_{Z_\rho}$ невырождена. Действительно,

$$h|_Z(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{G}_\rho \lambda, \bar{\lambda} \rangle,$$

где $\lambda_i \in \mathbb{C}^k$ и

$$(\mathbf{G}_\rho \lambda)_i = G_{i-1} \Delta \lambda_{i-1} - G_i \Delta \lambda_i, \quad \lambda_{i+n} = \rho \lambda_i.$$

ЛЕММА 3.5. Выполнено равенство

$$\det \mathbf{G}_\rho = (-1)^k \rho^{-k} (\rho - 1)^{2k} \prod_{i=1}^n \det G_i. \quad (3.41)$$

Это вытекает из формулы Хилла (2.18), примененной к ДЛС (F, Λ_F) с билинейной формой действия $h|_Z$. Соответствующее отображение Пуанкаре P_F задается матрицей вида

$$P_F \sim \begin{pmatrix} I & \bar{G} \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\det(P - \rho I) = (\rho - 1)^{2k}$. Операторы B_i для системы (F, Λ_F) равны G_i .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.12. Пусть $\rho \in S^1$, $\rho \neq 1$. Тогда $X_\rho = Y_\rho \oplus Z_\rho$ и $Y_\rho \cap Z_\rho = \{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{u} \in X_\rho$. Найдем $(\lambda_{\alpha i})$, $\lambda_{\alpha i+n} = \rho \lambda_{\alpha i}$, такие, что

$$(u_i + \lambda_{\alpha i} w_i^\alpha) \in Y_\rho. \quad (3.42)$$

Тогда (3.26) дает

$$\lambda_{\alpha n+1} - \lambda_{\alpha 1} = \sum_{i=1}^n g_{\alpha\beta i} I_i^\beta(u_i, u_{i+1}).$$

Следовательно,

$$\lambda_{\alpha 1} = (\rho - 1)^{-1} \sum_{i=1}^n g_{\alpha\beta i} I_i^\beta(u_i, u_{i+1}).$$

Аналогично находим $\lambda_{\alpha 2}, \dots, \lambda_{\alpha n}$.

⁶В этом разделе нам не потребуется условие В.

Формула (3.42) определяет проекцию $\Phi_\rho: X_\rho \rightarrow Y_\rho$, $\Phi_\rho Z_\rho = 0$, $\Phi_\rho|_{Y_\rho} = I$.
Имеем:

$$\text{ind } h_\rho = \text{ind } h_\rho|_{Z_\rho} + \text{ind } h_\rho|_{Y_\rho}.$$

Проекция $\Pi: X_\rho \rightarrow X_\rho^\perp$ определяет изоморфизм $h_\rho|_{Y_\rho}$ и ρ -индексной формы $h_\rho^\perp$ для редуцированной системы $(E^\perp, \Lambda^\perp)$. Из леммы 3.5 следует, что ρ -определители Хилла для исходной и редуцированной систем связаны формулой

$$\det H_\rho = \det H_\rho^\perp \det \mathbf{G}_\rho = \det H_\rho^\perp (2 - \rho - \rho^{-1})^k \prod_{i=1}^n \det G_i.$$

Отсюда

$$\text{ind } h_\rho|_{Z_\rho} = \sum_{i=1}^n \text{ind } G_i \pmod{2}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3.6. Если $\rho \in S^1$, $\rho \neq 1$, то

$$\text{ind } h_\rho = \text{ind } h_\rho^\perp + \sum_{i=1}^n \text{ind } G_i \pmod{2}, \quad \text{null } h_\rho = \text{null } h_\rho^\perp.$$

4. Обратимый случай

4.1. Обратимая ДЛС. Пусть $S: M \rightarrow M$ – гладкая инволюция: $S^2 = \text{id}_M$. ДЛС называется S -обратимой, если S – обращающая время симметрия для L :

$$L(Sx, Sy) = L(y, x) \tag{4.1}$$

для всех $x, y \in M$. Таким образом, лагранжиан L инвариантен относительно инволюции $\tilde{S}: M^2 \rightarrow M^2$, $\tilde{S}(x, y) = (Sy, Sx)$.

Простейший пример – случай $S = \text{id}$, когда $L(x, y) = L(y, x)$ (например, билиард или стандартное отображение). Нетривиальные инволюции S возникают для системы (2.5), когда потенциал – четная функция. Тогда $Sx = -x$. Аналогичная возможность существует для билиардов, удовлетворяющих некоторым условиям симметрии.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Предположим, что отображение $T: M^2 \rightarrow M^2$ порождается S -обратимой ДЛС и $T(x, y) = (y, z)$. Тогда

$$T(S(z), S(y)) = (S(y), S(x)).$$

Значит, T сопряжено T^{-1} :

$$T^{-1} \circ \tilde{S} = \tilde{S} \circ T. \tag{4.2}$$

Доказательство получается дифференцированием равенства

$$L(x, y) + L(y, z) = L(Sz, Sy) + L(Sy, Sx).$$

Если $\mathbf{x} = (x_i)$ – периодическая траектория ДЛС, то $\tilde{\mathbf{x}} = (Sx_{-i})$ – также периодическая траектория. Периодическая траектория называется обратимой, если

$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$ по модулю сдвига. Более формально, группа $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ действует на множестве n -периодических последовательностей $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ элементов многообразия M с помощью сдвигов $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto (x_{i+k})_{i \in \mathbb{Z}}$, и следует отождествить периодические траектории, отличающиеся сдвигами. Любая n -периодическая последовательность определяется точкой $(x_1, \dots, x_n) \in M^n$, и группа сдвигов $\mathbb{Z}_n$ действует на M^n циклическими перестановками. Поэтому множество периодических последовательностей – факторпространство $\mathcal{M} = M^n/\mathbb{Z}_n$. Определим инволюцию $R: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ по формуле $R(\mathbf{x}) = (Sx_{-i})$. Обозначим через $\mathcal{M}_+ = \{\mathbf{x} \in \mathcal{M} : R\mathbf{x} = \mathbf{x}\}$ множество неподвижных точек инволюции R . Имеем $\mathbf{x} \in \mathcal{M}_+$, если $Sx_{j-i} = x_i$ для некоторого $j \in \mathbb{Z}$ и всех $i \pmod n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. $\mathbf{x} \in \mathcal{M}_+$ является обратимой периодической траекторией тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}$ – критическая точка функции $\mathcal{A}_+ = \mathcal{A}|_{\mathcal{M}_+}$.

Это хорошо известное свойство функций, инвариантных относительно инволюции. Действительно, положим $X = T_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$. Тогда $J = dR(\mathbf{x}): X \rightarrow X$ – инволюция. Обозначим $E_{\pm} = \{\xi \in X : J\xi = \pm\xi\}$. Тогда $X = E_+ \oplus E_-$ и $E_+ = T_{\mathbf{x}}\mathcal{M}_+$. Так как функция $\mathcal{A}$ является R -инвариантной, имеем $d\mathcal{A}(\mathbf{x}) \circ J = d\mathcal{A}(\mathbf{x})$. Следовательно, $d\mathcal{A}(\mathbf{x})\xi = 0$ при всех $\xi \in E_-$.

Для любой критической точки $\mathbf{x} \in \mathcal{M}_+$ обозначим через $h = d^2\mathcal{A}(\mathbf{x})$ форму Гессе, т. е. второй дифференциал функции $\mathcal{A}$. Это билинейная форма на X . Форма $h|_{E_+} = d^2\mathcal{A}_+(\mathbf{x})$ – второй дифференциал функции $\mathcal{A}_+$. Положим $\xi = \xi_+ + \xi_-$, $\xi_{\pm} \in E_{\pm}$. Тогда

$$h(\xi, \xi) = h(\xi_+, \xi_+) + h(\xi_-, \xi_-).$$

Действительно, поскольку форма h J -инвариантна, имеем

$$h(\xi_-, \xi_+) = h(J\xi_-, J\xi_+) = h(-\xi_-, \xi_+) = -h(\xi_-, \xi_+).$$

Если представить h билинейным оператором $\mathbf{H}: X \rightarrow X^*$, то $J^*\mathbf{H}J = \mathbf{H}$, так что $\mathbf{H}E_{\pm} = E_{\pm}^*$.

Выберем на M S -инвариантную риманову метрику. Она определяет R -инвариантное скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ на X . Тогда $h(\xi, \eta) = (H\xi, \eta)$, где $H: X \rightarrow X$ – симметрический оператор. Пространства $E_{\pm}$ ортогональны друг другу и $HE_{\pm} \subset E_{\pm}$. Обозначим $H_{\pm} = H|_{E_{\pm}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. $H = H_+ \oplus H_-$ и $\det H = \det H_+ \det H_-$.

Обратимые периодические траектории $\mathbf{x} \in \mathcal{M}_+$ делятся на три типа $\tau = 0, 1, 2$ в зависимости от числа неподвижных точек инволюции S , которые они содержат.

Тип 0: $n = 2k$ и $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k, Sx_k, \dots, Sx_1)$.

Тип 1: $n = 2k - 1$ и $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k, Sx_k, \dots, Sx_2)$, где $x_1 = Sx_1$.

Тип 2: $n = 2k - 2$ и $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k, Sx_{k-1}, \dots, Sx_2)$, где $x_1 = Sx_1$ и $x_k = Sx_k$.

Для всех типов траектория $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\tau}(\mathbf{y}) \in \mathcal{M}_+$ определяется точкой $\mathbf{y} = (x_1, \dots, x_k) \in M^k$. Следовательно, функция действия $\mathcal{A}_+$ на $\mathcal{M}_+$ определяет функцию

$$\mathcal{A}_{\tau}(\mathbf{y}) = \mathcal{A}_+(\mathbf{x}_{\tau}(\mathbf{y})) = \mathcal{A}_+(\mathbf{x}), \quad \tau = 0, 1, 2.$$

Обозначим

$$\mathcal{B}(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{k-1} L(x_i, x_{i+1}).$$

ЛЕММА 4.1. $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\tau(\mathbf{y})$ – периодическая траектория типа $\tau = 0, 1, 2$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{y}$ – критическая точка соответственно функционалов

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0(\mathbf{y}) &= 2\mathcal{B}(\mathbf{y}) + L(Sx_1, x_1) + L(x_k, Sx_k), & \mathbf{y} &\in M^k, \\ \mathcal{A}_1(\mathbf{y}) &= 2\mathcal{B}(\mathbf{y}) + L(x_k, Sx_k), & \mathbf{y} &\in N \times M^{k-1}, \\ \mathcal{A}_2(\mathbf{y}) &= 2\mathcal{B}(\mathbf{y}), & \mathbf{y} &\in N \times M^{k-2} \times N. \end{aligned}$$

Функция $\mathcal{A}$ на $\mathcal{M}$ тоже допускает подобное представление. Рассмотрим, например, случай периодической траектории типа 0. Точка $\mathbf{x} \in M^n$ представляется в виде

$$\mathbf{x} = (y_1, \dots, y_k, Sz_k, \dots, Sz_1).$$

Тогда, поскольку $L(Sz_{i+1}, Sz_i) = L(z_i, z_{i+1})$, имеем

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{B}(\mathbf{y}) + \mathcal{B}(\mathbf{z}) + L(y_k, Sz_k) + L(Sz_1, y_1).$$

Для периодической траектории $\mathbf{x}$ типа 0 имеем $\mathbf{y} = \mathbf{z} = (x_1, \dots, x_k)$. Представим вектор $\mathbf{u} \in T_{\mathbf{x}}M^n$ в виде

$$\mathbf{u} = (v_1, \dots, v_k, J_k w_k, \dots, J_1 w_1), \quad \mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{\mathbf{y}}M^k,$$

где $J_i = dS(x_i): T_{x_i}M \rightarrow T_{Sx_i}M$. Тогда второй дифференциал функции $\mathcal{A}$ принимает вид

$$h(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = k(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + k(\mathbf{w}, \mathbf{w}) - \langle B_k^* J_k w_k, v_k \rangle - \langle v_1, B_0 J_1 w_1 \rangle,$$

где

$$k(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^k \langle A_i v_i - B_{i-1} v_{i-1} - B_i^* v_{i+1}, v_i \rangle, \quad v_0 = 0, \quad v_{k+1} = 0,$$

а $B_k = B(x_k, Sx_k)$, $B_0 = B(Sx_1, x_1)$. Обозначим

$$C_1 = -B_0 J_1: E_1 \rightarrow E_1^*, \quad C_k = -B_k^* J_k: E_k \rightarrow E_k^*.$$

Отметим, что операторы $C_1 = C_1^*$ и $C_k = C_k^*$ симметрические. Следовательно,

$$h(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = k(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + k(\mathbf{w}, \mathbf{w}) + \langle C_k v_k, w_k \rangle + \langle C_1 v_1, w_1 \rangle. \quad (4.3)$$

Найдем соответствующую билинейную форму $h|_{E_\pm}$. Для $\mathbf{u} \in E_\pm$ имеем $\mathbf{w} = \pm \mathbf{v}$, так что $\mathbf{u}$ определяется вектором $\mathbf{v}$:

$$h_\pm(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = h_\pm^0(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 2k(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \pm \langle C_k v_k, v_k \rangle \pm \langle C_1 v_1, v_1 \rangle.$$

Аналогично, для каждого $\tau = 0, 1, 2$ вектор $\mathbf{u} \in E_\pm$ определяется вектором $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_k) \in T_{\mathbf{y}}M$.

ЛЕММА 4.2. Для обратимой траектории типа $\tau = 0, 1, 2$ форма $h_{\pm}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = h_{\pm}^{\tau}(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ имеет вид

$$\begin{aligned} h_{\pm}^0(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= 2k(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \pm \langle C_k v_k, v_k \rangle \pm \langle C_1 v_1, v_1 \rangle, \\ h_{\pm}^1(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= 2k(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \pm \langle C_k v_k, v_k \rangle, \\ h_{\pm}^2(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= 2k(\mathbf{v}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Область определения $V_{\pm}^{\tau}$ формы $h_{\pm}^{\tau}$ имеет вид

$$\begin{aligned} V_{\pm}^0 &= T_{\mathbf{y}} M^k, \\ V_{\pm}^1 &= \{\mathbf{v} \in T_{\mathbf{y}} M^k : J_1 v_1 = \pm v_1\}, \\ V_{\pm}^2 &= \{\mathbf{v} \in T_{\mathbf{y}} M^k : J_1 v_1 = \pm v_1, J_k v_k = \pm v_k\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим периодическую траекторию типа 0. Тогда области определения форм h_{+}^0 и h_{-}^0 совпадают и

$$h_{+}^0(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - h_{-}^0(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 2\langle C_1 v_1, v_1 \rangle + 2\langle C_k v_k, v_k \rangle.$$

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Предположим, что $\mathbf{x} \in \mathcal{M}_{+}$ – периодическая траектория типа 0, являющаяся точкой невырожденного локального минимума функции $\mathcal{A}_{+}$. Если симметрические операторы C_1, C_k неположительны, то $\mathbf{x}$ – точка невырожденного локального минимума функции $\mathcal{A}$. Если $\mathbf{x} \in \mathcal{M}_{+}$ – точка невырожденного локального максимума функции $\mathcal{A}_{+}$ и C_1, C_k неотрицательны, то $\mathbf{x}$ – точка невырожденного локального максимума для $\mathcal{A}$. В обоих случаях $\det H = \det H_{+} \det H_{-} > 0$.

Для периодической траектории типа $\tau = 1$ или 2 области определения форм h_{+}^{τ} и h_{-}^{τ} различны. Если $S = \text{id}$, то, очевидно, $V_{-}^{\tau} \subset V_{+}^{\tau}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Предположим, что $S = \text{id}_M$, и пусть $\mathbf{x}$ – обратимая периодическая траектория типа τ , являющаяся точкой невырожденного минимума функции $\mathcal{A}_{\tau}$. Тогда в любом из следующих трех случаев:

- (а) если $\tau = 2$,
- (б) если $\tau = 1$ и оператор C_k неположительный,
- (в) если $\tau = 0$ и C_k, C_1 неположительны,

$\mathbf{x}$ является точкой невырожденного минимума функции $\mathcal{A}$.

Если $\mathbf{y}$ – точка невырожденного локального максимума функции $\mathcal{A}_{\tau}$, то подобное утверждение выполняется с заменой условия неположительности C_k, C_1 на условие неотрицательности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. Пусть $S = \text{id}$. Для $\mathcal{A}_{+}$ – минимальной периодической траектории типа 2 форма h_{ρ} положительно определена для всех $\rho \in S^1$, так что траектория $\mathbf{x}$ гиперболическая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем комплексный вектор $\mathbf{u} \in T_{\mathbf{x}}^{\mathbb{C}} M^{2k}$. Тогда

$$h_{\rho}(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) = k(\mathbf{u}^{+}, \bar{\mathbf{u}}^{+}) + k(\mathbf{u}^{-}, \bar{\mathbf{u}}^{-}),$$

где $\mathbf{u}^{+} = (u_1, \dots, u_k)$ и $\mathbf{u}^{-} = (J_{2k} u_{2k}, \dots, J_{k+1} u_{k+1})$ – комплексные векторы из $T_{\mathbf{y}}^{\mathbb{C}} M^k$. Так как форма k положительно определена, то и h_{ρ} положительно определена.

