Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Драгович, М. Раднович, Интегрируемые бильярды
и квадрики, *УМН*, 2010, том 65, выпуск 2, 133–194

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9349>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 15:25:30

УДК 517.938+531.01

Посвящается
Валерию Васильевичу Козлову
в связи с его шестидесятилетием

Интегрируемые билиарды и квадрики

В. Драгович, М. Раднович

Изучаются билиарды внутри квадратик как динамические системы с богатой геометрической структурой. Связи между билиардной динамикой и геометрией пучков квадратик исследуются в обоих направлениях. Несколько хорошо известных классических и современных результатов, относящихся к роду 1, обобщаются на произвольные размерность и род. Среди них теоремы Понселе, Дарбу, Вейра, пространственная теорема Гриффитса–Харриса. Излагается синтетический подход к теоремам сложения для рода большего 1.

Библиография: 77 названий.

Ключевые слова: интегрируемые билиарды, пучок квадратик, гиперэллиптическая кривая, якобиан, поризм Понселе, периодические траектории, сетки Понселе–Дарбу, теоремы сложения.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	134
2. Билиарды в эллипсоидах и их периодические траектории.....	137
2.1. Периодические траектории внутри k софокусных квадратик в евклидовом пространстве.....	138
2.2. Билиарды в эллипсоидах как системы с дискретным временем.....	145
2.3. Теорема Понселе и условие Кэли в пространстве Лобачевского.....	150
2.4. Топологические свойства эллиптического билиарда.....	152
2.5. Интегрируемые возмущения потенциалом для эллиптического билиарда.....	164
3. Закон билиардного отражения и гиперэллиптические кривые.....	168
3.1. Динамика билиардов в проективной постановке.....	168
3.2. Обобщенная кривая Кэли.....	171
3.3. Закон билиардного отражения и алгебраическая структура на многообразии $\mathcal{A}_\ell$	172

Работа выполнена при поддержке Сербского министерства науки и техники (проект “Геометрия и топология многообразий и интегрируемые динамические системы”) и исследовательской группы по математической физике университета Лиссабона (проект “Вероятностный подход к конечномерным и бесконечномерным динамическим системам”, PTDC/MAT/104173/2008).

3.4. s -слабые траектории Понселе	183
3.5. Обобщенная теорема Вейра и пространственная теорема Понселе в форме Гриффитса–Харриса в больших размерностях	185
3.6. Сетка Понселе–Дарбу и многомерные обобщения	187
Список литературы	191

1. Введение

Двадцать лет назад В. В. Козлов и Д. В. Трещев дали в [1] хорошее обстоятельное изложение теории билиардов, представив ее как раздел теории столкновений и динамических систем с односторонними связями. Они изложили различные аспекты динамических и аналитических свойств билиардных систем. В частности, глава 4 книги посвящена интегрируемым задачам. Основная цель настоящей работы – обзор результатов по интегрируемым билиардам, полученных за последние 20 лет. Мы начнем с билиардов в областях, ограниченных коническими сечениями, и перейдем к их естественным многомерным обобщениям – билиардам в областях, ограниченных квадрами.

Значение эллиптических билиардов для геометрии тесно связано с теоремой Понселе, фундаментальным результатом классической проективной геометрии. Как хорошо известно, Жан-Виктор Понселе доказал ее в 1813 г., после наполеоновских войн с Россией, находясь в плену в Саратове. Его первое доказательство было скорее аналитическим. В 1822 г. Понселе публикует еще одно, чисто геометрическое, синтетическое доказательство в своем *Traité des propriétés projectives des figures* [2]. Предположим, что на плоскости заданы два эллипса и замкнутая ломаная, вписанная в один из них и описанная около другого. Тогда теорема Понселе утверждает, что существует бесконечно много таких ломаных: любая точка первого эллипса может быть вершиной подобного многоугольника. Вдобавок, у всех таких многоугольников одно и то же число сторон. Затем, в 1828 г., используя теорему сложения для эллиптических функций, К. Якоби дал другое доказательство теоремы Понселе (см. [3]). По существу, теорема Понселе эквивалентна теоремам сложения для эллиптических кривых, и доказательство Понселе дает синтетический метод введения структуры группы на эллиптической кривой. Еще одно доказательство теоремы Понселе на современном алгебро-геометрическом языке было недавно получено Ф. Гриффитсом и Дж. Харрисом (см. [4]). Там же они дали интересное обобщение теоремы Понселе на случай многогранных поверхностей, вписанных и описанных около пары квадрик. При обсуждении истории теоремы Понселе следует отметить замечательное доказательство, данное Г. Дарбу, которое можно найти в [5; гл. 3]. Это доказательство развивает и обобщает идеи Н. Труди [6], [7] и основано на понятии 2–2 соответствия, восходящем к М. Шалю. В работе [8] обсуждается взаимосвязь этого доказательства с теорией многозначных групп.

Ввиду геометрической трактовки структуры группы на кубике (см. рис. 1), возникает вопрос о поиске аналогичной конструкции структуры группы в случае более высокого рода.

Естественный вопрос, возникающий в связи с теоремой Понселе, заключается в нахождении условия, по паре заданных коник определяющего, существует ли n -угольник, вписанный в одну из них и описанный около другой. А. Кэли

Рис. 1. Групповой закон на кубической кривой

нашел такое условие в 1853 г. в заметке [9], используя теорию абелевых интегралов. Он обсуждал поризм Понселе также в ряде других работ [10]–[14]. Под впечатлением от [9], А. Лебег перевел доказательство Кэли на геометрический язык. Данный Лебегом вывод условия Кэли методами проективной геометрии и алгебры можно найти в его книге *Les coniques* [15]. В современном контексте Гриффитс и Харрис доказали теорему Кэли, найдя аналитическое условие, задающее точки конечного порядка на эллиптической кривой [16].

Стоит отметить, что на самом деле Понселе доказал намного более общее утверждение, чем общеизвестная теорема Понселе [17], [2], и вывел из него эту теорему как следствие. Точнее говоря, он рассмотрел $n + 1$ конику, входящую в пучок на проективной плоскости. Если существует n -угольник с вершинами на первой конике, каждая сторона которого касается одной из n оставшихся коник, то таких многоугольников бесконечно много. Мы будем называть это утверждение *большой теоремой Понселе*, а соответствующие многоугольники *многоугольниками Понселе*.

Обзор ряда классических результатов типа теоремы Понселе с короткими современными доказательствами дан в [18], а алгебро-геометрический подход с использованием модулярных кривых к семействам многоугольников Понселе представлен в [19], [20].

Перейдем к важной механической интерпретации теоремы Понселе. *Эллиптический бильярд* [1] – это динамическая система, в которой единичная точечная масса движется по инерции (иными словами, с постоянной скоростью) внутри эллипса, причем на границе выполнен закон отражения: во всякой точке соударения углы падения и отражения с касательной к эллипсу равны. Также предполагается, что отражения абсолютно упруги. Хорошо известно, что всякий отрезок фиксированной бильярдной траектории касается одной и той же коники, софокусной с границей [21]. Если траектория замыкается после n отражений, то по теореме Понселе любая бильярдная траектория с той же каустикой будет периодической, с периодом n .

Большая теорема Понселе также имеет механическую интерпретацию. Двойственная конфигурация к пучку коник в плоскости – это семейство софокусных кривых второго порядка [22]. Рассмотрим следующий, немного непривычный бильярд. Пусть даны n софокусных коник, и пусть бильярдный шар последовательно отражается от каждой из этих n коник. Каждый отрезок получившейся траектории касается одной и той же коники, софокусной с данными n кривыми. Если траектория становится замкнутой после n

отражений, то по большой теореме Понселе всякая подобная траектория с той же каустикой замкнута.

Утверждение, двойственное большой теореме Понселе, можно обобщить на d -мерный случай [21]. Предположим, что у многоугольника вершины $x_1, \dots, x_n$ расположены на софокусных квадратичных гиперповерхностях $Q_1, \dots, Q_n$ в d -мерном евклидовом пространстве, причем пары соседних сторон удовлетворяют закону отражения от соответствующей гиперповерхности. Тогда все стороны касаются некоторых квадрик $Q^1, \dots, Q^{d-1}$, софокусных с $\{Q_i\}$; для фиксированных наборов $\{Q_i, Q^j\}$ существует бесконечное семейство многоугольников с этим свойством.

Однако более чем за 100 лет до этих недавних результатов, в 1870 г., Дарбу доказал обобщение теоремы Понселе для бильярда внутри эллипсоида в трехмерном пространстве [23]. Похоже, его работы в этом направлении сейчас совершенно забыты.

Дарбу занимался теоремой Понселе более 50 лет, и в настоящей работе мы так или иначе развиваем многие из его результатов и идей.

Было бы естественным выяснить условия типа Кэли для обобщений теоремы Понселе. Мы нашли такие условия для бильярда в эллипсоиде, лежащем в евклидовом пространстве произвольной размерности [24], [25]. Недавно [26]–[29] мы нашли алгебро-геометрические условия существования периодических бильярдных траекторий в системе k квадрик, лежащих в d -мерном евклидовом пространстве. Мы излагаем их в п. 2.1 настоящей статьи.

Пункт 2.2 начинается с изложения процедуры алгебро-геометрического интегрирования эллиптического бильярда; он основан на работе Ю. Мозера и А. Веселова [30]. Затем соответствующие условия типа Кэли выводятся так же, как в [24], [25]. В п. 2.3 приведено изложение по той же схеме для случая геометрии Лобачевского, опирающееся на работы [31] и [32]. Мы завершаем второй раздел статьи пп. 2.4 и 2.5, содержащими результаты из [33] по топологической характеристизации изоэнергетических подмногообразий фазового пространства эллиптических бильярдов и по интегрируемым возмущениям потенциалом для таких бильярдов; см. [34]–[38].

Еще одна важная задача нашей статьи – дать систематический обзор истории вопроса, особенно пристально анализируя идеи и результаты Дарбу. В то время как результаты Лебега в этой области, пусть и нечасто, но все же цитируются специалистами, соответствующие идеи Дарбу, как нам представляется, сейчас практически неизвестны математикам. Мы приводим естественные многомерные обобщения идей и результатов Дарбу, равно как и работ Лебега. В числе прочих результатов мы устанавливаем новые интересные свойства пучков квадрик; см. п. 3.1.

При изложении результатов, развивающих программу Гриффитса и Харриса, мы следуем нашей недавней статье [39]. В п. 3.2 мы вводим обобщенную кривую Кэли, после чего мы приводим геометрическую конструкцию, обобщающую сложение на эллиптической кривой в случае гиперэллиптических якобианов; см. п. 3.3. Наши идеи развивают подходы М. Райда, Р. Донаги и Х. Кнёррера [40]–[42]. Мы развиваем дальше и осуществляем их конструкции, упрощая их и делая наглядными, с помощью идей, развитых в [26] для бильярдных динамических систем на пучках квадрик.

Основными вехами этого изложения являются работы [41] и [26], а следующее ключевое наблюдение из [39] связывает их: *соответствие* $g \mapsto g'$ в лемме 4.1 и следствии 4.2 из [41] является **бильярдным отображением на квадрике** $\mathcal{Q}_\lambda$. Подробности см. в следствии 3.15 и сопровождающей его дискуссии.

Таким образом, заметив, что конструкции в [40]–[42] имеют бильярдную основу, и разобравшись в ней, мы получаем возможность использовать аппарат бильярдов для построения и анализа гиперэллиптических якобианов, в особенности их вещественных частей. Всякий вещественный гиперэллиптический якобиан можно реализовать как множество T прямых в $\mathbb{R}^d$, касающихся $d - 1$ фиксированной квадрики $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_{d-1}$ из некоторого софокусного семейства одновременно. Хорошо известно, что динамическая система, задаваемая квадриками из софокусного семейства, сохраняет такое множество T . Используя теорему о двойном отражении и некоторые другие методы теории бильярдов, мы вводим на T структуру группы, *бильярдную алгебру*. Использование бильярдов в алгебро-геометрических рассуждениях, как нередко бывает в таких случаях, оказывается обоюдовыгодным. Мы выводим фундаментальное свойство множества T : *любые две прямые из T можно получить друг из друга путем не более чем $d - 1$ бильярдного отражения от квадрик из софокусного семейства*. Это дает нам возможность ввести в п. 3.4 новые иерархии понятий: *s -скрещенных прямых из T , $s = -1, 0, \dots, d - 2$, и s -слабых траекторий Понселе длины n* . Последние оказываются естественными квазипериодическими обобщениями многоугольников Понселе. Используя бильярдную алгебру, мы полностью описываем эти траектории аналитически. Эти результаты являются дальнейшим обобщением недавно данного нами описания в духе Кэли многоугольников Понселе в произвольной размерности; см. [29]. Мы подчеркнем, что метод, использованный в [39] и основанный на бильярдной алгебре, отличается от методов работы [29]. Ниже мы изложим оба этих метода.

Взаимосвязи между динамикой бильярдов, линейными подпространствами в пересечениях квадрик и гиперэллиптическими якобианами, обсуждаемые в настоящей статье, позволили нам получить многомерные обобщения нескольких классических результатов. Для демонстрации возможностей нашего метода мы приводим в п. 3.5 обобщение теоремы Понселе, принадлежащее Вейру (см. [43]). Мы также выводим и излагаем здесь обобщения на любую размерность пространственной теоремы Понселе, доказанной Гриффитсом и Харрисом (см. [4]). В п. 3.6 мы даем обобщение теоремы Дарбу [44] на произвольную размерность.