4.2. Некоторые приложения.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. *Обратимая геометрическая вырожденность $\det H_+ = 0$ обратимой периодической траектории влечет динамическую вырожденность $\det(P - I) = 0$.*

Приведем некоторые утверждения о динамической неустойчивости обратимых траекторий.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. *Пусть $\mathbf{x}$ – обратимая периодическая траектория такая, что $\mathbf{x}$ – точка невырожденного минимума функции $\mathcal{A}_+$. Предположим, что $\sigma(\mathbf{x})(-1)^m < 0$. В случае $\text{type}(\mathbf{x}) = 1$ добавим также условие, что оператор C_k неположительный, а в случае $\text{type}(\mathbf{x}) = 0$ – что C_1 и C_k неположительные. Тогда $\mathbf{x}$ имеет вещественный мультипликатор > 1 . В частности, траектория $\mathbf{x}$ динамически неустойчивая.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию 4.1, формы $h_{\pm}$ положительно определены. Поэтому $\det H_{\pm} > 0$. Из формулы (2.8) и предложения 4.3 следует, что $\det(P - I) = -1$. Остается использовать предложение 2.2.

Рассмотрим, например, ДЛС, порожденную билиардом в области в $\mathbb{R}^{m+1}$, ограниченной гиперповерхностью M . Предположим, что билиардная гиперповерхность M симметрична относительно гиперплоскости в $\mathbb{R}^{m+1}$, для определенности проходящей через 0. Тогда симметрия $S = S_e: \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ задается формулой $S_e(x) = x - 2e\langle x, e \rangle$, где e – единичный вектор нормали.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. *Пусть $x, y \in M$, $y = S_e x$, – пара симметричных точек. Положим $B = B(y, x)$. Тогда оператор $C = -BS_e: T_y M \rightarrow T_y^* M$ симметрический и отрицательно определенный: $\langle Cv, v \rangle < 0$ при ненулевом $v \in T_y M$.*

Действительно, согласно (2.6),

$$\langle Cv, w \rangle = \frac{-\langle S_e v, w \rangle + \langle S_e v, e \rangle \langle w, e \rangle}{|x - y|} = -\frac{\langle v - e\langle v, e \rangle, w - e\langle w, e \rangle \rangle}{|x - y|},$$

где использовано равенство $S_e v = v - 2e\langle v, e \rangle$.

СЛЕДСТВИЕ 4.4. *Пусть $\mathbf{x}$ – S_e -обратимая периодическая билиардная траектория типа τ такая, что $\mathbf{y}$ – точка невырожденного локального минимума функционала длины $\mathcal{A}_+$. Если $m + \tau$ нечетно, то $\mathbf{x}$ имеет вещественный мультипликатор $\rho > 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $\tau = 0$. Согласно предложению 4.6, симметрические операторы C_1 и C_k отрицательно определены. По предложению 4.4, $\mathbf{x}$ – точка невырожденного локального минимума функции $\mathcal{A}$. Отметим также, что $\sigma(\mathbf{x}) = (-1)^n = (-1)^{\tau} > 0$. Остается применить следствие 2.6. Случаи $\tau = 1, 2$ аналогичны.

Любой билиард S -обратим для $S = \text{id}$. Любая обратимая периодическая траектория $\mathbf{x}$ имеет тип 2. Ввиду предложения 2.1, $\sigma(\mathbf{x}) = (-1)^n > 0$.

СЛЕДСТВИЕ 4.5. *Любая id-обратимая билиардная траектория, являющаяся точкой невырожденного минимума функционала $\mathcal{A}_+$, является гиперболической.*

Это вытекает из предложения 4.5.

5. Формула Хилла для непрерывных лагранжевых систем

Рассмотрим непрерывную лагранжеву систему $(M, \mathcal{L})$ с конфигурационным пространством M^m и гладким ⁷ τ -периодическим лагранжианом $\mathcal{L}(x, \dot{x}, t)$ на $TM \times \mathbb{R}$. Предположим, что $\mathcal{L}$ – строго выпуклый по скорости $\dot{x} \in T_x M$. Тогда τ -периодические траектории являются критическими точками функционала действия

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_0^\tau \mathcal{L}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) dt$$

на пространстве Ω τ -периодических $W^{1,2}$ -кривых $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$. Цель этого раздела – доказать аналог теоремы 2.1 для непрерывных лагранжевых систем.

5.1. Непрерывный определитель Хилла. Вторая вариация (дифференциал) функционала действия $\mathcal{A}$ в точке $\gamma \in \Omega$ – симметрическая билинейная форма $h(\xi, \eta)$ на пространстве X τ -периодических $W^{1,2}$ -векторных полей $\xi(t) \in E_t = T_{\gamma(t)}M$ вдоль γ . Форма h задается формулой

$$h(\xi, \xi) = \left. \frac{d^2}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=0} \mathcal{A}(\gamma_\alpha), \quad \gamma_0 = \gamma,$$

где $\gamma_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow M$ – гладкая τ -периодическая вариация кривой γ . Определим положительно определенное скалярное произведение на E_t формулой

$$(v, w) = \langle B(t)v, w \rangle, \quad B(t) = \mathcal{L}_{\dot{x}\dot{x}}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Форма h единственным образом представляется в виде*

$$h(\xi, \eta) = \int_0^\tau \left((D\xi(t), D\eta(t)) + (U(t)\xi(t), \eta(t)) \right) dt, \quad (5.1)$$

где $U(t) = U^*(t)$ – симметрический линейный оператор и D – ковариантная производная, согласованная с метрикой, т.е. линейный дифференциальный оператор такой, что

$$\frac{d}{dt}(\xi, \eta) = (D\xi, \eta) + (\xi, D\eta), \quad \frac{d}{dt}(f\xi) = \dot{f}\xi + f D\xi \quad (5.2)$$

для гладких векторных полей $\xi(t), \eta(t) \in E_t$ и скалярной функции $f(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ∇ – любая ковариантная производная.⁸ Стандартная выкладка показывает, что h можно переписать в виде

$$h(\xi, \eta) = \int_0^\tau \left(((\nabla\xi(t), \nabla\eta(t)) + (W(t)\xi(t), \nabla\eta(t)) + (V(t)\xi(t), \eta(t))) \right) dt,$$

где V и $W: E_t \rightarrow E_t$ – линейные операторы и $V(t)$ симметрический по отношению к метрике: $V(t) = V^*(t)$.

⁷В действительности $\mathcal{L} \in C^2$ достаточно.

⁸Ковариантная производная, согласованная с метрикой, не единственная: для любого антисимметрического оператора $A(t)$ оператор $\nabla + A(t)$ – также ковариантная производная. Нам приходится использовать ковариантную производную, поскольку обычная производная не определена, кроме случая, когда E_t не зависят от t .

Интегрированием по частям h представляется в виде (5.1), где

$$D\xi = \nabla\xi + W - W^*, \quad U = V - W - W^* = U^*.$$

Так что D – также ковариантная производная.

Отметим, что операторы D, U инвариантно определяются формой h , т. е. они определены независимо от выбора локальной системы координат и не меняются при калибровке лагранжиана.

Из уравнений (5.2) вытекает, что оператор D кососимметрический по отношению к L^2 -скалярному произведению

$$(\xi, \eta)_2 = \int_0^\tau (\xi(t), \eta(t)) dt.$$

Следовательно,

$$h(\xi, \eta) = ((-D^2 + U)\xi, \eta)_2 = (\mathbf{H}\xi, \eta)_2, \quad (5.3)$$

где $\mathbf{H} = -D^2 + U$ – гессиан функционала $\mathcal{A}$ по отношению к L^2 -метрике.

Система уравнений в вариациях периодической траектории γ имеет вид

$$D^2\xi(t) = U(t)\xi(t). \quad (5.4)$$

Это – линейная лагранжева система. Будем использовать следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Пусть $E = \{E_t\}_{t \in \mathbb{R}/\tau\mathbb{Z}}$ – гладкое семейство векторных пространств (векторное расслоение). Предположим, что E снабжено метрикой $(\cdot, \cdot)$, согласованной с ковариантной производной D и симметрическим линейным оператором $U(t): E_t \rightarrow E_t$. Обозначим через (E, Λ) линейную лагранжеву систему с квадратичным лагранжианом

$$\Lambda(\xi, D\xi) = \frac{1}{2} (D\xi, D\xi) + \frac{1}{2} (U\xi, \xi) \quad (5.5)$$

и уравнениями Лагранжа (5.4).

Траектории $\xi(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, системы (E, Λ) являются экстремалиями билинейной формы действия

$$\frac{1}{2} h(\xi, \xi) = \int_0^\tau \Lambda(\xi, D\xi) dt \quad (5.6)$$

для вариаций с неподвижными концами $\xi(0), \xi(\tau)$. Следовательно, $h(\xi, \phi) = 0$ для каждого гладкого поля $\phi(t) \in E_t$ такого, что $\phi(0) = 0$, $\phi(\tau) = 0$.

Система (E, Λ) – линеаризация системы $(M, \mathcal{L})$ на периодической траектории γ . В дальнейшем можно забыть о нелинейной лагранжевой системе $(M, \mathcal{L})$ и иметь дело исключительно с линейной системой (E, Λ) .

Пусть $P: W \rightarrow W$ – линейное отображение Пуанкаре траектории γ . Так как решение $\xi(t)$ системы уравнений в вариациях определяется точкой $(\xi(0), D\xi(0))$, то W отождествляется с $E_0 \oplus E_0$. Тогда P – оператор монодромии системы уравнений в вариациях:

$$P(\xi(0), D\xi(0)) = (\xi(\tau), D\xi(\tau)).$$

Определим $W^{1,2}$ – скалярное произведение на гильбертовом пространстве X формулой

$$\langle\langle \xi, \eta \rangle\rangle = (D\xi, D\eta)_2 + (\xi, \eta)_2 = (\mathbf{B}\xi, \eta)_2, \quad \mathbf{B} = -D^2 + I.$$

Тогда $h(\xi, \bar{\eta}) = \langle\langle H\xi, \bar{\eta} \rangle\rangle$, где самосопряженный оператор $H = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{H}$ – гессиан функционала $\mathcal{A}$ по отношению к $W^{1,2}$ -скалярному произведению.

Имеем $H = I + K$, где $K = (-D^2 + I)^{-1}(U - I)$ – компактный оператор с собственными значениями $\lambda_k = O(k^{-2})$, $k = 1, 2, \dots$, так что

$$\mathrm{tr} |K| = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| < \infty.$$

Отсюда следует, что *определитель Хилла*

$$\det H = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + \lambda_k)$$

сходится абсолютно.

Пусть $Q: E_0 \rightarrow E_0$ – оператор монодромии уравнения параллельного переноса:

$$Q\eta(0) = \eta(\tau), \quad D\eta(t) = 0.$$

ТЕОРЕМА 5.1. $\det(I - P) = \sigma(-1)^m \beta \det H$, где

$$\beta = e^{-m\tau} \det^2(e^\tau I - Q), \quad \sigma = \det Q. \quad (5.7)$$

Так как Q – ортогональный оператор, то $\beta > 0$ и $\sigma = \pm 1$ в зависимости от ориентируемости расслоения E , т. е. того, сохраняет или обращает ориентацию траектория γ . Если многообразие M ориентируемо, то всегда $\sigma = 1$.

Теорема 5.1 вытекает из более общего утверждения (теорема 5.2), которое будет сформулировано в п. 5.3.

ПРИМЕР 5.1. Рассмотрим лагранжеву систему с одной степенью свободы. Если расслоение E тривиальное, то $Q = 1$ и $\mathbf{H}\xi = -\ddot{\xi} + a(t)\xi$. Так как $\det P = 1$, то

$$\rho^{-1} \det(\rho I - P) = \rho + \rho^{-1} - 2 + \det(I - P).$$

Если ρ – мультипликатор, то теорема 5.1 дает

$$\det H = \frac{\rho + \rho^{-1} - 2}{e^\tau + e^{-\tau} - 2}. \quad (5.8)$$

Положим $\tau = 2\pi$ и представим оператор H в тригонометрическом базисе $\{e^{int}\}$. Если

$$a(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{int}, \quad \xi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \xi_n e^{int},$$

то

$$H\xi = (-D^2 + I)^{-1}(-D^2 + U)\xi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (n^2 + 1)^{-1} \left(n^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ikt} \right) \xi_n e^{int}.$$

Таким образом, (1.3) – матрица оператора H , и (5.8) дает формулу Хилла (1.2).

5.2. Связь с формулой Хилла для дискретных лагранжевых систем. Непрерывная лагранжева система локально, в окрестности периодической траектории γ , определяет дискретную лагранжеву систему. Выберем разбиение $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \tau$ отрезка $[0, \tau]$ и положим $x_i = \gamma(t_i)$. Если промежутки времени $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ достаточно малы, то точки x_i, x_{i+1} не сопряжены вдоль γ . Тогда существует окрестность U_i точки (x_i, x_{i+1}) в M^2 такая, что для любых $(x, y) \in U_i$ существует единственная траектория $u_{x,y}: [t_i, t_{i+1}] \rightarrow M$, близкая к $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ и соединяющая точки x, y . Определим дискретный лагранжиан L_i на U_i формулой

$$L_i(x, y) = \mathcal{A}(u_{x,y}).$$

Соответствующий дискретный функционал действия A имеет вид

$$A(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n L_i(y_i, y_{i+1}), \quad (y_i, y_{i+1}) \in U_i, \quad y_{n+1} = y_1.$$

Тогда $\mathbf{x}$ – критическая точка функции A , т. е. периодическая траектория ДЛС, соответствующая периодической траектории γ непрерывной лагранжевой системы. Легко видеть, что

$$B_i = -\partial_{12} L_i(x_i, x_{i+1}) = \frac{1}{\Delta t_i} (B(t_i) + O(\Delta t_i)).$$

Таким образом, L_i – дискретный лагранжиан.

Определение определителя Хилла $\det H = \det(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{H})$ для НЛС аналогично определению (2.8) для ДЛС. Дискретизации оператора $\mathbf{H} = -D^2 + U$ соответствует оператор $\mathbf{H}$ в формуле (2.8). Однако оператор $\mathbf{B} = -D^2 + I$ не вполне соответствует оператору $\mathbf{B}$ в формуле (2.11).

Выбор $\mathbf{B}$ очень естественен для ДЛС, но не для НЛС, где вместо I можно взять почти любой оператор. Это является причиной появления странного коэффициента β в (5.7). Если использовать для НЛС аналог дискретного $\mathbf{B}$, то оператор $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{H}$ окажется неограниченным.

5.3. Обобщенный определитель Хилла. Для данного $\rho \in S^1$ обозначим через X_ρ пространство комплексных ρ -квазипериодических локально $W^{1,2}$ -векторных полей $\xi(t) \in E_t$ таких, что $\xi(t + \tau) = \rho \xi(t)$. Определим эрмитову ρ -индексную форму [28], [27] на X_ρ формулой (5.1):

$$h(\xi, \bar{\eta}) = \int_0^\tau \left((D\xi(t), D\bar{\eta}(t)) + (U(t)\xi(t), \bar{\eta}(t)) \right) dt. \quad (5.9)$$

Будем обозначать через X также комплексификацию $X = X^\mathbb{C}$, т. е. пространство комплексных τ -периодических $W^{1,2}$ -векторных полей вдоль γ . Для определенности выберем $\ln \rho$ так, что

$$0 \leq \operatorname{Im} \ln \rho < 2\pi,$$

и положим $\mu = \tau^{-1} \ln \rho$. отождествляя пространства X и X_ρ с помощью отображения

$$X \ni \xi \mapsto e^{\mu t} \xi(t) \in X_\rho, \quad (5.10)$$

получаем эрмитову форму h_ρ на X :

$$\begin{aligned} h_\rho(\xi, \bar{\eta}) &= h(e^{\mu t}\xi, \overline{e^{\mu t}\eta}) = ((D + \mu I)\xi, \overline{(D + \mu I)\eta})_2 + (U\xi, \bar{\eta})_2 \\ &= -((D + \mu I)^2\xi, \bar{\eta})_2 + (U\xi, \bar{\eta})_2 = ((- (D + \mu I)^2 + U)\xi, \bar{\eta})_2 \\ &= (\mathbf{H}_\rho\xi, \bar{\eta})_2, \quad \text{где } \mathbf{H}_\rho = -(D + \mu I)^2 + U \end{aligned}$$

(здесь мы использовали, что $\bar{\mu} = -\mu$ и оператор D вещественный и антисимметрический). Определим ρ -гессиан $H_\rho: X \rightarrow X$ формулой $h_\rho(\xi, \bar{\eta}) = \langle\langle H_\rho\xi, \bar{\eta} \rangle\rangle$. Тогда

$$H_\rho = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{H}_\rho = (-D^2 + I)^{-1}(-(D + \mu I)^2 + U). \quad (5.11)$$

Далее будем предполагать, что $\rho \neq 0$ принимает любые комплексные значения. Оператор H_ρ самосопряженный при $|\rho| = 1$, но не в общем случае. Хотя оператор не ядерный: $\text{tr}|H_\rho - I|$ расходится при $\rho \neq 1$, можно, следуя Пуанкаре [2], определить обобщенный определитель Хилла $\det H_\rho$ с помощью конечномерной аппроксимации:

$$\det H_\rho = \lim_{N \rightarrow \infty} \det H_\rho^{(N)}, \quad H_\rho^{(N)} = P_N H_\rho P_N^*: X^{(N)} \rightarrow X^{(N)}, \quad (5.12)$$

где P_N – ортогональная проекция на конечномерное собственное подпространство $X^{(N)}$ оператора D , соответствующее собственным значениям из множества

$$\Lambda_N = \{\nu \in \Lambda = \sigma(D) : |\nu| \leq N\}.$$

ТЕОРЕМА 5.2. *Определитель (5.12) сходится и*

$$\rho^{-m} \det(P - \rho I) = \sigma(-1)^m \beta \det H_\rho. \quad (5.13)$$

Доказательство теоремы 5.2 будет приведено в п. 5.5.

При $\rho = 1$ получаем теорему 5.1.

5.4. Некоторые приложения. Предположим, что $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = (\dot{x}, \dot{x})/2$, где $(\cdot, \cdot)$ – риманова метрика на M . Тогда периодическая траектория γ – замкнутая геодезическая. Квадратичный лагранжиан системы уравнений в вариациях имеет вид (5.5), где D – ковариантная производная, соответствующая связности Леви-Чивиты, а $U(t)\xi = R(\xi, \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t)$, где R – тензор кривизны.

Тогда $\dot{\gamma}(t)$ – периодическое решение системы уравнений в вариациях, а $(D\xi, \dot{\gamma}) = \frac{d}{dt}(\xi, \dot{\gamma})$ – периодический по времени первый интеграл. Таким образом, P имеет два единичных мультипликатора, и формула Хилла вырождается: $\det H = \det(I - P) = 0$. Укажем редуцированную версию формулы Хилла. Более общее утверждение будет доказано ниже (см. следствие 6.1).

Положим $E_t^\perp = \{u \in E_t : (u, \dot{\gamma}(t)) = 0\}$. Тогда если $\xi(t) \in E_t^\perp$, то $D\xi(t), U(t)\xi(t) \in E_t$. Обозначим через $H^\perp: X^\perp \rightarrow X^\perp$ ограничение H на инвариантное подпространство

$$X^\perp = \{\xi \in X : \xi(t) \in E_t^\perp\}.$$

Пусть $P^\perp: W^\perp \rightarrow W^\perp$, $W^\perp = E_0^\perp \times E_0^\perp$, – оператор монодромии, отвечающий решениям $\xi(t) \in E_t^\perp$ системы уравнений в вариациях, а $Q^\perp: E_0^\perp \rightarrow E_0^\perp$ – отображение параллельного переноса вдоль γ . Применяя теорему 5.1 к линейной лагранжевой системе $(E^\perp, \Lambda^\perp)$, где $\Lambda^\perp = \Lambda|_{E^\perp}$, получим следующее утверждение [5].

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Для редуцированной системы формула Хилла имеет вид

$$\det(P^\perp - I) = \sigma(-1)^{m-1} \beta^\perp \det H^\perp, \quad \beta^\perp = e^{-(m-1)\tau} \det^2(Q^\perp - e^\tau I).$$

Сформулируем еще следствие теоремы 5.2. Для комплексного ρ пусть $X^\perp$ – пространство комплексных векторных полей $\xi(t) \in E_t$. Положим $H_\rho^\perp = H_\rho|_{X^\perp}$. Тогда

$$\rho^{-(m-1)} \det(P^\perp - \rho I) = \sigma(-1)^{m-1} \beta^\perp \det H_\rho^\perp. \quad (5.14)$$

Приведем предложенное в [5] доказательство формулы (5.14), которое будет обобщено в п. 6.1. Пусть $Z = \{\xi \in X : \xi(t) = \lambda(t)\dot{\gamma}(t)\}$. Запишем комплексное поле $\xi \in X$ в виде $\xi(t) = \eta(t) + \lambda(t)\dot{\gamma}(t)$, где $\eta \in X^\perp$. Тогда

$$h(\xi, \bar{\xi}) = h(\eta, \bar{\eta}) + \int_0^\tau |\dot{\lambda}|^2 dt. \quad (5.15)$$

Получим $H_\rho = H_\rho|_Z \oplus H_\rho^\perp$ и $\det H_\rho = \det H_\rho|_Z \det H_\rho^\perp$, где $\det H_\rho|_Z$ – определитель Хилла системы с квадратичным лагранжианом $|\dot{\lambda}|^2/2$. Соответствующий характеристический многочлен равен $(\rho - 1)^2$. Отсюда, согласно (5.8),

$$\det H_\rho|_Z = -\frac{e^\tau(\rho - 1)^2}{\rho(e^\tau - 1)^2}.$$

Но

$$\det(\rho I - P) = (\rho - 1)^2 \det(\rho I - P^\perp), \quad \det(e^\tau I - Q) = (e^\tau - 1) \det(e^\tau I - Q^\perp),$$

что влечет (5.14).

Приведем простейшие приложения к вопросам устойчивости периодических траекторий, подобные полученным для дискретного случая. Для $\rho \in S^1$ определим ρ -индекс [28], [27] $\text{ind}_\rho \gamma$ периодической траектории γ как индекс эрмитовой формы h_ρ . Тогда $\text{ind } \gamma = \text{ind}_1 \gamma$ – индекс Морса траектории γ . Он равен числу отрицательных собственных значений оператора H . Если ρ не является собственным значением P , то

$$(-1)^{\text{ind}_\rho \gamma} = \text{sign } \det H_\rho = \sigma(-1)^m \text{sign}(\rho^{-m} \det(\rho I - P)).$$

Аргумент функции sign вещественный при $|\rho| = 1$, поскольку характеристический многочлен возвратный.

Следующее утверждение доказано в [5].

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Предположим, что периодическая траектория γ невырождена и $\sigma(-1)^{m+\text{ind } \gamma} < 0$. Тогда γ имеет вещественный мультипликатор $\rho > 1$.

Действительно, характеристический многочлен $F(\rho) = \det(\rho I - P)$ удовлетворяет условиям $F(1) < 0$ и $F(+\infty) = +\infty$. Значит, F имеет вещественный корень $\rho > 1$.

Следствие 5.2 неверно, если траектория γ вырождена. Предположим, например, что γ – замкнутая геодезическая.⁹ Тогда (5.15) влечет $\text{ind } h_\rho = \text{ind } h_\rho^\perp$, так что

$$(-1)^{\text{ind}_\rho \gamma} = \text{sign } \det H_\rho^\perp = \sigma(-1)^{m-1} \text{sign}(\rho^{1-m} \det(\rho I - P^\perp)).$$

⁹Общий вырожденный случай обсуждается в разделе 6.

СЛЕДСТВИЕ 5.3. Пусть замкнутая геодезическая γ невырождена и выполнено неравенство $\sigma(-1)^{m+\text{ind } \gamma} > 0$. Тогда характеристический многочлен $F(\rho) = \det(\rho I - P)$ имеет вещественный корень $\rho > 1$. Значит, γ экспоненциально неустойчива.

Это доказано в работах [5], [29] с помощью формулы Хилла и недавно в [11] с помощью теории индекса Маслова [7]. В частности, невырожденные замкнутые геодезические локально минимальной длины на четномерном ориентируемом многообразии являются экспоненциально неустойчивыми. Вырожденные геодезические линейно неустойчивы, но в общем случае не экспоненциально, и они могут быть орбитально устойчивыми. В общем случае такая неустойчивость не важна для приложений к устойчивости по Ляпунову.

Рассмотрим одномерный случай $m = 1$. Обозначим через γ^2 дважды пройденную траекторию γ (периода 2τ). Если γ^2 невырождена (т.е. ± 1 не являются мультипликаторами), то γ гиперболическая (эллиптическая), когда $\text{ind } \gamma^2$ четный (нечетный).

Действительно, γ и γ^2 одновременно эллиптические или гиперболические. Мультипликаторы γ^2 – квадраты мультипликаторов γ . Так что γ^2 гиперболическая, если ее мультипликаторы вещественные и положительные, или, эквивалентно, $\text{sign } \det(I - P^2) = (-1)^{1+\text{ind } \gamma^2} = -1$. Аналогично, γ^2 эллиптическая, когда $(-1)^{1+\text{ind } \gamma^2} = 1$.

Для геодезического случая получаем следующее утверждение Пуанкаре. Пусть γ – замкнутая геодезическая на двумерном римановом многообразии. Если γ^2 невырожденная, то γ гиперболическая (эллиптическая) тогда и только тогда, когда $\text{ind } \gamma^2$ четный (нечетный).

Предположим теперь, что $\rho = -1$. Тогда $(-1)^{\text{ind}_{-1} \gamma} = \sigma \text{sign } F(-1)$. Значит, если $\text{ind}_{-1} \gamma$ нечетный, то существует вещественный мультипликатор $\rho < -1$. Отметим, что пространство X_{-1} соответствует антипериодическим вариациям таким, что $\xi(t + \tau) = -\xi(t)$. Так как 2τ -периодические векторные поля представляются в виде суммы τ -периодических и τ -антипериодических, то

$$\text{ind}_{-1} \gamma = \text{ind } \gamma^2 - \text{ind } \gamma.$$

Значит, если $\text{ind } \gamma$ и $\text{ind } \gamma^2$ не являются четными или нечетными одновременно, то γ неустойчива.

5.5. Доказательство теоремы 5.2. Будем следовать [5], см. также [6]. Метод восходит к доказательству Пуанкаре [2], [30] классической формулы Хилла [1].

Вещественный косоэрмитов оператор $D = \bar{D} = -D^*$ имеет компактную резольвенту $(D + \mu I)^{-1}$. Его спектр $\Lambda = \sigma(D) \subset i\mathbb{R}$ совпадает с множеством характеристических показателей уравнения $D\eta(t) = 0$ параллельного переноса. Поэтому

$$\Lambda = \{\nu : \det(Q - e^{\tau\nu} I) = 0\}.$$

Если $\nu \in \Lambda$, то $-\nu$ и $\nu + \omega$ принадлежат Λ , где $\omega = 2\pi i/\tau$.

Пусть $\rho_1, \dots, \rho_m$ – корни уравнения $\det(Q - \rho I) = 0$. Так как $|\rho_j| = 1$, то ρ_j можно представить в виде $\rho_j = e^{\nu_j \tau}$, где $0 \leq \text{Im } \nu_j < 2\pi/\tau$. Тогда

$$\Lambda = \bigcup_{j=1}^m (\nu_j + \omega\mathbb{Z}). \quad (5.16)$$

Предположим сначала, что $\mu \notin \Lambda$. Тогда $H_\rho = ST$, где

$$S(\mu) = -(-D^2 + I)^{-1}(D + \mu I)^2, \quad T(\mu) = I - (D + \mu I)^{-2}U.$$

Так как $P_N D = D P_N$, из определения (5.12) вытекает, что

$$\det H_\rho = \det S \det T.$$

Конечномерная аппроксимации (5.12) определителя

$$\det T(\mu) = f(\mu) = \lim_{N \rightarrow \infty} \det(P_N T P_N^*),$$

сходится абсолютно при $\mu \notin \Lambda$, поскольку

$$\operatorname{tr} |(D + \mu I)^{-2}U| < \infty.$$

Значит, f – голоморфная функция на $\mathbb{C} \setminus \Lambda$, имеющая полюсы в точках множества Λ , кратность которых не больше удвоенной кратности соответствующей точки спектра D .

Функция f периодическая: $f(\mu + \omega) \equiv f(\mu)$. Действительно, если $\xi \in X^\mathbb{C}$, то $e^{\omega t}\xi \in X^\mathbb{C}$ и

$$(I - (D + \mu I)^{-2}U)e^{\omega t}\xi = e^{\omega t}(I - (D + (\mu + \omega)I)^{-2}U)\xi,$$

так что операторы $T(\mu)$ и $T(\mu + \omega)$ подобны. Следовательно, $f(\mu) = \phi(e^{\mu\tau})$, где $\phi(\rho)$ -мероморфная функция, имеющая полюсы в корнях $\rho_1, \dots, \rho_m$ полинома $\det(\rho I - Q)$. Кратность полюса не больше удвоенной кратности соответствующего корня.

Значит, существует многочлен $g(\rho)$ степени $\leq 2m-1$ такой, что функции $\phi(\rho)$ и $g(\rho)\det^{-2}(\rho I - Q)$ имеют одинаковые главные части лорановского разложения в каждом полюсе. Так как $\phi(\rho) \rightarrow 1$ при $|\rho| \rightarrow +\infty$, то по теореме Лиувилля

$$\phi(\rho) = 1 + g(\rho)\det^{-2}(\rho I - Q). \quad (5.17)$$

Определитель $\det S$ сходится условно. Согласно (5.12),

$$\begin{aligned} \det(-(-D^2 + I)^{-1}(D + \mu I)^2) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{\nu \in \Lambda_N} \frac{(\nu + \mu)^2}{\nu^2 - 1} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} (-\mu^2)^k \prod_{\nu \in \Lambda_N, i\nu > 0} \left(\frac{\nu^2 - \mu^2}{\nu^2 - 1} \right)^2 = (-1)^k \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{\nu \in \Lambda_N} \frac{\nu^2 - \mu^2}{\nu^2 - 1}, \end{aligned}$$

где k – кратность нуля в спектре оператора D и мы использовали, что $\Lambda = -\Lambda$.

Из структуры спектра (5.16) вытекает, что последнее произведение сходится абсолютно, так что оно является голоморфной функцией переменных $\rho_1, \dots, \rho_m, \rho$ при $\rho_j \neq e^{\pm\tau}$ и $\rho \neq 0$. Чтобы вычислить произведение, используем формулу Эйлера (см., например, [30]):

$$\prod_{n \in \mathbb{Z}} \left(1 - \frac{\mu^2}{(\nu + \omega n)^2} \right) = \frac{\cosh \mu\tau - \cosh \nu\tau}{1 - \cosh \nu\tau}, \quad \nu \notin \omega\mathbb{Z}.$$

Предположим сначала, что $\rho_j \neq 1$ и $\rho_i \neq \rho_j$ при $i \neq j$. Эквивалентно, $\nu_j \notin \omega\mathbb{Z}$ и $\nu_i - \nu_j \notin \omega\mathbb{Z}$ при $i \neq j$. Используя (5.16), получим

$$\begin{aligned} \prod_{\nu \in \Lambda} \frac{\nu^2 - \mu^2}{\nu^2 - 1} &= \prod_{\nu \in \Lambda} \left(1 - \frac{\mu^2}{\nu^2}\right) \left(1 - \frac{1}{\nu^2}\right)^{-1} \\ &= \prod_{j=1}^m \prod_{n \in \mathbb{Z}} \left(1 - \frac{\mu^2}{(\nu_j + \omega n)^2}\right) \left(1 - \frac{1}{(\nu_j + \omega n)^2}\right)^{-1} \\ &= \prod_{j=1}^m \frac{\cosh \mu\tau - \cosh \nu_j\tau}{\cosh \tau - \cosh \nu_j\tau} = \prod_{j=1}^m \frac{\rho + \rho^{-1} - \rho_j - \rho_j^{-1}}{e^\tau + e^{-\tau} - \rho_j - \rho_j^{-1}} \\ &= \prod_{j=1}^m \frac{e^\tau (\rho - \rho_j)^2}{\rho(e^\tau - \rho_j)^2} = \frac{e^{m\tau} \det^2(\rho I - Q)}{\rho^m \det^2(e^\tau I - Q)}. \end{aligned}$$

По непрерывности это выполняется для всех $\rho_1, \dots, \rho_m \neq e^{\pm\tau}$ и $\rho \neq 0$. Значит,

$$\det S = (-1)^k \frac{e^{m\tau} \det^2(\rho I - Q)}{\rho^m \det^2(e^\tau I - Q)}.$$

Согласно (5.12) и (5.17),

$$\rho^m \det H_\rho = (-1)^k \beta^{-1} (\det^2(\rho I - Q) + g(\rho)). \quad (5.18)$$

Следовательно, $G(\rho) = \rho^m \det H_\rho$ – многочлен степени $2m$ по ρ со старшим коэффициентом $(-1)^k \beta^{-1}$.

Покажем, что многочлены $G(\rho)$ и $F(\rho) = \det(P - \rho I)$ имеют одинаковые корни. Достаточно доказать, что если $F(\rho) = 0$, то $G(\rho) = 0$ и корень полинома G имеет не меньшую кратность, чем соответствующий корень F .

Если $F(\rho) = 0$, то существует ненулевое τ -периодическое векторное поле $\xi \in X$ такое, что $(-D^2 + U)e^{\mu t}\xi(t) = 0$. Следовательно, $H_\rho \xi = 0$. Предположим сначала, что ρ не является собственным значением Q , т. е. $\mu \notin \Lambda$. Тогда $H_\rho = ST$, где S – обратимый оператор и $\text{tr}|T - I| < \infty$. Так что $T\xi = 0$ влечет $\det T = 0$ (см., например, [31]). Тогда $\det H_\rho = \det S \det T = 0$, так что $G(\rho) = 0$.

Если $\mu \in \Lambda$, то можно повторить то же рассуждение, заменяя S, T на

$$\tilde{S} = (-D^2 + I)^{-1}(-(D + \mu I)^2 + I), \quad \tilde{T} = (-(D + \mu I)^2 + I)^{-1}(-(D + \mu I)^2 + U).$$

Доказано, что

$$G(\rho) = (-1)^k \beta^{-1} F(\rho).$$

Остается показать, что $(-1)^k = \sigma(-1)^m$. Действительно, k – размерность подпространства, на котором ортогональный оператор Q тождествен, а $\sigma = (-1)^n$, где n – размерность подпространства, на котором Q – отражение. Так как размерность $m - k - n$ дополнительного подпространства четная, формула (5.13) доказана.