Мы с большим удовлетворением посвящаем эту работу академику Валерию Васильевичу Козлову в связи с его 60-летием. Из числа нескольких работ последних 20 лет, в которых Валерий Васильевич обращался к проблематике бильярдов (см., к примеру, [45]–[48]), особый интерес для нашего изложения представляют [38] и [45].

2. Бильярды в эллипсоидах и их периодические траектории

Пусть $\mathcal{M}$ – n -мерное риманово многообразие и $\Omega \subset \mathcal{M}$ – область с границей, состоящей из нескольких гладких гиперповерхностей. Бильярд в Ω [1] – это динамическая система, в которой единичная точечная масса свободно движется

внутри области и подчиняется закону отражения на границе, т. е. углы падения и отражения с касательной к границе во всякой точке соударения равновелики. Предположим также, что отражения происходят абсолютно упруго, так что скорость точечной массы не меняется после соударений.

В п. 2.1 мы рассмотрим случай, когда $\mathcal{M}$ – евклидово пространство, а граница “бильярдного стола” составлена из нескольких софокусных квадрик. Мы изложим наши результаты по аналитическому описанию периодических траекторий в таких бильярдах [26]–[28]. В п. 2.2, с помощью алгебро-геометрического интегрирования дискретной бильярдной системы [30], мы получим соответствующие обобщения условия Кэли [24], [25]. Теорема Понселе и условия Кэли для бильярдов внутри квадрик в пространстве Лобачевского, полученные в [32], излагаются в п. 2.3. После этого, в п. 2.4 мы даем обзор топологических свойств эллиптических бильярдов [33], и завершается раздел результатами по интегрируемым возмущениям таких бильярдов потенциалом [35].

Заметим, что бильярды в других геометриях также изучались в литературе; к примеру, см. [49]–[51].

2.1. Периодические траектории внутри k софокусных квадрик в евклидовом пространстве. Дарбу был первым, кто рассмотрел многомерное обобщение теоремы Понселе. А именно, он изучал световые лучи в трехмерном случае ($d = 3$) и в 1870 г. анонсировал соответствующую большую теорему Понселе [23].

Обобщения большой теоремы Понселе на более высокие размерности ($d \geq 3$) были получены совсем недавно [21], а соответствующие условия типа Кэли были найдены нами в [26].

Основная задача этого пункта – дать подробное обоснование условия типа Кэли для обобщенной большой теоремы Понселе, а также обсудить его на примерах.

Рассмотрим эллипсоид в $\mathbb{R}^d$:

$$\frac{x_1^2}{a_1} + \cdots + \frac{x_d^2}{a_d} = 1, \quad a_1 > \cdots > a_d > 0,$$

и связанную с ним систему эллиптических координат Якоби $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$, упорядоченных условием

$$\lambda_1 > \cdots > \lambda_d.$$

Обозначив

$$Q_\lambda(x) = \frac{x_1^2}{a_1 - \lambda} + \cdots + \frac{x_d^2}{a_d - \lambda},$$

мы можем задать всякую квадрику из соответствующего софокусного семейства уравнением вида

$$Q_\lambda Q_\lambda(x) = 1. \quad (2.1)$$

Знаменитая теорема Шаля утверждает, что всякая прямая в $\mathbb{R}^d$ касается ровно $d - 1$ квадрики из заданного софокусного семейства. В следующей лемме описывается важное свойство этих квадрик.

ЛЕММА 2.1. Пусть прямая ℓ касается квадрик $Q_{\alpha_1}, \dots, Q_{\alpha_{d-1}}$ из семейства (2.1). Тогда у всякой точки прямой ℓ ее координаты Якоби $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$

удовлетворяют неравенствам $\mathcal{P}(\lambda_s) \geq 0$, $s = 1, \dots, d$, где

$$\mathcal{P}(x) = (a_1 - x) \cdots (a_d - x)(\alpha_1 - x) \cdots (\alpha_{d-1} - x). \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x – точка ℓ с координатами Якоби $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$, и пусть y – вектор, параллельный ℓ . Уравнение $Q_\lambda(x + ty) = 1$ – квадратное по t , с дискриминантом

$$\Phi_\lambda(x, y) = Q_\lambda(x, y)^2 - Q_\lambda(y)(Q_\lambda(x) - 1),$$

где

$$Q_\lambda(x, y) = \frac{x_1 y_1}{a_1 - \lambda} + \cdots + \frac{x_d y_d}{a_d - \lambda}.$$

Согласно [52],

$$\Phi_\lambda(x, y) = \frac{(\alpha_1 - \lambda) \cdots (\alpha_{d-1} - \lambda)}{(a_1 - \lambda) \cdots (a_d - \lambda)}.$$

Для всякой координаты $\lambda = \lambda_s$ ($1 \leq s \leq d$) это квадратное уравнение имеет решение $t = 0$, так что соответствующие дискриминанты неотрицательны. Очевидно, что это эквивалентно условию $\mathcal{P}(\lambda_s) \geq 0$.

2.1.1. Биллиард в области, ограниченной софокусными квадрами. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$, лежащей на объединении нескольких квадрик семейства (2.1). Тогда в эллиптических координатах Ω можно задать условиями

$$\beta'_1 \leq \lambda_1 \leq \beta''_1, \quad \dots, \quad \beta'_d \leq \lambda_d \leq \beta''_d,$$

где $a_{s+1} \leq \beta'_s < \beta''_s \leq a_s$ при $1 \leq s \leq d-1$, а $-\infty < \beta'_d < \beta''_d \leq a_d$.

Рассмотрим биллиардную систему в Ω , и пусть $\mathcal{Q}_{\alpha_1}, \dots, \mathcal{Q}_{\alpha_{d-1}}$ – каустики одной из ее траекторий. При всяком $s = 1, \dots, d$ множество Λ_s значений, принимаемых координатой λ_s на траектории, согласно лемме 2.1, содержится в $\Lambda'_s = \{\lambda \in [\beta'_s, \beta''_s] : \mathcal{P}(\lambda) \geq 0\}$. Согласно [41], во всяком интервале (a_{s+1}, a_s) ($2 \leq s \leq d$) лежит не более двух значений из $\alpha_1, \dots, \alpha_{d-1}$, интервал $(-\infty, a_d)$ содержит не более одного из этих чисел, а $(a_1, +\infty)$ не содержит ни одного из них. Таким образом, для всякого s возможны три ситуации.

Первый случай: $\alpha_i, \alpha_j \in [\beta'_s, \beta''_s]$, $\alpha_i < \alpha_j$. Поскольку всякая прямая, содержащая отрезок траектории, касается $\mathcal{Q}_{\alpha_i}$ и $\mathcal{Q}_{\alpha_j}$, вся траектория заключена между двумя этими квадрами. Критические точки эллиптической координатной переменной λ_s – это точки касания траектории и квадрик, а между ними эллиптическая переменная монотонна. Значит, точки касания с $\mathcal{Q}_{\alpha_i}$ и $\mathcal{Q}_{\alpha_j}$ чередуются на траектории и $\Lambda_s = \Lambda'_s = [\alpha_i, \alpha_j]$.