6. Вырождение в формуле Хилла

В этом разделе рассматривается случай, когда периодическая траектория γ вырождена, т. е. система уравнений в вариациях имеет ненулевое τ -периодическое решение $\zeta(t)$, или, эквивалентно, линейное отображение Пуанкаре P

имеет единичный мультипликатор. Обычно подобная ситуация возникает, когда нелинейная лагранжева система имеет периодический по времени первый интеграл $\mathcal{J}$, невырожденный на γ . Тогда, как доказано Пуанкаре, система уравнений в вариациях имеет ненулевое периодическое решение и линейный периодический первый интеграл – линейнизацию интеграла $\mathcal{J}$ на периодической траектории. Приведем два стандартных примера.

1. Автономная лагранжева система. В этом случае система $(M, \mathcal{L})$ имеет интеграл энергии

$$\mathcal{H}(x, \dot{x}) = \langle p, \dot{x} \rangle - \mathcal{L}(x, \dot{x}), \quad p = \mathcal{L}_{\dot{x}}(x, \dot{x}).$$

Система уравнений в вариациях периодической траектории γ имеет периодическое решение $\zeta(t) = \dot{\gamma}(t)$. Частный случай – замкнутая геодезическая римановой метрики.

2. Лагранжева система с симметрией. Предположим, что система $(M, \mathcal{L})$ допускает группу симметрий $\psi_s: M \rightarrow M$, $s \in \mathbb{R}$, сохраняющую $\mathcal{L}$. Обозначим через $\mathbf{w}(x) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \psi_s(x)$ соответствующее поле симметрий. Тогда

$$\mathcal{J}(x, \dot{x}, t) = \langle p, \mathbf{w}(x) \rangle, \quad p = \mathcal{L}_{\dot{x}}(x, \dot{x}, t),$$

– первый интеграл Нётер. Система уравнений в вариациях периодической траектории γ имеет τ -периодическая решение $\zeta(t) = \mathbf{w}(\gamma(t))$. Вот конкретный пример.

Плоская задача трех тел. Здесь

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i |\dot{x}_i|^2 + \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|}, \quad x_i \in \mathbb{R}^2.$$

Поместим центр масс в начало координат:

$$M = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in (\mathbb{R}^2)^3 : \sum_{i=1}^3 m_i x_i = 0, x_i \neq x_j \right\}.$$

Вращения плоскости $\mathbb{R}^2$ сохраняют $\mathcal{L}$. Соответствующее поле симметрий имеет вид $\mathbf{w}(x) = (Jx_1, Jx_2, Jx_3)$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Нётеров интеграл – кинетический момент

$$\mathcal{J}(x, \dot{x}) = \sum_{i=1}^3 \langle Jx_i, m_i \dot{x}_i \rangle.$$

Так как система автономная, имеем двукратную вырожденность: для периодической траектории, на которой $\mathcal{H}$ и $\mathcal{J}$ независимы, единичное собственное значение P имеет кратность не меньше 4. Стационарные периодические решения (траектории группы симметрий) имеют меньшее вырождение.

За последние несколько лет вариационными методами найдено множество периодических решений задачи трех тел [13]. Однако мы видим, что обычная формула Хилла для них вырождается. В настоящем разделе предложен подход к решению этой проблемы.

3. Общая гамильтонова группа симметрий. Приведенные примеры – частные случаи следующей общей ситуации. Представим систему $(M, \mathcal{L})$ как гамильтонову с гамильтонианом $\mathcal{H}$. Предположим, что система допускает алгебру $\mathfrak{g}$ гамильтоновых полей симметрий $\mathbf{v}$, порожденных гамильтонианами $\mathcal{J}_{\mathbf{v}}$. Пусть $\gamma - \tau$ -периодическое решение в фазовом пространстве. Для $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$ векторное поле $\zeta(t) = \mathbf{v}(\gamma(t))$ является периодическим решением системы уравнений в вариациях и

$$Pw = w, \quad w = \mathbf{v}(\gamma(0)), \quad \mathbf{v} \in \mathfrak{g}. \quad (6.1)$$

Если система автономна, то гамильтоново векторное поле системы $(M, \mathcal{L})$ принадлежит $\mathfrak{g}$, а соответствующий собственный вектор w равен $\dot{\gamma}(0)$.

В настоящей работе рассматривается лишь случай, когда алгебра $\mathfrak{g} - k$ -мерная коммутативная алгебра. Тогда соответствующее собственное подпространство $V \subset \text{Ker}(P - I)$ изотропно, а кратность единичного собственного значения не меньше $2k$. Гамильтоново понижение порядка (см., например, [32]) обычно позволяет снять эту вырожденность, однако полученная гамильтонова система обычно не имеет естественной лагранжевой структуры.

Классический метод снятия автономного вырождения в рамках лагранжевых систем – переход от функционала действия Гамильтона к функционалу действия Мопертью [32]. Классический метод снятия нётерова вырождения в рамках лагранжева формализма – метод Рауса [32]. Опишем его кратко.

Предположим, что система $(M, \mathcal{L})$ допускает k коммутирующих независимых полей симметрии $\mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^k$ на M :

$$[\mathbf{w}^\alpha, \mathbf{w}^\beta] = 0, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, k.$$

Тогда соответствующие потоки ψ_s^α коммутируют. Пусть $G - (\text{локальная})$ коммутативная группа симметрий, действующая на M как $x \mapsto \psi_{s_1}^1 \circ \dots \circ \psi_{s_k}^k(x)$, $s \in \mathbb{R}^k$. Предположим, что $\widetilde{M} = M/G - \text{гладкое многообразие}$ и $\pi: M \rightarrow \widetilde{M} - \text{гладкое расслоение}$.

Нётеровы интегралы $\mathcal{J}^\alpha = \langle p, \mathbf{w}^\alpha \rangle$ в совокупности дают векторный интеграл $\mathcal{J}(x, \dot{x}, t) \in \mathbb{R}^k$. Метод Рауса сводит лагранжеву систему $(M, \mathcal{L})$ на уровне $\mathcal{J} = c \in \mathbb{R}^k$ к лагранжевой системе $(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{L}})$ на редуцированном конфигурационном пространстве $\widetilde{M}$.

Для $c = 0$ редуцированный лагранжиан задается формулой¹⁰

$$\widetilde{\mathcal{L}}(x, \dot{x}, t) = \min_{s \in \mathbb{R}^k} \mathcal{L}(x, \dot{x} + s_\alpha \mathbf{w}^\alpha(x), t), \quad (6.2)$$

при условии, что минимум существует, например, лагранжиан $\mathcal{L}$ суперлинейный по скорости. Так как функция $\widetilde{\mathcal{L}}$ зависит только от $\tilde{x} = \pi(x)$ и $\tilde{\dot{x}} = d\pi(x)\dot{x}$, она может рассматриваться как функция на $T\widetilde{M} \times \mathbb{R}$.

Для $c \neq 0$ возьмем замкнутые G -инвариантные 1-формы $\nu_1, \dots, \nu_k$ на M такие, что $\nu_\alpha(\mathbf{w}^\beta) \equiv \delta_\alpha^\beta$.¹¹ Если заменить лагранжиан калибровочно эквивалентным,

$$\widehat{\mathcal{L}}(x, \dot{x}, t) = \mathcal{L}(x, \dot{x}, t) - c^\alpha \nu_\alpha(\dot{x}),$$

¹⁰Напомним, что предполагается суммирование по повторяющимся греческим индексам.

¹¹Такие ν_α существуют глобально, если расслоение $\pi: M \rightarrow \widetilde{M}$ тривиально. В общем случае первый класс Черна является препятствием. Однако ν_α всегда существуют в окрестности периодической траектории.

то уравнения Лагранжа не изменятся, но нётеровы интегралы заменятся на $\tilde{\mathcal{J}}^\alpha = \mathcal{J}^\alpha - c^\alpha$. Поэтому c заменится на 0, и функция Рауса $\tilde{\mathcal{L}}$ задается формулой (6.2). Имеет место следующая теорема (см. [32]).

ТЕОРЕМА 6.1 (Раус). Пусть $x(t)$ – траектория системы $(M, \mathcal{L})$ с $\mathcal{J} = c$. Тогда $\tilde{x}(t) = \pi(x(t))$ – траектория системы $(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{L}})$. Обратно, если $\tilde{x}(t)$ – траектория системы $(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{L}})$, то существует траектория $x(t)$ системы $(M, \mathcal{L})$ с $\mathcal{J} = c$ такая, что $\tilde{x}(t) = \pi(x(t))$.

Если γ – периодическая траектория системы $(M, \mathcal{L})$, а $\tilde{\gamma}$ – соответствующая траектория системы $(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{L}})$, то их системы уравнений в вариациях связаны линейной версией метода Рауса. В следующем пункте описана редукция Рауса для линейных лагранжевых систем. Она применима в самом общем случае, например когда лагранжева система имеет не нётерову алгебру интегралов $\mathfrak{g}$. В частности, линейная редукция Рауса включает линейризованную редукцию Мопертюи.

6.1. Редукция Рауса для линейных лагранжевых систем. Если отображение Пуанкаре $P: W \rightarrow W$ периодической траектории γ имеет единичное собственное значение, то собственному вектору $w = Pw$ соответствует ненулевое τ -периодическое решение $\zeta(t)$ системы (E, Λ) . Как доказано Пуанкаре, система уравнений в вариациях имеет линейный τ -периодический первый интеграл

$$I_\zeta(\xi, D\xi) = (\zeta, D\xi) - (\xi, D\zeta).$$

Действительно, из уравнения (5.4) вытекает

$$\frac{d}{dt} I_\zeta(\xi(t), D\xi(t)) = (\zeta, D^2\xi) - (\xi, D^2\zeta) = (\zeta, U\xi) - (\xi, U\zeta) = 0.$$

В действительности $I_\zeta(\xi, D\xi) = \omega(w, v) = J_w(v)$ – значение симплектической формы на векторах $v, w \in W$, соответствующих ξ, ζ .

Предположим, что отображение Пуанкаре P имеет несколько собственных векторов, соответствующих единичному собственному значению. Пусть $V \subset \text{Ker}(P - I)$ – изотропное подпространство, а $\Gamma \subset X$ – соответствующее пространство периодических решений системы (E, Λ) . Пусть $w^1, \dots, w^k$ – базис для V и $\zeta^1, \dots, \zeta^k \in \Gamma$ – соответствующие независимые решения. Система (E, Λ) имеет первые интегралы

$$I^\alpha(\xi, D\xi) = (\zeta^\alpha, D\xi) - (\xi, D\zeta^\alpha), \quad \alpha = 1, \dots, k,$$

в инволюции:

$$I^\alpha(\zeta^\beta, D\zeta^\beta) = (\zeta^\alpha, D\zeta^\beta) - (\zeta^\beta, D\zeta^\alpha) = \omega(w^\alpha, w^\beta) = 0. \quad (6.3)$$

Положим для краткости $I = (I^1, \dots, I^k)$.

Обозначим

$$F_t = \{\zeta(t) : \zeta \in \Gamma\} = \text{span}\{\zeta^1(t), \dots, \zeta^k(t)\}.$$

Для простоты изложения сделаем следующее предположение невырожденности.

УСЛОВИЕ A' . $\dim F_t = k$ при всех t .

Эквивалентно, векторы $\zeta^1(t), \dots, \zeta^k(t) \in E_t$ независимы для всех t . Отсюда матрица Грама

$$G = (g^{\alpha\beta}), \quad g^{\alpha\beta}(t) = (\zeta^\alpha(t), \zeta^\beta(t)), \quad (6.4)$$

невырождена при всех t .

В приложении A.3 будет показано, что условие A' излишне. А именно, сингулярное множество $\Sigma = \{t \in \mathbb{R}/\tau\mathbb{Z} : \dim F_t < k\}$ конечно и семейство $(F_t)_{t \notin \Sigma}$ может быть продолжено до гладкого k -мерного расслоения $(F_t)_{t \in \mathbb{R}/\tau\mathbb{Z}}$. Поэтому все основные результаты раздела 6 справедливы и без условия A' .

При редукции Рауса линейной системы (E, Λ) редуцированное конфигурационное пространство $\tilde{E}_t = E_t/F_t$ отождествляется с

$$E_t^\perp = \{u \in E_t : (u, w) = 0 \text{ для всех } w \in F_t\}$$

с помощью ортогональной проекции $\Pi = \Pi_t : E_t \rightarrow E_t^\perp$. Для гладкого поля $\xi(t) \in E_t$ обозначим $D^\perp \xi(t) = \Pi_t D\xi(t)$. В явном виде,

$$\Pi\xi = \xi - g_{\alpha\beta}(\xi, \zeta^\beta)\zeta^\alpha, \quad D^\perp \xi = D\xi - g_{\alpha\beta}(D\xi, \zeta^\beta)\zeta^\alpha, \quad (6.5)$$

где $G^{-1} = (g_{\alpha\beta})$ — матрица, обратная к матрице Грама $G = (g^{\alpha\beta})$. В приложении A.3 будет показано, что Π и $D^\perp$ гладкие также когда условие A' не выполнено.

Определим редуцированный лагранжиан Рауса $\Lambda^\perp$ на $E^\perp = (E_t^\perp)$ формулой

$$\Lambda^\perp(\eta, D^\perp \eta) = \frac{1}{2} (D^\perp \eta, D^\perp \eta) + \frac{1}{2} (U^\perp \eta, \eta), \quad \eta(t), D^\perp \eta(t) \in E_t^\perp,$$

где симметрический оператор $U^\perp(t) : E_t^\perp \rightarrow E_t^\perp$ задается формулой

$$(U^\perp u, u) = (Uu, u) - 3g_{\alpha\beta}(u, D^\perp \zeta^\alpha)(u, D^\perp \zeta^\beta), \quad u \in E_t^\perp.$$

Отсюда $U^\perp = \Pi U - 3C$, где

$$Cu = g_{\alpha\beta}(u, D^\perp \zeta^\alpha) D^\perp \zeta^\beta$$

(C не зависит от выбора базиса).

Билинейная форма действия, отвечающая системе $(E^\perp, \Lambda^\perp)$, имеет вид

$$\frac{1}{2} h^\perp(\eta, \eta) = \int_0^\tau \Lambda^\perp(\eta, D^\perp \eta) dt, \quad \eta(t) \in E_t^\perp. \quad (6.6)$$

Сформулируем теорему Рауса для линейных лагранжевых систем.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть $\xi(t) \in E_t$ — решение системы (E, Λ) такое, что $I(\xi, D\xi) \equiv 0$. Тогда $\eta(t) = \Pi\xi(t) \in E_t^\perp$ — решение системы $(E^\perp, \Lambda^\perp)$. Обратно, если $\eta(t)$ — решение системы $(E^\perp, \Lambda^\perp)$, то существует решение $\xi(t)$ системы (E, Λ) , единственное по модулю Γ , такое, что $I(\xi, D\xi) = 0$ и $\eta(t) = \Pi\xi(t)$.

Для доказательства потребуется следующее очевидное утверждение.

ЛЕММА 6.1. Пусть

$$\eta(t) - \xi(t) \in F_t, \quad \xi(t) = \eta(t) + \lambda_\alpha(t)\zeta^\alpha(t). \quad (6.7)$$

Тогда ξ удовлетворяет уравнению $I_t^\alpha(\xi, D\xi) = c^\alpha$ при всех $\alpha = 1, \dots, k$ в том и только том случае, когда

$$\dot{\lambda}_\alpha = g_{\alpha\beta}(c^\beta - I^\beta(\eta, D\eta)). \quad (6.8)$$

Действительно, $I^\alpha(\xi, D\xi) = I^\alpha(\eta, D\eta) + g^{\alpha\beta}\dot{\lambda}_\beta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.2. Векторное поле $\xi(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, является решением системы (E, Λ) тогда и только тогда, когда

$$h(\xi, \phi) = \int_0^\tau ((D\xi, D\phi) + (U\xi, \phi)) dt = 0$$

для каждого гладкого поля вариации $\phi(t) \in E_t$ такого, что $\phi(0) = \phi(\tau) = 0$.

Предположим, что $I(\xi, D\xi) = 0$, и положим $\eta = \Pi\xi$. Требуется показать, что для любой гладкой вариации $\phi(t) \in E_t^\perp$ такой, что $\phi(0) = \phi(\tau) = 0$, выполнено равенство

$$h^\perp(\eta, \phi) = \int_0^\tau ((D^\perp\eta, D^\perp\phi) + (U^\perp\eta, \phi)) dt = 0,$$

где $h^\perp$ – билинейная форма (6.6), соответствующая системе Рауса.

Согласно лемме 6.1, $\xi = \eta + \lambda_\alpha\zeta^\alpha$, где $\eta(t) \in E_t^\perp$ и

$$\dot{\lambda}_\alpha = -g_{\alpha\beta}I^\beta(\eta, D\eta) = 2g_{\alpha\beta}(\eta, D\zeta^\beta). \quad (6.9)$$

Так как $(\eta, \zeta^\alpha) = (\phi, \zeta^\alpha) = 0$, то из (6.5) вытекает

$$D\eta = D^\perp\eta - g_{\alpha\beta}(\eta, D\zeta^\alpha)\zeta^\beta, \quad D\phi = D^\perp\phi - g_{\alpha\beta}(\phi, D\zeta^\alpha)\zeta^\beta.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} h(\xi, \phi) &= \int_0^\tau ((D\eta + \dot{\lambda}_\alpha\zeta^\alpha + \lambda_\alpha D\zeta^\alpha, D\phi) + (U\eta, \phi) + (\lambda_\alpha U\zeta^\alpha, \phi)) dt \\ &= \int_0^\tau ((D\eta, D\phi) + (U\eta, \phi) + (\dot{\lambda}_\alpha\zeta^\alpha + \lambda_\alpha D\zeta^\alpha, D\phi) + (\lambda_\alpha D^2\zeta^\alpha, \phi)) dt \\ &= \int_0^\tau \left((D^\perp\eta, D^\perp\phi) + (U\eta, \phi) + (g_{\alpha\beta}(\eta, D\zeta^\alpha)\zeta^\beta, g_{\delta\epsilon}(\phi, D\zeta^\delta)\zeta^\epsilon) \right. \\ &\quad \left. + \frac{d}{dt}((\lambda_\alpha D\zeta^\alpha, \phi) - 2(\dot{\lambda}_\alpha\zeta^\alpha, \phi)) \right) dt \\ &= \int_0^\tau ((D^\perp\eta, D^\perp\phi) + (U\eta, \phi) - 3g_{\alpha\beta}(\phi, D\zeta^\alpha)(\eta, D\zeta^\beta)) dt \\ &= h^\perp(\eta, \phi) = 0. \end{aligned}$$

Значит, η – траектория системы $(E^\perp, \Lambda^\perp)$. Доказательство обратного утверждения опустим.

Теперь можно записать формулу Хилла для редуцированного отображения Пуанкаре $\tilde{P}: \tilde{W} \rightarrow \tilde{W}$. Положим

$$X^\perp = \{\eta \in X : \eta(t) \in E_t^\perp\}$$

и обозначим через

$$H^\perp = (-D^{\perp 2} + I)^{-1}(-D^{\perp 2} + U^\perp): X^\perp \rightarrow X^\perp$$

оператор Гессе для редуцированной системы $(E^\perp, \Lambda^\perp)$. Пусть $Q^\perp: E_0^\perp \rightarrow E_0^\perp$ – оператор параллельного переноса, соответствующий уравнению $D^\perp \eta = 0$. Положим $\sigma^\perp = \det Q^\perp = \pm 1$. Если условие **A'** выполняется, то $\sigma = \sigma^\perp$, поскольку расслоение F ориентируемо. В общем случае F может быть неориентируемым.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. *Имеет место равенство*

$$\det(\tilde{P} - I) = \sigma^\perp (-1)^{m-k} \beta^\perp \det H^\perp, \quad \beta^\perp = e^{(m-k)\tau} \det^{-2}(e^\tau I - Q^\perp) > 0. \quad (6.10)$$

Для задачи о геодезических, $Q^\perp = Q|_{X^\perp}$, $H^\perp = H|_{X^\perp}$, $\tilde{P} = P^\perp$, $\sigma = \sigma^\perp$, и получаем следствие 5.1.

Отметим, что в общем случае $H^\perp \neq H|_{X^\perp}$, за исключением случая, когда $D^\perp \zeta = 0$. Причина в том, что если поле $\eta \in X^\perp$ τ -периодическое, то λ в (6.9), вообще говоря, не периодическая, так что $\xi \notin X$. Поэтому пространство $X^\perp$ периодических $\eta(t) \in E_t^\perp$ не соответствует пространству периодических $\xi(t) \in E_t$ таких, что $I(\xi, D\xi) = 0$. Таким образом, $h^\perp$ не есть ограничение h на $X^\perp$, как в геодезическом случае. Так что потребуются обсудить связь между $h^\perp$ и h .

6.2. Исключение вырожденности второй вариации. Как и в (3.21), (3.22), определим подпространства $Y, Z \subset X$ формулами

$$Y = \{\xi \in X : I(\xi, D\xi) \equiv \text{const}\}, \quad (6.11)$$

$$Z = \{\xi \in X : \xi(t) \in F_t \text{ для всех } t\}. \quad (6.12)$$

Если $\zeta^1, \dots, \zeta^k \in \Gamma$ – базисные периодические решения, то

$$Z = \left\{ \xi(t) = \lambda_\alpha(t) \zeta^\alpha(t) : \lambda_\alpha(t + \tau) = \lambda_\alpha(t), \int_0^\tau g^{\alpha\beta} \dot{\lambda}_\alpha \dot{\lambda}_\beta dt < \infty \right\}.$$

ЛЕММА 6.2. *Для любого $\eta \in X$ существует $\xi = \Phi(\eta) \in Y$, единственное по модулю Γ , такое, что $\xi - \eta \in Z$. В явном виде, $\eta = \xi - \lambda_\alpha \zeta^\alpha$, где λ_α удовлетворяет уравнению (6.8), а $c^\alpha = c^\alpha(\eta)$ задается формулой*

$$c^\alpha = \kappa^{\alpha\beta} \int_0^\tau g_{\beta\delta} I^\delta(\eta, D\eta) dt, \quad (\kappa^{\alpha\beta}) = (\bar{g}_{\alpha\beta})^{-1}, \quad \bar{g}_{\alpha\beta} = \int_0^\tau g_{\alpha\beta} dt. \quad (6.13)$$

Это вытекает из леммы 6.1 при периодических ξ, η .

Построена проекция $\Phi: X \rightarrow \hat{Y} = Y/\Gamma$, тождественная на Y и равная нулю на Z . Получим следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. $Y \cap Z = \Gamma$ и $Y + Z = X$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. Пространства Y, Z являются h -ортгоналными, т.е. $h(\xi, \eta) = 0$ при всех $\xi \in Z, \eta \in Y$. Ограничение h на Z имеет вид

$$h(\lambda_\alpha \zeta^\alpha, \lambda_\beta \zeta^\beta) = \int_0^\tau g^{\alpha\beta} \dot{\lambda}_\alpha \dot{\lambda}_\beta dt. \quad (6.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $\xi \in Z, \xi(t) = \lambda_\alpha(t) \zeta^\alpha(t)$. Тогда

$$\begin{aligned} h(\lambda_\alpha \zeta^\alpha, \eta) &= \int_0^\tau \left((D(\lambda_\alpha \zeta^\alpha), D\eta) + (U\lambda_\alpha \zeta^\alpha, \eta) \right) dt \\ &= \int_0^\tau \left((\dot{\lambda}_\alpha \zeta^\alpha, D\eta) + (\lambda_\alpha D\zeta^\alpha, D\eta) + (\lambda_\alpha D^2 \zeta^\alpha, \eta) \right) dt \\ &= \int_0^\tau \left(\frac{d}{dt}(\eta, \lambda_\alpha D\zeta^\alpha) + \dot{\lambda}_\alpha I^\alpha(\eta, D\eta) \right) dt \\ &= (\eta, \lambda_\alpha D\zeta^\alpha)|_0^\tau + \int_0^\tau \dot{\lambda}_\alpha I^\alpha(\eta, D\eta) dt \end{aligned} \quad (6.15)$$

(здесь использовано, что ζ удовлетворяет системе уравнений в вариациях). Если $\eta = \lambda_\alpha \zeta^\alpha$, то $I^\alpha(\eta, D\eta) = g^{\alpha\beta} \dot{\lambda}_\alpha \dot{\lambda}_\beta$, так что

$$h(\lambda_\alpha \zeta^\alpha, \lambda_\beta \zeta^\beta) = \int_0^\tau g^{\alpha\beta} \dot{\lambda}_\alpha \dot{\lambda}_\beta dt + (\lambda_\alpha \zeta^\alpha, \lambda_\beta D\zeta^\beta)|_0^\tau. \quad (6.16)$$

Если $\eta \in Y$ и λ_α периодические, то (6.15) дает 0, а (6.16) дает (6.14). Предложение 6.2 доказано.

Обозначим

$$\hat{X} = X/\Gamma, \quad \hat{Y} = Y/\Gamma, \quad \hat{Z} = Z/\Gamma.$$

Тогда $\hat{Y} \oplus \hat{Z} = \hat{X}$. Билинейная форма h определяет форму $\hat{h}$ на $\hat{X}$ и $\hat{Y} \perp_{\hat{h}} \hat{Z}$, а $\hat{h}|_{\hat{Z}}$ положительно определена.

СЛЕДСТВИЕ 6.2. Для индексов и степеней вырождения форм h и $\hat{h}$ справедливы следующие соотношения:

$$\text{ind } h = \text{ind } \hat{h}|_{\hat{Y}}, \quad \text{null } h = \text{null } \hat{h}|_{\hat{Y}} + k.$$

СЛЕДСТВИЕ 6.3. Проекция $\Pi: X \rightarrow X^\perp$ определяет изоморфизм

$$\hat{\Pi}|_{\hat{Y}}: \hat{Y} \rightarrow X^\perp, \quad (\Pi|_{\hat{Y}})^{-1} = \Phi|_{X^\perp}. \quad (6.17)$$

Действительно, если $\Pi\xi = 0$ при $\xi \in Y$, то $\xi \in Z$, так что $\xi \in Y \cap Z = \Gamma$ (предложение 6.1). Аналогично, $Y + Z = X$ влечет, что $\Pi(Y) = X^\perp$.

Вычислим ограничение $h|_Y$. Пусть $h^\perp(\eta, \eta)$ – билинейная форма редуцированной системы $(E^\perp, \Lambda^\perp)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. Пусть $h^\top = h|_Y \circ \hat{\Pi}^{-1}$ – билинейная форма на $X^\perp$, соответствующая форме $h|_Y$. Тогда для каждого $\eta \in X^\perp$ имеем

$$h^\top(\eta, \eta) = h^\perp(\eta, \eta) + \bar{g}_{\alpha\beta} c^\alpha c^\beta, \quad (6.18)$$

где $c^\alpha(\eta) = I^\alpha(\xi, D\xi)$, $\xi = \Phi\eta$, задаются формулой (6.13).

Это вытекает из следующей более общей формулы.

ЛЕММА 6.3. Пусть $\xi(t) = \eta(t) + \lambda_\alpha(t)\zeta^\alpha(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, тем же, что в лемме 6.1. Тогда

$$\begin{aligned} h(\xi, \bar{\xi}) &= h(\eta, \eta) - \int_0^\tau g_{\alpha\beta}(I^\alpha(\eta, D\eta) - c^\alpha)(I^\beta(\eta, D\eta) - c^\beta) dt \\ &\quad + ((\lambda_\alpha \zeta^\alpha, \lambda_\beta D\zeta^\beta) + 2(\lambda_\alpha \eta, D\zeta^\alpha) + 2c^\alpha \lambda_\alpha) \Big|_0^\tau. \end{aligned} \quad (6.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$h(\xi, \xi) = h(\eta, \eta) + 2h(\eta, \lambda_\alpha \zeta^\alpha) + h(\lambda_\alpha \zeta^\alpha, \lambda_\beta \zeta^\beta).$$

Теперь (6.19) вытекает из (6.15), (6.16) и (6.8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 6.3. Если η и λ периодические, то граничные члены в (6.19) исчезают. Согласно (6.13),

$$\begin{aligned} &\int_0^\tau g_{\alpha\beta}(c^\alpha - I^\alpha(\eta, D\eta))(c^\beta - I^\beta(\eta, D\eta)) dt \\ &= \int_0^\tau g_{\alpha\beta}I^\alpha(\eta, D\eta)I^\beta(\eta, D\eta) dt - 2 \int_0^\tau g_{\alpha\beta}c^\alpha I^\beta(\eta, D\eta) dt + \bar{g}_{\alpha\beta}c^\alpha c^\beta \\ &= \int_0^\tau g_{\alpha\beta}I^\alpha(\eta, D\eta)I^\beta(\eta, D\eta) dt - \bar{g}_{\alpha\beta}c^\alpha c^\beta. \end{aligned}$$

Теперь используем, что $\eta = \Pi\xi \in X^\perp$. Тогда $I^\alpha(\eta, D\eta) = -2(\eta, D^\perp \zeta^\alpha)$, так что

$$\int_0^\tau g_{\alpha\beta}I^\alpha(\eta, D\eta)I^\beta(\eta, D\eta) dt = 4 \int_0^\tau g_{\alpha\beta}(\eta, D^\perp \zeta^\alpha)(\eta, D^\perp \zeta^\beta) dt.$$

Наконец,

$$\begin{aligned} h(\eta, \eta) &= \int_0^\tau ((D^\perp \eta, D^\perp \bar{\eta}) + g_{\alpha\beta}(\eta, D^\perp \zeta^\alpha)(\eta, D^\perp \zeta^\beta) + (U\eta, \bar{\eta})) dt \\ &= h^\perp(\eta, \eta) + 4 \int_0^\tau g_{\alpha\beta}(\eta, D^\perp \zeta^\alpha)(\eta, D^\perp \zeta^\beta) dt. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Остается подставить (6.20) в формулу (6.19).

С точки зрения редукции Рауса естественно рассмотреть пространство

$$Y^0 = \{\xi \in X : I(\xi, D\xi) \equiv 0\} \subset Y. \quad (6.21)$$

Действительно, согласно (6.18), $h|_{Y^0} = h^\perp \circ \Pi|_{Y^0}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4. Сумма пространств Y^0 и Z имеет вид

$$Y^0 + Z = \left\{ \eta \in X : \int_0^\tau g_{\alpha\beta}(D^\perp \zeta^\beta, \eta) dt = 0 \right\}. \quad (6.22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $\eta \in X$. Тогда $\xi = \Phi\eta \in Y^0$ при условии

$$0 = \int_0^\tau g_{\alpha\beta}I^\beta(\eta, D\eta) dt = -2 \int_0^\tau g_{\alpha\beta}(D^\perp \zeta^\beta, \eta) dt.$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$g_{\alpha\beta}I^\beta(\eta, D\eta) = \frac{d}{dt}(g_{\alpha\beta}(\eta, \zeta^\beta)) - 2g_{\alpha\beta}(\eta, D^\perp \zeta^\beta). \quad (6.23)$$

Таким образом, $Y^0 + Z = X$ тогда и только тогда, когда $D^\perp \zeta^\alpha = 0$. Эквивалентно, $DZ \subset Z$. Положим

$$X_0^\perp = \text{П}Y^0 = \left\{ \eta \in X^\perp : \int_0^\tau g_{\alpha\beta}(D^\perp \zeta^\beta, \eta) dt = 0 \right\}. \quad (6.24)$$

Тогда $X_0^\perp$ имеет коразмерность $\leq k$ в $X^\perp$. Имеем $h^\top \geq h^\perp$ и $h^\top = h^\perp$ на $X_0^\perp$. Так как $\text{ind } h^\top = \text{ind } h$, то

$$\text{ind } h^\perp \leq \text{ind } h|_X \leq \text{ind } h^\perp + k.$$

Пусть $\Omega = Y/Y^0$. Так как $\hat{\text{П}}: Y \rightarrow X^\perp$ — изоморфизм, то $\dim \Omega \leq k$. Интеграл $I: Y \rightarrow \mathbb{R}^k$ задает отображение $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$. Чтобы сравнить индексы $h^\top$ и $h^\perp$, в п. 6.4 будет построен базис в Ω , на котором I невырожден.

6.3. Индексы h и $h^\perp$. В этом пункте обсуждается связь между индексами $\text{ind } h = \text{ind } h|_Y$ и $\text{ind } h^\perp$. Пусть $P: W \rightarrow W$ — отображение Пуанкаре. Как и в п. 3.7, предположим, что

$$N = \text{Ker}(P - I)^2 = \{v \in W : Pv - v \in V\}$$

— симплектическое пространство и $V = \text{Ker}(P - I)$ — лагранжево подпространство в N . Пусть $w^1, \dots, w^k$ — базис в пространстве V и $q_1, \dots, q_k$ — базис в лагранжевом дополнении к V в N . Определим матрицу $s_{\alpha\beta}$ формулой (3.30). Определим матрицы $A = (a_{\alpha\beta})$ и $A^\perp = (a_{\alpha\beta}^\perp)$ формулами (3.31), где матрицы $\varkappa^{\alpha\beta}$ и $\bar{g}_{\alpha\beta}$ следует брать из (6.13).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что γ невырождена mod V , если выполняется условие A' (с. 52) и $\det A^\perp \neq 0$.

ТЕОРЕМА 6.3. *Предположим, что γ невырождена mod V . Тогда*

$$\text{ind } h - \text{ind } h^\perp = \text{ind } A - \text{ind } A^\perp. \quad (6.25)$$

Формулировка совпадает с формулировкой теоремы 3.2, но доказательства различны. Теорема 6.3 будет доказана в п. 6.4. Так как форма $h|_{\hat{Z}}$ положительно определена, то как в доказательстве следствия 3.3, получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 6.4. *Предположим, что $\det A \neq 0$. Тогда*

$$(-1)^{\text{ind } h} = (-1)^{\text{ind } h^\perp + \text{ind } b}.$$

6.4. Пространства Ω и $\Omega^\perp$. Рассмотрим периодические решения $\zeta^\alpha(t)$, $\eta_\alpha(t)$ системы (E, Λ) , соответствующие векторам w^α , q_α . Тогда $\zeta^\alpha(t)$ периодические и удовлетворяют (6.3). Из уравнений (3.30) вытекает

$$\eta_\alpha(t + \tau) - \eta_\alpha(t) = s_{\alpha\beta} \zeta^\beta(t), \quad (\eta_\alpha, D\eta_\beta) - (\eta_\beta, D\eta_\alpha) = 0 \quad (6.26)$$

и $(\zeta^\alpha, D\eta_\beta) - (\eta_\beta, D\zeta^\alpha) = \delta_\beta^\alpha$.