Второй случай: из чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_{d-1}$ только α_i лежит в $[\beta'_s, \beta''_s]$. Многочлен $\mathcal{P}$ неотрицателен ровно на одном из отрезков $[a_{s+1}, \alpha_i]$ и $[\alpha_i, a_s]$; будем считать, что на первом. Тогда траектория отражается только от $\mathcal{Q}_{\beta'_s}$. Если $\alpha_i \neq \beta''_s$, то биллиардный шар никогда не попадает на границу $\mathcal{Q}_{\beta'_s}$. У переменной λ_s критические точки – это точки столкновения с $\mathcal{Q}_{\beta'_s}$ и каустикой $\mathcal{Q}_{\alpha_i}$, а вне их она монотонна. Значит, $\Lambda_s = \Lambda'_s = [\beta'_s, \alpha_i]$. Если $\mathcal{P}$ неотрицателен на $[\alpha_i, a_s]$, то $\Lambda_s = \Lambda'_s = [\alpha_i, \beta''_s]$.

Третий случай: отрезок $[\beta'_s, \beta''_s]$ не содержит значений $\alpha_1, \dots, \alpha_{d-1}$. Тогда $\mathcal{P}$ неотрицателен на $[\beta'_s, \beta''_s]$. Все критические точки λ_s лежат в точках соприкосновения с граничными квадрами $\mathcal{Q}_{\beta'_s}$ и $\mathcal{Q}_{\beta''_s}$, а вне их переменная монотонна.

Следовательно, бильярдный шар попеременно отскакивает от этих квадратик. Очевидно, что $\Lambda_s = \Lambda'_s = [\beta'_s, \beta''_s]$.

Положим $[\gamma'_s, \gamma''_s] := \Lambda_s = \Lambda'_s$. Заметим, что для всякой пары $\mathcal{Q}_{\gamma'_s}, \mathcal{Q}_{\gamma''_s}$ траектория поочередно наталкивается на эти квадратики. Значит, у всякой периодической траектории число точек пересечения с каждой из этих квадратик одно и то же.

Сделаем несколько замечаний относительно случая, когда $\gamma'_s = a_{s+1}$ или $\gamma''_s = a_s$. Это означает, что либо часть $\partial\Omega$ является вырожденной квадратикой из софокусного семейства либо Ω не ограничена хотя бы с одной стороны квадратикой соответствующего вида. Если Ω ограничена координатной гиперплоскостью, то рассуждения остаются теми же, что и выше. С другой стороны, если часть границы отсутствует, то у координаты λ_s имеются экстремумы в точках пересечения траектории с соответствующей гиперплоскостью. Поскольку замкнутая траектория должна пересекать гиперплоскость четное число раз, функция λ_s принимает на периоде каждое из экстремальных значений четное число раз.

ТЕОРЕМА 2.2. *Траектория бильярдной системы в Ω с каустиками $\mathcal{Q}_{\alpha_1}, \dots, \mathcal{Q}_{\alpha_{d-1}}$ периодична и имеет ровно n_s точек на $\mathcal{Q}_{\gamma'_s}$ и n_s точек на $\mathcal{Q}_{\gamma''_s}$ ($1 \leq s \leq d$) тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{s=1}^d n_s (\mathcal{A}(P_{\gamma'_s}) - \mathcal{A}(P_{\gamma''_s})) = 0$$

на якобиане кривой

$$\Gamma: y^2 = \mathcal{P}(x) := (a_1 - x) \cdots (a_d - x)(\alpha_1 - x) \cdots (\alpha_{d-1} - x).$$

Здесь $\mathcal{A}$ – отображение Абеля–Якоби, а $P_{\gamma'_s}, P_{\gamma''_s}$ – точки на Γ с координатами $P_{\gamma'_s} = (\gamma'_s, (-1)^s \sqrt{\mathcal{P}(\gamma'_s)})$, $P_{\gamma''_s} = (\gamma''_s, (-1)^s \sqrt{\mathcal{P}(\gamma''_s)})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вслед за Якоби [3] и Дарбу [44] рассмотрим уравнения

$$\sum_{s=1}^d \frac{d\lambda_s}{\sqrt{\mathcal{P}(\lambda_s)}} = 0, \quad \sum_{s=1}^d \frac{\lambda_s d\lambda_s}{\sqrt{\mathcal{P}(\lambda_s)}} = 0, \quad \dots, \quad \sum_{s=1}^d \frac{\lambda_s^{d-2} d\lambda_s}{\sqrt{\mathcal{P}(\lambda_s)}} = 0, \quad (2.3)$$

где при фиксированном s квадратный корень $\sqrt{\mathcal{P}(\lambda_s)}$ извлекается с одним и тем же знаком во всех выражениях. Тогда (2.3) представляет собой систему дифференциальных уравнений для прямой, касающейся $\mathcal{Q}_{\alpha_1}, \dots, \mathcal{Q}_{\alpha_{d-1}}$. Кроме того,

$$\sum_{s=1}^d \frac{\lambda_s^{d-1} d\lambda_s}{\sqrt{\mathcal{P}(\lambda_s)}} = 2 d\ell, \quad (2.4)$$

где $d\ell$ – элемент длины.

Рассматривая всевозможные сочетания знаков $\sqrt{\mathcal{P}(\lambda_1)}, \dots, \sqrt{\mathcal{P}(\lambda_d)}$, мы получим 2^{d-1} неэквивалентных систем (2.3), соответствующих 2^{d-1} различным прямым, проходящим через точку общего положения и касающимся $\mathcal{Q}_{\alpha_1}, \dots, \mathcal{Q}_{\alpha_{d-1}}$. Более того, системы, соответствующие прямой и ее отражению относительно фиксированной гиперплоскости $\lambda_s = \text{const}$, отличаются только знаками радикалов $\sqrt{\mathcal{P}(\lambda_s)}$.

Решив (2.3) и (2.4) как систему линейных уравнений относительно $\frac{d\lambda_s}{\sqrt{\mathcal{P}(\lambda_s)}}$, мы получим

$$\frac{d\lambda_s}{\sqrt{\mathcal{P}(\lambda_s)}} = \frac{2d\ell}{\prod_{i \neq s}(\lambda_s - \lambda_i)}.$$

Таким образом, вдоль билиардной траектории дифференциалы $\frac{(-1)^{s-1} d\lambda_s}{\sqrt{\mathcal{P}(\lambda_s)}}$ остаются положительными, если считать, что знаки квадратных корней выбраны соответствующим образом на каждом интервале.

Из этих замечаний и рассуждений, предшествующих теореме, следует, что интеграл $\int \frac{\lambda_s^i d\lambda_s}{\sqrt{\mathcal{P}(\lambda_s)}}$, взятый по отрезку между двумя соседними точками пересечения траектории и квадрики $\mathcal{Q}_{\gamma'_s}$ (или $\mathcal{Q}_{\gamma''_s}$), равен

$$2(-1)^{s-1} \int_{\gamma'_s}^{\gamma''_s} \frac{\lambda_s^i d\lambda_s}{\sqrt{\mathcal{P}(\lambda_s)}}.$$

Теперь если $\mathbf{p}$ – конечный многоугольник, представляющий билиардную траекторию, у которого ровно n_s точек лежат на $\mathcal{Q}_{\gamma'_s}$ и n_s точек лежат на $\mathcal{Q}_{\gamma''_s}$ ($1 \leq s \leq d$), то

$$\sum \int^{\mathbf{p}} \frac{\lambda_s^i d\lambda_s}{\sqrt{\mathcal{P}(\lambda_s)}} = 2 \sum (-1)^{s-1} n_s \int_{\gamma'_s}^{\gamma''_s} \frac{\lambda_s^i d\lambda_s}{\sqrt{\mathcal{P}(\lambda_s)}} \quad (1 \leq i \leq d).$$

Далее, ломаная оказывается замкнутой тогда и только тогда, когда

$$\sum (-1)^s n_s \int_{\gamma'_s}^{\gamma''_s} \frac{\lambda_s^i d\lambda_s}{\sqrt{\mathcal{P}(\lambda_s)}} = 0 \quad (1 \leq i \leq d-1),$$

что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 2.3. Рассмотрим области Ω' и Ω'' в $\mathbb{R}^3$. Пусть Ω' ограничена эллипсоидом $\mathcal{Q}_0$ и двуполостным гиперboloидом $\mathcal{Q}_\beta$, $a_2 < \beta < a_1$, так что Ω' лежит между полостями $\mathcal{Q}_\beta$. С другой стороны, допустим, что Ω'' ограничена $\mathcal{Q}_0$, правой полостью $\mathcal{Q}_\beta$ (которая лежит в полупространстве $x_1 > 0$) и плоскостью $x_3 = 0$. Эллиптические координаты точек внутри Ω' и Ω'' удовлетворяют условиям

$$0 \leq \lambda_3 \leq a_3, \quad \beta \leq \lambda_1 \leq a_1.$$

В этих областях рассмотрим билиардные траектории с каустиками $\mathcal{Q}_{\mu_1}$ и $\mathcal{Q}_{\mu_2}$, $a_3 < \mu_1 < a_2$, $a_2 < \mu_2 < a_1$. Поскольку $\mu_2 \leq \beta$, интервалы Λ_s ($s \in \{1, 2, 3\}$) возможных значений эллиптических координат на траектории в обоих случаях следующие:

$$\Lambda_1 = [\beta, a_1], \quad \Lambda_2 = [\mu_1, a_2], \quad \Lambda_3 = [0, a_3].$$

В случае Ω'' существование периодической траектории с каустиками $\mathcal{Q}_{\mu_1}$ и $\mathcal{Q}_{\mu_2}$, у которой на периоде n отражений от $\mathcal{Q}_0$ и $2m$ отражений от $\mathcal{Q}_\beta$, эквивалентно равенству

$$n(\mathcal{A}(P_0) - \mathcal{A}(P_{a_3})) + 2m(\mathcal{A}(P_\beta) - \mathcal{A}(P_{\mu_1})) = 0$$

на якобиане соответствующей эллиптической кривой. В случае Ω' существование траектории с такими свойствами эквивалентно условиям

$$n(\mathcal{A}(P_0) - \mathcal{A}(P_{a_3})) + 2m(\mathcal{A}(P_\beta) - \mathcal{A}(P_{\mu_1})) = 0 \quad \text{и} \quad n \text{ четно.}$$

То, что из второго равенства следует первое, объясняется следующим геометрическим наблюдением: произвольную билиардную траекторию в Ω' можно преобразовать в траекторию в Ω'' , отразив симметрично относительно плоскости x_2x_3 все ее точки, лежащие ниже плоскости. Заметим, что это соответствие траекторий является соответствием “2 к 1”, так что билиардная траектория общего положения в Ω'' соответствует ровно двум траекториям в Ω' . Примеры таких соответствующих друг другу билиардных траекторий приведены на рис. 2, а) и 2, б).

Рис. 2. а) траектория в Ω' , б) траектория в Ω''

2.1.2. Упорядоченная билиардная партия. Следующий шаг заключается во введении понятий соударения “снаружи” и “изнутри”. Точнее говоря, рассмотрим такой эллипсоид $\mathcal{Q}_\lambda$ из софокусного семейства (2.1), что $\lambda \in (a_{s+1}, a_s)$ для некоторого $s \in \{1, \dots, d\}$, где $a_{d+1} = -\infty$.

Заметим, что после ограничения на билиардный луч, отражающийся от $\mathcal{Q}_\lambda$, у эллиптической переменной λ_i возникает локальный экстремум в точке отражения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Луч отражается *снаружи* от квадрики $\mathcal{Q}_\lambda$, если точка отражения является локальным максимумом координаты Якоби λ_s , и он отражается *изнутри*, если точка отражения – локальный минимум λ_s .

На рис. 3, а) и 3, б) мы схематически изображаем отражения снаружи и изнутри эллипса и гиперболы.

Заметим, что в случае, когда $\mathcal{Q}_\lambda$ – эллипсоид, понятия, введенные определением 2.4, имеют обычный смысл.

Пусть дан набор из k софокусных квадрик $\mathcal{Q}_{\beta_1}, \dots, \mathcal{Q}_{\beta_k}$ из софокусного пучка (2.1), и пусть $(i_1, \dots, i_k) \in \{-1, 1\}^k$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Упорядоченная билиардная партия, ассоциированная с квадраками $\mathcal{Q}_{\beta_1}, \dots, \mathcal{Q}_{\beta_k}$, с сигнатурой $(i_1, \dots, i_k)$ – это билиардная система с траекториями, соударяющимися с $\mathcal{Q}_{\beta_1}, \dots, \mathcal{Q}_{\beta_k}$ так, что

- при $i_s = +1$ отражение от $\mathcal{Q}_{\beta_s}$ является отражением изнутри;
- при $i_s = -1$ отражение от $\mathcal{Q}_{\beta_s}$ является отражением снаружи.

Рис. 3. а) отражение снаружи, б) отражение изнутри

Заметим, что всякая траектория упорядоченной билиардной партии имеет $d - 1$ каустику из того же семейства (2.1).