Для $\alpha = 1, \dots, k$ положим

$$\hat{\eta}_\alpha = \eta_\alpha - \lambda_{\alpha\beta} \zeta^\beta,$$

где коэффициенты $\lambda_{\alpha\beta}$ выбираются так, что функции $\hat{\eta}_\alpha$ являются τ -периодическими и

$$(\zeta^\alpha, D\hat{\eta}_\beta) - (\hat{\eta}_\beta, D\zeta^\alpha) = c_\beta^\alpha = \text{const}.$$

Тогда c_β^α удовлетворяют (3.38) и

$$\lambda_{\alpha\beta}(t + \tau) - \lambda_{\alpha\beta}(t) = s_{\alpha\beta}, \quad \dot{\lambda}_{\alpha\beta} = s_{\alpha\delta} \kappa^{\delta\varepsilon} g_{\varepsilon\beta}.$$

Положим $\eta_\alpha^\perp = \Pi \eta_\alpha$. Тогда

$$\eta_\alpha^\perp = \eta_\alpha - \lambda_{\alpha\beta}^\perp \zeta^\beta, \quad \lambda_{\alpha\beta}^\perp(t + \tau) - \lambda_{\alpha\beta}^\perp(t) = s_{\alpha\beta}, \quad \lambda_{\alpha\beta}^\perp = (\eta_\alpha, \zeta^\delta) g_{\delta\beta}.$$

Рассмотрим пространства

$$\Omega = \text{span}(\hat{\eta}_1, \dots, \hat{\eta}_k) = \Phi \Omega^\perp \subset \hat{Y}, \quad \Omega^\perp = \text{span}(\eta_1^\perp, \dots, \eta_k^\perp) = \Pi \Sigma \subset X^\perp.$$

Также определим пространства $\hat{\Omega}$ и $\hat{Y}^0$ как образы Ω и Y^0 при канонической проекции $\Pi_\Gamma: X \rightarrow \hat{X} = X/\Gamma$.

ТЕОРЕМА 6.4. *Предположим, что $\det A^\perp \neq 0$. Тогда*

- (а) $\hat{Y} = \hat{\Omega} \oplus \hat{Y}^0$, $X^\perp = \Omega^\perp \oplus \Pi Y^0$;
- (б) отображения $\hat{\Pi}|_{\hat{\Omega}}: \hat{\Omega} \rightarrow \Omega^\perp$ и $\hat{\Pi}|_{\hat{Y}^0}: \hat{Y}^0 \rightarrow X_0^\perp$ – линейные изоморфизмы;
- (в) $h|_{Y^0} = h^\perp|_{X_0^\perp} \circ \Pi|_{Y^0}$ и $\hat{h}|_{\hat{Y}^0} = h^\perp|_{X_0^\perp} \circ \hat{\Pi}|_{\hat{Y}^0}$;
- (г) для всех $\xi \in Y^0$ и $\alpha, \beta = 1, \dots, k$ имеем

$$h(\hat{\eta}_\alpha, \xi) = 0, \quad h(\hat{\eta}_\alpha, \hat{\eta}_\beta) = a_{\alpha\beta};$$

- (е) для всех $\xi^\perp \in \Pi Y^0$ и $\alpha, \beta = 1, \dots, k$ имеем

$$h^\perp(\eta_\alpha^\perp, \xi^\perp) = 0, \quad h^\perp(\eta_\alpha^\perp, \eta_\beta^\perp) = a_{\alpha\beta}^\perp.$$

Доказательство теоремы 6.4 содержится в приложении А.2.

СЛЕДСТВИЕ 6.5. *В базисе $\hat{\eta}_1, \dots, \hat{\eta}_k$ имеем*

$$\hat{h}|_{\hat{\Omega}} - h^\perp \circ \Pi|_{\hat{\Omega}} = (s_{\alpha\delta} \kappa^{\delta\varepsilon} s_{\varepsilon\beta} - 2s_{\alpha\beta} + \bar{g}_{\alpha\beta}) = SKS - 2S + \bar{G}.$$

Эта квадратичная форма положительно определена.

Действительно, обозначим через Q квадратный корень матрицы K , т. е. положительно определенную симметрическую матрицу такую, что $Q^2 = K$. Тогда $Q^{-2} = \bar{G}$ и

$$SKS - 2S + \bar{G} = RR^*, \quad R = (S - \bar{G})Q.$$

Эта матрица положительно определена, поскольку R невырождена.

Докажем теперь теорему 6.3. Напомним, что согласно предложению 6.2 и теореме 6.4 имеется h -ортогональное разложение $X = Z \oplus \Omega \oplus Y^0$ и $h^\perp$ -ортогональное разложение $X^\perp = \Omega^\perp \oplus \Pi Y^0$. Форма $h|_Z$ положительно определена, и $h|_{Y^0} = h^\perp|_{X_0^\perp} \circ \Pi|_{Y^0}$. Отсюда

$$\text{ind } h - \text{ind } h^\perp = \text{ind } h|_\Omega - \text{ind } h^\perp|_{\Omega^\perp} = \text{ind } A - \text{ind } A^\perp.$$

6.5. Пример: автономные системы. Предположим, что лагранжева система автономна, так что система уравнений в вариациях периодической траектории γ имеет периодическое решение $\zeta(t) = \dot{\gamma}(t)$. Если γ невырождена в автономном смысле (только два единичных мультипликатора), то, как доказал Пуанкаре, существует семейство¹² γ_α периодических траекторий периода $\tau(\alpha)$ такое, что $\gamma_0 = \gamma$ и $\tau(0) = \tau$ (см. [33], [34]). Пусть $E(\alpha) = \mathcal{H}|_{\gamma_\alpha}$ и $A(\alpha) = \int_{\gamma_\alpha} \langle p, dx \rangle$ – энергия и действие Мопертюи траектории γ_α .

ЛЕММА 6.4. *Предположим, что $dE/d\tau \neq 0$. Тогда*

$$(-1)^{\text{ind } b} = -\text{sign}(\tau'(\alpha)E'(\alpha)) = -\text{sign} \frac{dE}{d\tau}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Объединение траекторий γ_α в фазовом пространстве $TM \cong T^*M$ – симплектический цилиндр Σ . Ограничивая гамильтонову систему на Σ , получим интегрируемую гамильтонову систему с одной степенью свободы и гамильтонианом $H(\vartheta, I) = E(I)$, где $\vartheta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $I \in \mathbb{R}$. Можно предположить, что $\alpha = I$, $\gamma_\alpha(t) = (E'(\alpha)t, \alpha)$. Тогда $\tau(\alpha) = 1/\nu(\alpha)$, где частота $\nu(\alpha)$ равна $E'(\alpha)$. Имеем $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Матрица монодромии траектории γ_α равна $P = P_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \nu'/\nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Поэтому $Pv = \begin{pmatrix} \nu'/\nu \\ 1 \end{pmatrix}$, так что $s = \omega(Pv, v) = \nu'/\nu = -\tau^{-2} d\tau/dE$.

Как обычно, обозначим $\text{ind } \gamma = \text{ind } h(\gamma)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.5. *Пусть периодическая траектория γ имеет ровно два единичных мультипликатора. Предположим, что $\sigma(-1)^{m+\text{ind } \gamma} dE/d\tau < 0$. Тогда γ имеет вещественный мультипликатор $\rho > 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\sigma = \sigma^\perp$, то согласно следствию 6.4 и лемме 6.4,

$$(-1)^{\text{ind } h^\perp} = -\text{sign}\left(\frac{dE}{d\tau}\right)(-1)^{\text{ind } \gamma}.$$

Размерность редуцированной системы равна $m^\perp = m - 1$. Так что

$$\sigma(-1)^{m^\perp + \text{ind } h^\perp} = \sigma(-1)^{m-1 + \text{ind } \gamma} \left(-\text{sign} \frac{dE}{d\tau}\right) = -1.$$

Из следствия 5.2, примененного к редуцированной формуле Хилла (6.10), вытекает, что существует мультипликатор $\rho > 1$.

ПРИМЕР 6.1. Пусть материальная точка в $\mathbb{R}^m$ движется в потенциальном поле с однородным потенциалом

$$V(\lambda x) = \lambda^k V(x), \quad \lambda > 0, \quad k(k-2) \neq 0.$$

¹²Более естественно параметризовать семейство периодом τ . Однако это не всегда возможно, поскольку может случиться, что $\tau'(\alpha) = 0$.

Предположим, что γ – τ -периодическое решение с энергией E . Тогда $\gamma_\lambda(t) = \lambda\gamma(\lambda^{k/2-1}t)$ – периодическое решение с периодом $\tau(\lambda) = \lambda^{1-k/2}\tau$ и энергией $E(\lambda) = \lambda^k E$, так что

$$\frac{dE(\lambda)}{d\tau(\lambda)} = \frac{2k}{k-2} \left(\frac{\tau(\lambda)}{\tau} \right)^{(k+2)/(k-2)} E. \quad (6.27)$$

Отсюда по лемме 6.4

$$(-1)^{\text{ind } b} = \text{sign } \frac{2-k}{k}.$$

Рассмотрим задачу о движении материальной точки в $\mathbb{R}^m$ в силовом поле с однородным потенциалом степени k , где $k(k-2) \neq 0$. Из уравнений $\sigma = 1$, (6.27), и предложения 6.5 вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.6. Пусть периодическая траектория γ имеет ровно два единичных мультипликатора. Предположим, что $(-1)^{m+\text{ind } \gamma} (k-2)/k < 0$. Тогда γ имеет вещественный мультипликатор $\rho > 1$.

6.6. Вырождение ρ -индексной формы h_ρ . Было показано, что связь между индексами $\text{ind } h$ и $\text{ind } h^\perp$ далеко не очевидная. Ситуация сильно упрощается при $\rho \neq 1$. Пусть X_ρ , $\rho \in S^1$, – пространство комплексных ρ -квазипериодических векторных полей. Аналогично (6.11), (6.12), определим подпространства $Y_\rho, Z_\rho \subset X_\rho$ формулами

$$Y_\rho = \{\xi \in X_\rho : I(\xi, D\xi) \equiv \text{const}\}, \quad Z_\rho = \{\xi \in X_\rho : \xi(t) \in F_t\}.$$

Легко видеть, что при $\rho \neq 1$ и $\xi \in X_\rho$ равенство $I(\xi, D\xi) \equiv c$ влечет $c = 0$. Поэтому

$$Y_\rho = Y_\rho^0 = \{\xi \in X_\rho : I(\xi, D\xi) \equiv 0\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.7. Для $\rho \neq 1$ имеем $Y_\rho \cap Z_\rho = \{0\}$ и $X_\rho = Y_\rho \oplus Z_\rho$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим проекцию $\Phi_\rho : X_\rho \rightarrow Y_\rho$ вдоль Z_ρ . Возьмем $\eta \in X_\rho$ и будем искать функцию $\lambda_\alpha(t)$ такую, что $\xi = \eta + \lambda_\alpha \zeta^\alpha \in Y_\rho$. Тогда, согласно (6.8), имеем $\dot{\lambda}_\alpha = f_\alpha$, где $f_\alpha(t + \tau) = \rho f_\alpha(t)$. Так что $f_\alpha(t) = e^{\mu t} b_\alpha(t)$, где $\mu = \tau^{-1} \ln \rho$ и функция $b_\alpha(t)$ является τ -периодической:

$$b_\alpha(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{\alpha k} e^{k\omega t}, \quad \omega = \frac{2\pi i}{\tau}.$$

Получаем единственное решение $\lambda_\alpha(t)$ такое, что $\lambda_\alpha(t + \tau) = \rho \lambda_\alpha(t)$:

$$\lambda_\alpha(t) = e^{\mu t} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{b_{\alpha k} e^{k\omega t}}{\mu + k\omega}. \quad (6.28)$$

Знаменатель не обращается в нуль при $\rho \neq 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.8. Пространства Y_ρ, Z_ρ являются h -ортогональными:

$$h(\xi, \bar{\eta}) = 0 \quad \text{для всех } \xi \in Z_\rho, \eta \in Y_\rho.$$

Ограничение h на Z_ρ положительно определено при $\rho \neq 1$:

$$h(\lambda_\alpha \zeta^\alpha, \bar{\lambda}_\beta \zeta^\beta) = \int_0^\tau g^{\alpha\beta} \dot{\lambda}_\alpha \dot{\bar{\lambda}}_\beta dt. \quad (6.29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $\xi(t) = \lambda_\alpha(t)\zeta^\alpha(t) \in Z_\rho$ и $\eta \in Y_\rho$. Тогда, согласно (6.15),

$$h(\lambda_\alpha\zeta^\alpha, \bar{\eta}) = (\lambda_\alpha D\zeta^\alpha, \bar{\eta})|_0^\tau = (|\rho|^2 - 1)(\lambda_\alpha(0)D\zeta^\alpha(0), D\eta(0)) = 0. \quad (6.30)$$

Доказательство (6.29) аналогично.

Вычислим теперь ограничение h на Y_ρ . Положим

$$X_\rho^\perp = \{\eta \in X_\rho : \eta(t) \in E_t^\perp\},$$

и пусть $\Pi: X_\rho \rightarrow X_\rho^\perp$ – проекция (6.5). Так как $X_\rho = Y_\rho \oplus Z_\rho = X_\rho^\perp \oplus Z_\rho$, то $\Pi|_{Y_\rho}: Y_\rho \rightarrow X_\rho^\perp$ – изоморфизм, а обратный оператор есть $\Phi_\rho|_{X_\rho^\perp}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.9. При $\rho \neq 1$ билинейная форма $h_\rho^\top = h \circ (\Pi|_{Y_\rho})^{-1}$ на $X_\rho^\perp$ совпадает с билинейной формой Рауса $h_\rho^\perp$.

Это вытекает из леммы 6.1 (для комплексных векторных полей), поскольку $c = 0$ и $\lambda(\tau) = \rho\lambda(0)$, $\eta(\tau) = \rho\eta(0)$, $|\rho| = 1$.

СЛЕДСТВИЕ 6.6. Если $\rho \neq 1$, то ρ -индекс системы (E, λ) равен ρ -индексу системы Рауса $(E^\perp, \Lambda^\perp)$.

Утверждение предложения 6.9 неверно при $\rho = 1$. В этом случае, как было показано, связь между индексами более сложная.

7. Обратимый случай

Предположим, что лагранжева система $(M, \mathcal{L})$ обратима: существует инволюция $S: M \rightarrow M$, являющаяся обращающей время симметрией для $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}(S(x), dS(x)\dot{x}, t) = \mathcal{L}(x, -\dot{x}, -t).$$

Положим $\tau = 2T$. Для любой τ -периодической кривой $\gamma \in \Omega$ имеем

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_{-T}^T \mathcal{L}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) dt = \mathcal{A}(\tilde{\gamma}),$$

где $\tilde{\gamma}(t) = S\gamma(-t)$. Значит, инволюция $R: \Omega \rightarrow \Omega$,

$$R(\gamma)(t) = \tilde{\gamma}(t) = S(\gamma(-t)),$$

сохраняет функционал действия $\mathcal{A}$. Назовем τ -периодическую траекторию γ обратимой, если $R(\gamma) = \gamma$. Тогда

$$S\gamma(-t) = \gamma(t), \quad S\gamma(T-t) = \gamma(T+t),$$

так что точки $\gamma(0)$ и $\gamma(T)$ принадлежат множеству N неподвижных точек отображения S . Легко видеть, что γ – обратимая периодическая траектория тогда и только тогда, когда $\gamma_+ = \gamma|_{[0, T]}$ – критическая точка функционала действия

$$\mathcal{A}_+(\nu) = \int_0^T \mathcal{L}(\nu(t), \dot{\nu}(t), t) dt$$

на множестве Ω_+ кривых $\nu: [0, T] \rightarrow M$ с концами на N .

Пусть $X = T_\gamma \Omega$ – множество векторных полей вдоль γ и $J = dR(\gamma): X \rightarrow X$. Тогда

$$(J\xi)(t) = J_{-t}\xi(-t), \quad J_t = dS(\gamma(t)): E_t \rightarrow E_{-t}.$$

Так как R сохраняет $\mathcal{A}$, инволюция J сохраняет билинейную форму второй вариации:

$$h(J\xi, J\eta) = h(\xi, \eta).$$

Поскольку операторы D, U внутренним образом связаны с формой h , имеем

$$J^* = J, \quad DJ = -JD, \quad UJ = JU.$$

Положим $X_\pm = \{\xi \in X : J\xi = \pm\xi\}$. Тогда $X = X_+ \oplus X_-$ и поле $\xi \in X$ представляется в виде $\xi = \xi_+ + \xi_-$, где $\xi_\pm \in X_\pm$. Тогда

$$h(\xi, \xi) = h(\xi_+, \xi_+) + h(\xi_-, \xi_-).$$

Так как $DJ = -JD$, имеем $D^2: X_\pm \rightarrow X_\pm$. Поэтому оператор Гессе $H = (-D^2 + I)^{-1}(-D^2 + U)$ коммутирует с J , значит, $H: X_\pm \rightarrow X_\pm$. Обозначим $H_\pm = H|_{X_\pm}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. $H = H_+ \oplus H_-$ и $\det H = \det H_+ \det H_-$.

Приведем более явные формулы для $h_\pm$. Поле $\xi \in X_\pm$ определяется своим ограничением

$$\xi|_{[0,T]} \in Y_\pm = \{\eta \in Y : \eta(0) \in E_0^\pm, \eta(T) \in E_T^\pm\}, \quad Y = W^{1,2}([0,T], E),$$

где

$$E_0^\pm = \{v \in E_0 : J_0 v = \pm v\}, \quad E_T^\pm = \{v \in E_T : J_T v = \pm v\}.$$

Отсюда имеем ортогональные разложения

$$E_0 = E_0^+ \oplus E_0^-, \quad E_T = E_T^+ \oplus E_T^-.$$

Для $\eta \in Y_\pm$ соответствующее поле $\xi \in X_\pm$ задается формулами

$$\xi|_{[0,T]} = \eta, \quad \xi|_{[-T,0]} = \pm J\eta.$$

Следовательно,

$$h(\xi, \xi) = h(\eta, \eta) + h(J\eta, J\eta) = 2K(\eta, \eta),$$

где

$$K(\eta, \eta) = \int_0^T ((D\eta, D\eta) + (U\eta, \eta)) dt$$

– прежняя форма h , но рассматриваемая на Y . Пусть $K_\pm = K|_{Y_\pm}$. Тогда $K_+ = d^2\mathcal{A}_+(\gamma_+)$ – вторая вариация функционала $\mathcal{A}_+$.