Пусть $\mathcal{Q}_{\beta_1}, \dots, \mathcal{Q}_{\beta_k}$ – эллипсоиды. Рассмотрим упорядоченную билиардную партию с сигнатурой $(i_1, \dots, i_k)$. Для того чтобы ее траектории были ограничены, должно быть выполнено следующее условие:

$$i_s = -1 \Rightarrow i_{s+1} = i_{s-1} = 1 \text{ и } \beta_{s+1} < \beta_s, \beta_{s-1} < \beta_s.$$

(Здесь отождествляются индексы 0 и k , а также $k + 1$ и 1.)

ПРИМЕР 2.6. На рис. 4 изображена траектория, соответствующая набору 7 квадрик

$$(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_3, \mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_3, \mathcal{Q}_1),$$

с сигнатурой $(1, -1, 1, -1, 1, 1, 1)$.

Рис. 4. Упорядоченная билиардная партия

ТЕОРЕМА 2.7. Пусть дана упорядоченная билиардная партия с k эллипсоидами $\mathcal{Q}_{\beta_1}, \dots, \mathcal{Q}_{\beta_k}$ и с сигнатурой $(i_1, \dots, i_k)$. Ее траектория, имеющая каустики $\mathcal{Q}_{\alpha_1}, \dots, \mathcal{Q}_{\alpha_{d-1}}$, является k -периодической, тогда и только тогда, когда сумма

$$\sum_{s=1}^k i_s (\mathcal{A}(P_{\beta_s}) - \mathcal{A}(P_{\alpha}))$$

совпадает с суммой нескольких выражений вида $\mathcal{A}(P_{\alpha_p}) - \mathcal{A}(P_{\alpha_{p'}})$ на якобиане кривой $\Gamma: y^2 = \mathcal{P}(x)$, где $P_{\beta_s} = \beta_s, +\sqrt{\mathcal{P}(\beta_s)}$, $\alpha = \min\{a_d, \alpha_1, \dots, \alpha_{d-1}\}$, а $\mathcal{Q}_{\alpha_p}, \mathcal{Q}_{\alpha_{p'}}$ – пары каустик одинакового типа.

При $\mathcal{Q}_{\beta_1} = \dots = \mathcal{Q}_{\beta_k}$ и $i_1 = \dots = i_k = 1$ получаем условие типа Кэли для билиардной траектории в эллипсоиде из $\mathbb{R}^d$.

Разберем подробнее случай билиардного шара, движущегося между двумя эллипсоидами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. *Условие существования замкнутой билиардной траектории, заключенной между эллипсоидами $\mathcal{Q}_{\beta_1}$ и $\mathcal{Q}_{\beta_2}$, отражающейся ровно m раз от каждого эллипсоида и имеющей каустики $\mathcal{Q}_{\alpha_1}, \dots, \mathcal{Q}_{\alpha_{d-1}}$, имеет следующий вид:*

$$\text{rank} \begin{pmatrix} f'_1(P_{\beta_2}) & f'_2(P_{\beta_2}) & \dots & f'_{m-d+1}(P_{\beta_2}) \\ f''_1(P_{\beta_2}) & f''_2(P_{\beta_2}) & \dots & f''_{m-d+1}(P_{\beta_2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(m-1)}(P_{\beta_2}) & f_2^{(m-1)}(P_{\beta_2}) & \dots & f_{m-d+1}^{(m-1)}(P_{\beta_2}) \end{pmatrix} < m - d + 1.$$

Здесь

$$f_j = \frac{y - B_0 - B_1(x - \beta_1) - \dots - B_{d+j-2}(x - \beta_1)^{d+j-2}}{x^{d+j-1}}, \quad 1 \leq j \leq m - d + 1,$$

а $y = B_0 + B_1(x - \beta_1) + \dots$ разложение в ряд Тейлора в точке, симметричной P_{β_1} относительно гиперэллиптической инволюции кривой Γ . (Обозначения те же, что в теореме 2.7.)

ПРИМЕР 2.9. Рассмотрим билиардную траекторию в трехмерном пространстве, в области, ограниченной эллипсоидами $\mathcal{Q}_0$ и $\mathcal{Q}_\gamma$ ($0 < \gamma < a_3$), с каустиками $\mathcal{Q}_{\alpha_1}$ и $\mathcal{Q}_{\alpha_2}$. Она становится периодической после 4 соударений изнутри с $\mathcal{Q}_0$ и 4 соударений снаружи с $\mathcal{Q}_\gamma$, тогда и только тогда, когда

$$\text{rank } X < 2.$$

Матрица X имеет вид

$$\begin{aligned} X_{11} &= -3C_0 + C_1\gamma + 3B_0 + 2B_1\gamma + B_2\gamma^2, \\ X_{12} &= -4C_0 + C_1\gamma + 4B_0 + 3B_1\gamma + 2B_2\gamma^2 + B_3\gamma^3, \\ X_{21} &= 6C_0 - 3C_1\gamma + C_2\gamma^2 - 6B_0 - 3B_1\gamma - B_2\gamma^2, \\ X_{22} &= 10C_0 - 4C_1\gamma - 10B_0 - 6B_1\gamma - 3B_2\gamma^2 - B_3\gamma^3, \\ X_{31} &= -10C_0 + 6C_1\gamma - 3C_2\gamma^2 + C_3\gamma^3 + 10B_0 + 4B_1\gamma + B_2\gamma^2, \\ X_{32} &= -20C_0 - 10C_1\gamma - 4C_2\gamma^2 + C_3\gamma^3 + 20B_0 + 10B_1\gamma + 4B_2\gamma^2 + B_3\gamma^3, \end{aligned}$$

а выражения

$$\begin{aligned} -\sqrt{(a_1 - x)(a_2 - x)(a_3 - x)(\alpha_1 - x)(\alpha_2 - x)} &= B_0 + B_1x + B_2x^2 + \dots, \\ +\sqrt{(a_1 - x)(a_2 - x)(a_3 - x)(\alpha_1 - x)(\alpha_2 - x)} &= C_0 + C_1(x - \gamma) + \dots \end{aligned}$$

являются тейлоровскими разложениями в точках $x = 0$ и $x = \gamma$ соответственно.

Рис. 5. Замкнутая траектория упорядоченной билиардной партии, делающая 8 отскоков изнутри попеременно от двух эллипсов

ПРИМЕР 2.10. В тех же обозначениях, что и в предыдущем примере, рассмотрим траектории, четырежды отраженные изнутри от каждого из Q_0 и Q_γ , как на рис. 5.