Рассмотрим случай $S = \text{id}$. Тогда $E_0^+ = E_0$, $E_T^+ = E_T$, $E_0^- = 0$, $E_T^- = 0$. Отсюда $Y_+ = Y$ и

$$Y_- = Y_0 = \{\eta \in Y : \eta(0) = 0, \eta(T) = 0\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 7.1. Пусть m нечетно и $S = \text{id}$. Если γ_+ – невырожденный минимум функционала $\mathcal{A}_+$, то соответствующая обратимая периодическая траектория γ имеет вещественный мультипликатор > 1 .

Действительно, γ сохраняет ориентацию, так что $\sigma > 0$. Гессиян K_+ положительно определен, а значит, то же верно для $K_- = K_+|_{Y_0}$.

Аналог следствия 7.1 справедлив как при нечетном, так и при четном m .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. Если $S = \text{id}$ и γ_+ – точка невырожденного минимума для $\mathcal{A}_+$, то форма h_ρ положительно определена при $|\rho| = 1$. Так что P не имеет мультипликаторов на единичной окружности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для комплексного $\xi \in X$ положим

$$\eta(t) = e^{it}\xi(t) = u(t) + iv(t), \quad u(t), v(t) \in E_t.$$

Тогда

$$h_\rho(\xi, \bar{\xi}) = h(\eta, \bar{\eta}) = h(u, u) + h(v, v).$$

Покажем, что форма $h(u, u)$ положительно определена на $W^{1,2}([-T, T], E)$. Действительно, положим $u_+ = u|_{[0, T]} \in Y$ и $u_- = J(u)|_{[-T, 0]} \in Y$. Тогда

$$h(u, u) = K(u_+, u_+) + K(u_-, u_-) > 0, \quad u \neq 0.$$

Согласно формуле Хилла, $\det(P - \rho I) \neq 0$ при $\rho \in S^1$, так что P не имеет мультипликаторов на S^1 .

Рассмотрим опять случай общей инволюции S . Тогда $Y_+ \cap Y_- = Y_0$. Пусть $Y_\pm^\perp$ – $K_\pm$ -ортогональное дополнение к Y_0 в $Y_\pm$, т.е. множество $\eta \in Y_\pm$ таких, что $K_\pm(\eta, \zeta) = 0$ при всех $\zeta \in Y_0$. Интегрируя по частям, получим

$$Y_\pm^\perp = Y_\pm \cap Y^\perp, \quad Y^\perp = \{\eta \in Y : (-D^2 + U)\eta = 0\}.$$

Ограничение формы $K_\pm$ на $Y_\pm^\perp$ имеет вид

$$K_\pm^\perp(\eta, \eta) = (D\eta, \eta)|_0^T, \quad \eta \in Y_\pm^\perp. \quad (7.1)$$

Пусть $K_0 = K|_{Y_0}$ и $K^\perp = K|_{Y^\perp}$. Тогда

$$H_\pm \cong K_0 \oplus K_\pm^\perp, \quad H \cong K_0 \oplus K_0 \oplus K_+^\perp \oplus K_-^\perp.$$

Отсюда вытекает, что если $\det K_0 \neq 0$, то $\text{sign det } H = (-1)^{\text{ind } K_+^\perp + \text{ind } K_-^\perp} = (-1)^{\text{ind } K^\perp}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3. Если моменты времени 0 и T не сопряжены, то

$$(-1)^{\text{ind } \gamma} = \text{sign det } H = (-1)^{\text{ind } K^\perp}.$$

Если моменты времени 0 и T не сопряжены, то $\dim Y_+^\perp = 2n$, $\dim Y_-^\perp = 2(m - n)$, где $n = \dim N$.

Квадратичная форма $K_+^\perp$ имеет простой смысл: это – гессиян дискретного лагранжиана (функции действия Гамильтона), задаваемого локально формой

$$L(x, y) = \mathcal{A}_+(\nu),$$

где $\nu: [0, T] \rightarrow M$ – траектория, соединяющая x и y .

Приложение А

А.1. Доказательство теоремы 3.3. (а) Ввиду (3.37), для каждого постоянного вектора λ^β имеем:

$$I^\alpha(\lambda^\beta \hat{q}_{\beta i}, \lambda^\beta \hat{q}_{\beta i+1}) = c_\beta^\alpha \lambda^\beta.$$

Согласно условию С, матрица c_α^β невырождена. Следовательно, уравнение

$$I^\alpha(\lambda^\beta \hat{q}_{\beta i}, \lambda^\beta \hat{q}_{\beta i+1}) = r^\alpha$$

разрешимо относительно λ^β для каждого постоянного вектора r^α . Отсюда вытекает первое утверждение в (а).

Чтобы доказать второе утверждение в (а), покажем, что $\dim \Omega^\perp = k$ и $\Omega^\perp \cap X_0^\perp = 0$. В силу равенства (3.26) последние два условия эквивалентны невырожденности матрицы

$$e_{\alpha\beta} = \langle \mathbf{d}_\alpha, \mathbf{q}_\beta^\perp \rangle = \sum_i g_{\alpha\delta i} I_i^\delta (q_{\beta i}^\perp, q_{\beta i+1}^\perp).$$

Согласно уравнению (3.36), имеем:

$$\begin{aligned} e_{\alpha\beta} &= \sum_i g_{\alpha\delta i} (-\langle B_i q_{\beta i}^\perp, w_{i+1}^\delta \rangle + \langle B_i w_i^\delta, q_{\beta i+1}^\perp \rangle) \\ &= \sum_i g_{\alpha\delta i} (\delta_\beta^\delta + \lambda_{\beta\varepsilon i}^\perp g_i^{\varepsilon\delta} - \lambda_{\beta\varepsilon i+1}^\perp g_i^{\delta\varepsilon}) \\ &= \bar{g}_{\alpha\beta} - \sum_i (\lambda_{\beta\varepsilon i+1}^\perp - \lambda_{\beta\varepsilon i}^\perp) = \bar{g}_{\alpha\beta} - s_{\alpha\beta} = -a_{\alpha\beta}^\perp. \end{aligned}$$

(b) Так как отображение $\hat{\Pi}|_{\hat{Y}}: \hat{Y} \rightarrow X^\perp$ — изоморфизм, то $\hat{\Pi}|_{\hat{\Omega}}: \hat{\Omega} \rightarrow \Omega^\perp$ и $\hat{\Pi}|_{\hat{Y}^0}: \hat{Y}^0 \rightarrow X_0^\perp$ — изоморфизмы.

(c) Согласно предложению 6.3, для каждого $\mathbf{v} \in X^\perp$ имеем

$$h^\perp(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = h|_Y \circ \Pi^{-1}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \bar{g}_{\alpha\beta} c^\alpha c^\beta.$$

Если $\mathbf{v} \in X_0^\perp$, имеем: $\mathbf{v} = \Pi \mathbf{u} = (u_i - \lambda_{\alpha i} w_i^\alpha)$, $\mathbf{u} \in Y^0$. Тогда, согласно лемме 6.2, $c^\alpha = I_i^\alpha(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1}) = 0$. Отсюда вытекает первое равенство в (c). Чтобы доказать второе равенство, достаточно заметить, что $h = \hat{h} \circ \pi_\Gamma$ и $\Pi = \hat{\pi} \circ \Pi_\Gamma$.

(d) Согласно (2.10),

$$\begin{aligned} h(\hat{\mathbf{q}}_\alpha, \mathbf{u}) &= \sum_i \langle A_i \hat{q}_{\alpha i} - B_i^* \hat{q}_{\alpha i+1} - B_{i-1} \hat{q}_{\alpha i-1}, u_i \rangle \\ &= \sum_i \langle -A_i \nu_{\alpha\beta i} w_i^\beta + B_i^* \nu_{\alpha\beta i+1} w_{i+1}^\beta + B_{i-1} \nu_{\alpha\beta i-1} w_{i-1}^\beta, u_i \rangle \\ &= \sum_i \langle B_i^* \Delta \nu_{\alpha\beta i} w_{i+1}^\beta - B_{i-1} \Delta \nu_{\alpha\beta i-1} w_{i-1}^\beta, u_i \rangle \\ &= s_{\alpha\gamma} \kappa^{\gamma\delta} \sum_i \langle B_i^* g_{\delta\beta i} w_{i+1}^\beta - B_{i-1} g_{\delta\beta i-1} w_{i-1}^\beta, u_i \rangle = -s_{\alpha\gamma} \kappa^{\gamma\delta} \sum_i \langle d_{\delta i}, u_i \rangle, \end{aligned}$$

где $d_{\delta i}$ определяются формулой (3.25). Предложение 3.9 влечет первое утверждение в (d). Аналогично,

$$\begin{aligned} h(\widehat{\mathbf{q}}_\alpha, \widehat{\mathbf{q}}_\beta) &= s_{\alpha\gamma} \kappa^{\gamma\delta} \sum_i \langle B_i^* g_{\delta\epsilon i} w_{i+1}^\epsilon - B_{i-1} g_{\delta\epsilon i-1} w_{i-1}^\epsilon, \widehat{q}_{\beta i} \rangle \\ &= s_{\alpha\gamma} \kappa^{\gamma\delta} \sum_i g_{\delta\epsilon i} (\langle B_i \widehat{q}_{\beta i}, w_{i+1}^\epsilon \rangle - \langle B_i w_i^\epsilon, \widehat{q}_{\beta i+1} \rangle) \\ &= -s_{\alpha\gamma} \kappa^{\gamma\delta} \bar{g}_{\delta\epsilon} c_\beta^\epsilon = -s_{\alpha\gamma} c_\beta^\gamma = a_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает второе утверждение в (d).

(e) Имеем:

$$\begin{aligned} h^\perp(\mathbf{q}_\alpha^\perp, \mathbf{u}^\perp) &= \sum_i \langle (A_i - C_i) q_{\alpha i}^\perp - B_i^* q_{\alpha i+1}^\perp - B_{i-1} q_{\alpha i-1}^\perp, u_i^\perp \rangle \\ &= - \sum_i \langle C_i q_{\alpha i}^\perp + \lambda_{\alpha\beta i}^\perp A_i w_i^\beta - \lambda_{\alpha\beta i+1}^\perp B_i^* w_{i+1}^\beta - \lambda_{\alpha\beta i-1}^\perp B_{i-1} w_{i-1}^\beta, u_i^\perp \rangle \\ &= \sum_i g_{\gamma\delta i} (\langle B_i w_i^\gamma, q_{\alpha i+1} \rangle - \langle B_i q_{\alpha i}, w_{i+1}^\gamma \rangle) \langle B_i u_i^\perp, w_{i+1}^\delta \rangle \\ &= \sum_i g_{\alpha\delta i} \langle B_i u_i^\perp, w_{i+1}^\delta \rangle. \end{aligned}$$

Так как $u_i^\perp = u_i - g_{\epsilon\beta i-1} \langle B_{i-1} w_{i-1}^\epsilon, u_i \rangle v_i^\beta$, получаем:

$$g_{\gamma\delta i} \langle B_i u_i^\perp, w_{i+1}^\delta \rangle = -\langle d_{\gamma i}, u_i \rangle = 0.$$

Отсюда вытекает первое утверждение в (e). Аналогично,

$$\begin{aligned} h^\perp(\mathbf{q}_\alpha^\perp, \mathbf{q}_\beta^\perp) &= \sum_i (g_{\alpha\delta i} \langle B_i q_{\beta i}, w_{i+1}^\delta \rangle - g_{\alpha\delta i-1} \langle B_{i-1} w_{i-1}^\delta, q_{\beta i} \rangle) \\ &= \sum_i (-g_{\alpha\beta i} + g_{\alpha\delta i} \langle B_i w_i^\delta, q_{\beta i+1} \rangle - g_{\alpha\delta i-1} \langle B_{i-1} w_{i-1}^\delta, q_{\beta i} \rangle) \\ &= -\bar{g}_{\alpha\beta} + s_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает второе утверждение в (e).

А.2. Доказательство теоремы 6.4. (a) Для любого постоянного вектора λ^β имеем: $I^\alpha(\lambda^\beta \hat{\eta}_\beta, D\lambda^\beta \hat{\eta}_\beta) = \hat{c}_\beta^\alpha \lambda^\beta$. Поэтому для любого постоянного вектора r^α коэффициенты λ^β можно выбрать так, что $I^\alpha(\lambda^\beta \hat{\eta}_\beta, D\lambda^\beta \hat{\eta}_\beta) = r^\alpha$. Отсюда вытекает первое равенство в (a).

Чтобы доказать второе равенство в (a), покажем, что $\dim \Omega^\perp = k$ и $\Omega^\perp \cap X_0^\perp = 0$. В силу равенства (6.24), достаточно проверить, что матрица

$$e_{\alpha\beta} = \int_0^\tau g_{\alpha\delta} (D^\perp \zeta^\delta, \eta_\beta^\perp) dt$$

невырождена. Имеем:

$$\begin{aligned} e_{\alpha\beta} &= \int_0^\tau g_{\alpha\delta} (D\zeta^\delta, \eta_\beta^\perp) dt = \int_0^\tau g_{\alpha\delta} (D\zeta^\delta, \eta_\beta - \lambda_{\beta\epsilon}^\perp \zeta^\epsilon) dt \\ &= \int_0^\tau (g_{\alpha\delta} (D\zeta^\delta, \eta_\beta) - g_{\alpha\delta} (\eta_\beta, \zeta^\nu) g_{\nu\epsilon} (D\zeta^\delta, \zeta^\epsilon)) dt. \end{aligned}$$

Используя равенство

$$0 = \frac{d}{dt}(g_{\varepsilon\nu}g^{\nu\delta}) = (\dot{g}_{\varepsilon\nu}\zeta^\nu + 2g_{\varepsilon\nu}D\zeta^\nu, \zeta^\delta), \quad (\text{A.1})$$

продолжим вычисление:

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \int_0^\tau \left(\frac{d}{dt}(g_{\alpha\delta}(\zeta^\delta, \eta_\beta)) - g_{\alpha\beta} \right) dt = \frac{1}{2} (s_{\alpha\beta} - \bar{g}_{\alpha\beta}) = -\frac{1}{2} a_{\alpha\beta}^\perp.$$

(b) Отображения $\widehat{\Pi}|_{\widehat{\Omega}}: \widehat{\Omega} \rightarrow \Omega^\perp$ и $\widehat{\Pi}|_{\widehat{Y}^0}: \widehat{Y}^0 \rightarrow X_0^\perp$ – изоморфизмы, поскольку $\widehat{\Pi}: \widehat{Y} \rightarrow X^\perp$ изоморфизм.

(c) Согласно предложению 6.3, для каждого $\eta \in X^\perp$

$$h^\perp(\eta, \eta) = h|_Y \circ \Pi^{-1}(\eta, \eta) + \bar{g}_{\alpha\beta} c^\alpha c^\beta.$$

Если $\eta \in X_0^\perp$, имеем: $\eta = \Pi\xi = \xi - \lambda_\alpha \zeta^\alpha$, $\xi \in Y^0$. Тогда, по лемме 6.1, $c^\alpha = I^\alpha(\xi, D\xi) = 0$. Отсюда вытекает первое равенство в (c). Чтобы доказать второе равенство, достаточно заметить, что $h = \hat{h} \circ \pi_\Gamma$ и $\Pi = \widehat{\Pi} \circ \pi_\Gamma$.

(d) Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} h(\hat{\eta}_\alpha, \xi) &= \int_0^\tau (-D^2 \hat{\eta}_\alpha + U \hat{\eta}_\alpha, \xi) dt = s_{\alpha\delta} \kappa^{\delta\varepsilon} \int_0^\tau (\dot{g}_{\varepsilon\nu} \zeta^\nu + 2g_{\varepsilon\nu} D\zeta^\nu, \xi) dt \\ &= s_{\alpha\delta} \kappa^{\delta\varepsilon} \int_0^\tau \frac{d}{dt}(g_{\varepsilon\nu}(\zeta^\nu, \xi)) dt = 0. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$h(\hat{\eta}_\alpha, \hat{\eta}_\beta) = s_{\alpha\delta} \kappa^{\delta\varepsilon} \int_0^\tau (\dot{g}_{\varepsilon\nu} \zeta^\nu + 2g_{\varepsilon\nu} D\zeta^\nu, \hat{\eta}_\beta) dt.$$

Определим $\mu_{\alpha\beta}$ так, что $\dot{\mu}_{\alpha\beta} = c_\alpha^\delta g_{\delta\beta}$. Тогда

$$(\zeta^\alpha, D(\hat{\eta}_\beta - \mu_{\beta\delta} \zeta^\delta)) - (\hat{\eta}_\beta - \mu_{\beta\delta} \zeta^\delta, D\zeta^\alpha) = c_\beta^\alpha - \dot{\mu}_{\beta\delta} g^{\delta\alpha} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \int_0^\tau (\dot{g}_{\varepsilon\nu} \zeta^\nu + 2g_{\varepsilon\nu} D\zeta^\nu, \hat{\eta}_\beta) dt &= \int_0^\tau \frac{d}{dt}(g_{\varepsilon\nu}(\zeta^\nu, \hat{\eta}_\beta - \mu_{\beta\delta} \zeta^\delta)) dt \\ &= - \int_0^\tau \mu_{\varepsilon\beta} dt = -\bar{g}_{\varepsilon\delta} c_\beta^\delta, \end{aligned}$$

где использовано (A.1). Наконец, $\hat{h}(\hat{\eta}_\alpha, \hat{\eta}_\beta) = -s_{\alpha\delta} \kappa^{\delta\varepsilon} \bar{g}_{\varepsilon\nu} c_\beta^\nu = -s_{\alpha\delta} c_\beta^\delta = a_{\alpha\beta}$.