Явным условием периодичности подобной траектории является неравенство

$$\text{rank } X < 2,$$

где

$$\begin{aligned} X_{11} &= -4C_0 + C_1\gamma + 3B_1\gamma + 2B_2\gamma^2 + B_3\gamma^3, \\ X_{12} &= -3C_0 + C_1\gamma + 3B_0 + 2B_1\gamma + B_2\gamma^2, \\ X_{21} &= -6C_0 + C_2\gamma^2 + 6B_0 + 6B_1\gamma + 5B_2\gamma^2 + 3B_3\gamma^3, \\ X_{22} &= -6C_0 + C_1\gamma + C_2\gamma^2 + 6B_0 + 5B_1\gamma + 3B_2\gamma^2, \\ X_{31} &= -4C_0 + C_3\gamma^3 + 4B_0 + 4B_1\gamma + 4B_2\gamma^2 + 3B_3\gamma^3, \\ X_{32} &= -4C_0 + C_2\gamma^2 + C_3\gamma^3 + 4B_0 + 4B_1\gamma + 3B_2\gamma^2. \end{aligned}$$

2.2. Билиарды в эллипсоидах как системы с дискретным временем. Еще один подход к описанию периодических билиардных траекторий основан на технике дискретных представлений Лакса.

В этом пункте мы сначала перечислим основные этапы алгебро-геометрического интегрирования эллиптических билиардов согласно [30]. Затем мы установим связь между периодическими билиардными траекториями и точками конечного порядка на соответствующей гиперэллиптической кривой и найдем условия типа Кэли, следуя в этом нашему изложению в [24], [25]. Кроме того, мы обсудим более подробно траектории с периодом, не превосходящим d , и случай сингулярной изоспектральной кривой.

Следуя [30], мы рассмотрим билиардную систему как систему с дискретным временем. Используя алгоритм интегрирования такой системы, мы установим связь между периодическими билиардными траекториями и точками конечного порядка на соответствующей гиперэллиптической кривой.

2.2.1. XYZ-модель и изоспектральные кривые.

Эллиптический бильярд как механическая система с дискретным временем. Рассмотрим эллипсоид в $\mathbb{R}^d$, заданный уравнением

$$(Ax, x) = 1.$$

Будем считать, что A – диагональная матрица с различными собственными значениями. Движение бильярдного шара внутри эллипсоида описывается уравнениями

$$x_{k+1} - x_k = \mu_k y_{k+1}, \quad y_{k+1} - y_k = \nu_k Ax_k,$$

где

$$\mu_k = -\frac{2(Ay_{k+1}, x_k)}{(Ay_{k+1}, y_{k+1})}, \quad \nu_k = -\frac{2(Ax_k, y_k)}{(Ax_k, Ax_k)}.$$

Здесь x_k – точки отражений бильярдного шара, а $y_k = (x_k - x_{k-1})/|x_k - x_{k-1}|$ – импульсы.

Связь между бильярдом и XYZ-моделью. Как показано в [30], с бильярдной системой с дискретным временем можно связать XYZ-модель Гейзенберга. Опишем эту конструкцию. Дискретная XYZ-система Гейзенберга соответствует системе, описывающей стационарные решения XYZ-цепочки Гейзенберга с классическими спинами.

Рассмотрим отображение $\varphi: (x, y) \mapsto (x', y')$, заданное равенствами

$$x'_k = Jy_{k+1} = J(y_k + \nu_k Ax_k), \quad y'_k = -J^{-1}x_k, \quad J = A^{-1/2}.$$

Заметим, что динамика φ включает в себя бильярдную динамику

$$x''_k = Jy'_{k+1} = -x_{k+1}, \quad y''_k = -J^{-1}x'_k = -y_{k+1},$$

и рассмотрим последовательность $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$, где

$$(\bar{x}_0, \bar{y}_0) := (x_0, y_0), \quad (\bar{x}_{k+1}, \bar{y}_{k+1}) := \varphi(\bar{x}_k, \bar{y}_k),$$

для которой выполнены соотношения

$$\bar{x}_{k+1} = J\bar{y}_k + \nu_k J^{-1}\bar{x}_k, \quad \bar{y}_{k+1} = -J^{-1}\bar{x}_k$$

с параметром ν_k , выбранным так, чтобы $|\bar{y}_k| = 1$, $(A\bar{x}_k, \bar{x}_k) = 1$. Мы можем переписать это следующим образом:

$$\bar{x}_{k+1} + \bar{x}_{k-1} = \nu_k J^{-1}\bar{x}_k.$$

Тогда для последовательности $q_k := J^{-1}\bar{x}_k$ получаем

$$q_{k+1} + q_{k-1} = \nu_k J^{-1}q_k, \quad |q_k| = 1.$$

Эти соотношения представляют собой уравнения дискретной XYZ-системы Гейзенберга.

ТЕОРЕМА 2.11 [30]. Пусть $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ – последовательность, связанная с эллиптическим бильярдом вышеописанным образом. Тогда $q_k = J^{-1}\bar{x}_k$ – решение дискретной системы Гейзенберга.

Наоборот, если q_k – решение системы Гейзенберга, то последовательность $x_k = (-1)^k J q_{2k}$ является траекторией дискретного билиарда внутри эллипсоида.

Интегрирование дискретной XYZ -системы Гейзенберга. Обычный алгоритм алгебро-геометрического интегрирования заключается в следующем [30]. Сначала надо задать последовательность $L_k(\lambda)$ матричнозначных полиномов вместе с разложением на множители

$$L(\lambda) = B(\lambda)C(\lambda) \mapsto C(\lambda)B(\lambda) = B'(\lambda)C'(\lambda) = L'(\lambda)$$

так, чтобы динамика $L \mapsto L'$ соответствовала динамике системы q_k . Для каждой задачи такая система ищется индивидуально и требует от исследователя хорошей интуиции. Матрицы L_k подобны между собой и задают одну и ту же изоспектральную кривую

$$\Gamma: \det(L(\lambda) - \mu I) = 0.$$

Разложение $L_k = B_k C_k$ задает разложение спектра L_k . Обозначим через ψ_k соответствующие собственные векторы и будем рассматривать их как мероморфные функции на Γ . Обозначим соответствующие дивизоры полюсов через D_k .

Последовательность дивизоров линейна на якобиане изоспектральной кривой, и это позволяет восстановить собственные функции ψ_k , затем матрицы L_k и, наконец, последовательность (q_k) .

Теперь мы вкратце изложим процедуру интегрирования XYZ -системы этим методом. Детали можно найти в [30].