(e) Интегрируя по частям, получим

$$h^\perp(\eta_\alpha^\perp, \xi^\perp) = \int_0^\tau \left(((-D\Pi D + U)\eta_\alpha^\perp, \xi^\perp) - 3g_{\delta\varepsilon}(\eta_\alpha^\perp, D\zeta_\delta)(\xi^\perp, D\zeta_\varepsilon) \right) dt.$$

Несложная, но громоздкая выкладка дает:

$$h^\perp(\eta_\alpha^\perp, \xi^\perp) = \int_0^\tau 2g_{\alpha\varepsilon}(\xi^\perp, D\zeta^\varepsilon) dt = \int_0^\tau \frac{d}{dt}(g_{\alpha\varepsilon}(\xi, \zeta^\varepsilon)) dt = 0.$$

Здесь использовано (A.1). Аналогично,

$$\begin{aligned} h^\perp(\eta_\alpha^\perp, \eta_\beta^\perp) &= \int_0^\tau 2g_{\alpha\varepsilon}(D\zeta^\varepsilon, \eta_\beta^\perp) dt = \int_0^\tau 2g_{\alpha\varepsilon}((D\zeta^\varepsilon, \eta_\beta) - (D\zeta^\varepsilon, \zeta^\nu)g_{\nu\vartheta}(\zeta^\vartheta, \eta_\beta)) dt \\ &= \int_0^\tau \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{d}{dt}(g_{\alpha\vartheta}(\zeta^\vartheta, \eta_\beta)) \right) dt = -\bar{g}_{\alpha\beta} + s_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

А.3. Вырожденный случай. В этом пункте рассматривается случай, когда условие невырожденности A' на с. 52 не выполнено, т. е. $\text{rank}(\zeta^1(t), \dots, \zeta^k(t))$ падает на множестве $\Sigma \subset \mathbb{R}/\tau\mathbb{Z}$. Будет показано, что редукция Рауса системы (E, Λ) к системе $(E^\perp, \Lambda^\perp)$ и другие утверждения об исключении вырождения выполняются с небольшими изменениями в доказательствах. Отметим, что для ДЛС условие A , аналогичное условию A' , кажется необходимым.

ЛЕММА А.1. Семейство $(F_t)_{t \notin \Sigma}$ может быть продолжено до гладкого векторного расслоения $F = (F_t)_{t \in \mathbb{R}/\tau\mathbb{Z}}$. Поэтому ортогональное дополнение $E^\perp = (E_t^\perp)$ – гладкое расслоение. Оператор $D^\perp$ на $E^\perp$ и редуцированный лагранжиан $\Lambda^\perp$, определенные при $t \notin \Sigma$, гладко продолжаются на $t \in \Sigma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $0 \in \Sigma$, и пусть

$$\text{rank}(\zeta^1(0), \dots, \zeta^k(0)) = k - l.$$

Без ограничения общности предположим, что

$$\zeta^1(0) = \dots = \zeta^l(0) = 0, \quad \text{rank}(\zeta^{l+1}(0), \dots, \zeta^k(0)) = k - l.$$

Тогда $\text{rank}(D\zeta^1(0), \dots, D\zeta^k(0)) = l$, иначе решения $\zeta^1, \dots, \zeta^l$ системы уравнений в вариациях были бы зависимы. Так как

$$I^\alpha(\zeta^\beta, D\zeta^\beta) = (\zeta^\alpha, D\zeta^\beta) - (\zeta^\beta, D\zeta^\alpha) = 0,$$

имеем

$$(D\zeta^\alpha(0), \zeta^\beta(0)) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, l, \quad \beta = l+1, \dots, k.$$

Следовательно,

$$\text{rank}(D\zeta^1(0), \dots, D\zeta^l(0), \zeta^{l+1}(0), \dots, \zeta^k(0)) = k.$$

Так как

$$D(\zeta^\alpha - tD\zeta^\alpha) = -tD^2\zeta^\alpha = -tU\zeta^\alpha = O(t^2),$$

имеем

$$\zeta^\alpha(t) = tD\zeta^\alpha(t) + O(t^3), \quad \alpha = 1, \dots, l.$$

Таким образом, пространство

$$F_t = \text{span}\left(\frac{1}{t}D\zeta^1(t), \dots, \frac{1}{t}D\zeta^l(t), \zeta^{l+1}(t), \dots, \zeta^k(t)\right), \quad t \neq 0,$$

имеет предел

$$F_0 = \text{span}(D\zeta^1(0), \dots, D\zeta^l(0), \zeta^{l+1}(0), \dots, \zeta^k(0))$$

при $t \rightarrow 0$ и расслоение F_t гладкое при $t = 0$. Первое утверждение доказано.

Так как расслоение $E_t^\perp$ гладкое при $t = 0$, то оператор $\Pi_t: E_t \rightarrow E_t^\perp$ гладкий, так что и оператор $D^\perp$ гладкий. Остается проверить, что член

$$(C\eta, \eta) = g_{\alpha\beta}(u, D^\perp\zeta^\alpha)(u, D^\perp\zeta^\beta)$$

в $\Lambda^\perp$ является гладким при $t = 0$.

Обозначим $j^{\alpha\beta} = (D\zeta^\alpha(0), D\zeta^\beta(0))$, $\alpha, \beta = 1, \dots, l$. Тогда $(j^{\alpha\beta})$ – невырожденная матрица и

$$(D\zeta^\alpha, D\zeta^\beta) = j^{\alpha\beta} + O(t^2).$$

Следовательно,

$$g^{\alpha\beta} = (\zeta^\alpha, \zeta^\beta) = t^2(D\zeta^\alpha, D\zeta^\beta) + O(t^4) = t^2 j^{\alpha\beta} + O(t^4), \quad \alpha, \beta = 1, \dots, l.$$

Матрица $(g^{\alpha\beta}(0))$, $\alpha, \beta = l+1, \dots, k$, невырожденная. Можно показать, что

$$g^{\alpha\beta} = O(t^2), \quad \alpha = 1, \dots, l, \quad \beta = l+1, \dots, k.$$

Отсюда для обратной матрицы $(g_{\alpha\beta})$ получаем

$$g_{\alpha\beta} = t^{-2}(j_{\alpha\beta} + O(t^2)), \quad \alpha, \beta = 1, \dots, l.$$

Блок $(g_{\alpha\beta})$, $\alpha, \beta = l+1, \dots, k$, гладкий и невырожденный, а блок $(g_{\alpha\beta})$, $\alpha = 1, \dots, l$, $\beta = l+1, \dots, k$, гладкий.

Так как $D^\perp \zeta^\alpha(t) = O(t^2)$ при $\alpha = 1, \dots, l$, получаем, что оператор C гладкий при $t = 0$. Доказано, что редуцированный лагранжиан $\Lambda^\perp$ гладкий на $E^\perp$. Лемма доказана.

В действительности все проделанное в разделе 6 выполняется в вырожденном случае. Например, проверим, что проекция $\Phi: X \rightarrow \hat{Y}$ вдоль Z корректно определена и гладкая. Как и в невырожденном случае,

$$Z = \{\xi \in X : \xi(t) \in F_t\} = \left\{ \xi(t) = \lambda_\alpha(t) \zeta^\alpha(t) : \int_0^\tau g^{\alpha\beta} \dot{\lambda}_\alpha \dot{\lambda}_\beta dt < \infty \right\},$$

но теперь λ_α может иметь сингулярности при $t \in \Sigma$.

Возьмем $\eta \in X$ и будем искать $\lambda_\alpha(t)$ такое, что $\xi = \eta + \lambda_\alpha \zeta^\alpha \in Y$. Тогда, согласно (6.8) и (6.23),

$$\dot{\lambda}_\alpha = g_{\alpha\beta} c^\beta - g_{\alpha\beta} I^\beta(\eta, D\eta) = g_{\alpha\beta} c^\beta + \frac{d}{dt}(g_{\alpha\beta}(\eta, \zeta^\beta)) - 2g_{\alpha\beta}(\eta, D^\perp \zeta^\beta).$$

Последний член гладкий при $t \in \Sigma$. Предположим опять, что $0 \in \Sigma$. Получим

$$\lambda_\alpha(t) = -\frac{1}{t} \sum_{\beta=1}^l j_{\alpha\beta} c^\beta + \frac{1}{t} \sum_{\beta=1}^l j_{\alpha\beta}(\eta, \zeta^\beta) + \text{гладкие члены}, \quad \alpha = 1, \dots, l.$$

Отсюда вытекает, что поле $\lambda_\alpha(t) \zeta^\alpha(t)$ гладкое, так что поле $\xi(t)$ гладкое.

Список литературы

- [1] G. W. Hill, “On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon”, *Acta Math.*, **8**:1 (1886), 1–36.
- [2] A. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Vol. I: *Solutions périodiques. Non-existence des intégrales uniformes. Solutions asymptotiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1892, 385 pp.; Vol. II: *Méthodes de MM. Newcomb, Gylden, Lindstedt et Bohlin*, 1893, viii+479 pp.; Vol. III: *Invariants intégraux. Solutions périodiques du deuxième genre. Solutions doublement asymptotiques*, 1899, iv+414 pp.; Reprint, Les Grands Classiques Gauthier-Villars, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1987, Vol. I, ISBN: 2-85367-093-7, xii+387 pp.; Vol. II, ISBN: 2-85367-093-7, viii+487 pp.; Vol. III, ISBN: 2-85367-093-7, vi+416 pp.

- [3] R. S. MacKay, J. D. Meiss, “Linear stability of periodic orbits in Lagrangian systems”, *Phys. Lett. A*, **98**:3 (1983), 92–94.
- [4] Д. В. Трещёв, “К вопросу об устойчивости периодических траекторий бильярда Биркгофа”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем., мех.*, 1988, №2, 44–50; англ. пер.: D. V. Treshev, “On the problem of the stability of the periodic trajectories of a Birkhoff billiard”, *Mosc. Univ. Mech. Bull.*, **43**:2 (1988), 28–36.
- [5] С. В. Болотин, “Об определителе Хилла периодической орбиты”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1988, №3, 30–34; англ. пер.: S. V. Bolotin, “The Hill determinant of a periodic orbit”, *Mosc. Univ. Mech. Bull.*, **43**:3 (1988), 7–11.
- [6] В. В. Козлов, Д. В. Трещёв, *Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами*, Изд-во МГУ, М., 1991, ISBN: 5-211-01566-5, 168 с.; англ. пер.: V. V. Kozlov, D. V. Treshev, *Billiards. A genetic introduction to the dynamics of systems with impacts*, Transl. Math. Monogr., **89**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, ISBN: 0-8218-4550-0, viii+171 pp.
- [7] Ch. Liu, Y. Long, “Iterated index formulae for closed geodesics with applications”, *Sci. China Ser. A*, **45**:1 (2002), 9–28.
- [8] Y. Long, “Index theory for symplectic paths with applications”, *Progr. Math.*, **207**, Birkhäuser, Basel, 2002, ISBN: 3-7643-6647-8, xxiv+380 pp.
- [9] В. В. Козлов, “О механизме потери устойчивости”, *Дифференц. уравнения*, **45**:4 (2009), 496–505; англ. пер.: V. V. Kozlov, “On the mechanism of the stability loss”, *Differ. Equ.*, **45**:4 (2009), 510–519.
- [10] В. В. Козлов, “Спектральные свойства операторов с полиномиальными инвариантами в вещественных конечномерных пространствах”, *Тр. МИАН*, **268** (2010) (в печати).
- [11] X. Hu, Sh. Sun, “Index and stability of symmetric periodic orbits in Hamiltonian systems with applications to figure-eight orbit”, *Comm. Math. Phys.*, **290**:2 (2009), 737–777.
- [12] X. Hu, Sh. Sun, “Morse index and stability of elliptic Lagrangian solutions in the planar three-body problem”, *Adv. Math.*, **223**:1 (2010), 98–119.
- [13] A. Chenciner, R. Montgomery, “A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses”, *Ann. of Math. (2)*, **152**:3 (2000), 881–901; [arXiv:math/0011268](https://arxiv.org/abs/math/0011268).
- [14] D. L. Ferrario, S. Terracini, “On the existence of collisionless equivariant minimizers for the classical n -body problem”, *Invent. Math.*, **155**:2 (2004), 305–362.
- [15] S. Terracini, A. Venturelli, “Symmetric trajectories for the $2N$ -body problem with equal masses”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **184**:3 (2007), 465–493.
- [16] H. R. Dullin, J. D. Meiss, “Stability of minimal periodic orbits”, *Phys. Lett. A*, **247**:3 (1998), 227–234.
- [17] В. В. Козлов, “Задача об устойчивости двухзвенных траекторий многомерного бильярда Биркгофа”, *Тр. МИАН*, **273** (в печати).
- [18] А. П. Веселов, “Интегрируемые отображения”, *УМН*, **46**:5 (1991), 3–45; англ. пер.: A. P. Veselov, “Integrable maps”, *Russian Math. Surveys*, **46**:5 (1991), 1–51.
- [19] M. Bialy, “Maximizing orbits for higher-dimensional convex billiards”, *J. Mod. Dyn.*, **3**:1 (2009), 51–59.
- [20] C. Golé, *Symplectic twist maps. Global variational techniques*, Adv. Ser. Nonlinear Dynam., **18**, World Scientific, Singapore, 2001, ISBN: 981-02-0589-9, xviii+304 pp.
- [21] G. D. Birkhoff, “Dynamical systems”, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **9**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1966, xii+305 pp.
- [22] Я. Г. Синай, “Динамические системы с упругими отражениями. Эргодические свойства рассеивающих бильярдов”, *УМН*, **25**:2 (1970), 141–192; англ. пер.: Ya. G. Sinai, “Dynamical systems with elastic reflections”, *Russian Math. Surveys*, **25**:2 (1970), 137–189.

- [23] S. Aubry, G. Abramovici, “Chaotic trajectories in the standard map: the concept of anti-integrability”, *Phys. D*, **43**:2–3 (1990), 199–219.
- [24] R. S. MacKay, J. D. Meiss, “Cantori for symplectic maps near the anti-integrable limit”, *Nonlinearity*, **5**:1 (1992), 149–160.
- [25] D. Treschev, O. Zubelevich, *Introduction to the perturbation theory of Hamiltonian systems*, Springer Monogr. Math., Springer, Berlin, 2010, ISBN: 978-3-642-03029-1, x+211 pp.
- [26] S. Bolotin, R. MacKay, “Multibump orbits near the anti-integrable limit for Lagrangian systems”, *Nonlinearity*, **10**:5 (1997), 1015–1029.
- [27] В. Клингенберг, *Лекции о замкнутых геодезических*, Мир, М., 1982, 414 с.; пер. с англ.: W. Klingenberg, *Lectures on closed geodesics*, Grundlehren Math. Wiss., **230**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1978, x+227 pp.
- [28] R. Bott, “On the iteration of closed geodesics and Sturm intersection theory”, *Comm. Pure. Appl. Math.*, **9**:2 (1956), 171–206.
- [29] Д. Трещёв, “О связи индекса Морса замкнутой геодезической с ее устойчивостью”, *Труды сем. вектор. тензор. анал.*, 1988, № 23, 175–189.
- [30] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*. Ч.1: *Основные операции анализа*, 2-е изд., Физматлит, М., 1963, 342 с.; Ч.2: *Трансцендентные функции*, 1963, 515 с.; пер. 4-го англ. изд.: E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A course of modern analysis. An introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions; with an account of the principal transcendental functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1927, vi+608 pp.
- [31] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики Т. 2: Гармонический анализ. Самосопряженность*, В 4-х тт., Мир, 1978, 396 с.; пер. с англ.: M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. Vol. II: Fourier analysis, self-adjointness*, Associated Press, New York–London, 1975, xv+361 pp.
- [32] В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт, *Математические аспекты классической и небесной механики*, Итоги науки и техники. Соврем. проблемы матем. Фундам. напр., т. 3, ВИНТИ, М., 1985, 304 с.; англ. пер.: V. I. Arnold, V. V. Kozlov, A. I. Neishtadt, *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics. Dynamical systems, III*, Encyclopaedia Math. Sci., **3**, Springer, Berlin, 1993, 1–291.
- [33] W. Gordon, “On the relation between period and energy in periodic dynamical systems”, *J. Math. Mech.*, **19** (1969/1970), 111–114.
- [34] A. Weinstein, “Bifurcations and Hamilton’s principle”, *Math. Z.*, **159**:3 (1978), 235–248.

С. В. Болотин (S. V. Bolotin)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;
University of Wisconsin-Madison, USA
E-mail: bolotin@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
25.02.2010

Д. В. Трещёв (D. V. Treschev)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова;
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: treschev@mi.ras.ru