Уравнения дискретной XYZ -модели эквивалентны изоспектральной деформации:

$$L_{k+1}(\lambda) = A_k(\lambda)L_k(\lambda)A_k^{-1}(\lambda),$$

где

$$\begin{aligned} L_k(\lambda) &= J^2 + \lambda q_{k-1} \wedge J q_k - \lambda^2 q_{k-1} \otimes q_{k-1}, \\ A_k(\lambda) &= J - \lambda q_k \otimes q_{k-1}. \end{aligned}$$

Уравнение изоспектральной кривой $\Gamma: \det(L(\lambda) - \mu I) = 0$ может быть записано в следующем виде:

$$\nu^2 = \prod_{i=1}^{d-1} (\mu - \mu_i) \prod_{j=1}^d (\mu - J_j^2), \quad (2.5)$$

где $\nu = \lambda \prod_{i=1}^{d-1} (\mu - \mu_i)$, а $\mu_1, \dots, \mu_{d-1}$ – нули функции

$$\begin{aligned} \phi_\mu(x, Jy) &= \sum_{i=1}^d \frac{F_i(x, y)}{\mu - J_i^2}, \\ F_i &= x_i^2 + \sum_{j \neq i} \frac{(x \wedge Jy)_{ij}^2}{J_i^2 - J_j^2}, \quad x = q_{k-1}, \quad y = q_k. \end{aligned}$$

Можно доказать, что $\mu_1, \dots, \mu_{d-1}$ – параметры каустики, соответствующей билиардной траектории [52]. К этому же выводу можно прийти, если вычислить эти параметры явно, рассмотрев билиардную траекторию, начальный отрезок которой параллелен координатной оси.

Зная собственные векторы ψ_k матриц $L_k(\lambda)$, можно единственным образом определить элементы последовательности (q_k) . Пусть D_k – дивизор полюсов функции ψ_k на кривой Γ . Тогда [30]

$$D_{k+1} = D_k + P_\infty - P_0,$$

где P_∞ – точка, соответствующая значению $\mu = \infty$, а P_0 соответствует $\mu = 0$, $\lambda = (q_k, J^{-1}q_{k+1})^{-1}$.

2.2.2. Характеризация периодических билиардных траекторий. В следующих леммах устанавливается связь между периодическими билиардными последовательностями q_k и периодическими дивизорами D_k .

ЛЕММА 2.12 [24]. *Последовательность дивизоров D_k периодична с периодом n тогда и только тогда, когда либо последовательность q_k также периодична с периодом n , либо $q_{k+n} = -q_k$ для любого k .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если для всех k имеем $q_{k+n} = q_k$ или если $q_{k+n} = -q_k$ для всех k , то, очевидно, $L_{k+n} = L_k$. Так что последовательность собственных векторов ψ_k периодична с периодом n . Значит, последовательность дивизоров тоже периодична.

Теперь предположим, что $D_{k+n} = D_k$ для всех k и, следовательно, $\psi_{k+n} = c_k \psi_k$. Тогда

$$\psi_{k+1} = A_k(\lambda) \psi_k.$$

Пусть μ_1 и μ_2 – значения параметра μ , соответствующие $\lambda = 1$ на кривой Γ , и пусть

$$\Psi_k = (\psi_k(1, \mu_1), \psi_k(1, \mu_2)).$$

Из равенства $\psi_{k+1} = A_k(\lambda) \psi_k$ получаем, что $A_k(1) = \Psi_{k+1} \Psi_k^{-1}$. Следовательно,

$$A_k(1) = \frac{c_{k+1}}{c_k} A_{k+n}(1).$$

Из условия, что $\det A_k = \det A_{k+1}$ для всех k , имеем $c_k = c_{k+1}$. Значит, последовательность

$$A_k(1) = J - q_k \otimes q_{k-1}$$

n -периодическая. Отсюда видно, что

$$q_{k+n} = \alpha_k q_k, \quad q_{k+n-1} = \frac{1}{\alpha_k} q_{k-1}.$$

Поскольку $|q_k| = 1$, то выполнено $\alpha_k = 1$ или $\alpha_k = -1$, где все α_k равны между собой. Это доказывает нужное утверждение.

ЛЕММА 2.13 [24]. *Билиардная траектория периодична с периодом n с точностью до центральной симметрии тогда и только тогда, когда последовательность дивизоров D_k , сопоставленная соответствующей XYZ -системе Гейзенберга, периодическая с периодом $2n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_{k+n} = \alpha x_k$ для всех k и $\alpha \in \{-1, 1\}$. Для билиардной траектории (x_k, y_k) рассмотрим соответствующий поток $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$. Поскольку

$$(\bar{x}_{2k}, \bar{y}_{2k}) = (-1)^k (x_k, y_k), \quad (\bar{x}_{2k+1}, \bar{y}_{2k+1}) = \phi(\bar{x}_{2k}, \bar{y}_{2k}),$$

где ϕ – линейное отображение, мы видим, что

$$\bar{x}_{k+2n} = \alpha(-1)^n \bar{x}_k.$$

Отсюда непосредственно следует, что $q_{k+2n} = \alpha(-1)^n q_k$. По лемме 2.12 последовательность дивизоров D_k является $2n$ -периодической.

Используя эту лемму, докажем основной результат настоящего пункта.

ТЕОРЕМА 2.14 [25]. *Если билиардная траектория в эллипсоиде $\mathcal{Q}_0$ из $\mathbb{R}^d$ с невырожденными каустиками $\mathcal{Q}_{\mu_1}, \dots, \mathcal{Q}_{\mu_{d-1}}$ периодична с точностью до центральной симметрии, с периодом $n \geq d$, то выполнено следующее условие:*

$$\text{rank} \begin{pmatrix} B_{n+1} & B_n & \dots & B_{d+1} \\ B_{n+2} & B_{n+1} & \dots & B_{d+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{2n-1} & B_{2n-2} & \dots & B_{n+d-1} \end{pmatrix} < n - d + 1,$$

где

$$\sqrt{(x - \mu_1) \cdots (x - \mu_{d-1})(x - a_1) \cdots (x - a_d)} = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.13 траектория будет периодической с периодом n , если соответствующая последовательность дивизоров Γ имеет период $2n$, т. е. $2n(P_\infty - P_0) = 0$ на якобиане $\mathcal{J}(\Gamma)$. Кривая Γ гиперэллиптическая, рода $g = d - 1$. Взяв $\mathcal{A}(P_\infty)$ равным нулю на $\mathcal{J}(\Gamma)$, получаем требуемое.

Случай сингулярной изоспектральной кривой. В случае, когда все $a_1, \dots, a_d, \mu_1, \dots, \mu_{d-1}$ различны, у изоспектральной кривой нет особенностей в аффинной части. Однако особенности возникают в следующих трех случаях (и при их сочетании).

- (i) $a_i = \mu_j$ для некоторых i и j . Изоспектральная кривая (2.5) распадается на рациональную и гиперэллиптическую. Геометрически это означает, что каустика, соответствующая μ_i , вырождается в гиперплоскость $x_i = 0$. Билиардная траектория будет стремиться к этой плоскости асимптотически (и, значит, не может быть периодической) или лежит целиком в указанной гиперплоскости. Таким образом, замкнутые траектории возникают при условии, что они лежат в координатной гиперплоскости. Такие движения можно рассматривать как случай размерности $d - 1$.
- (ii) $a_i = a_j$ при некотором $i \neq j$. Граница $\mathcal{Q}_0$ симметрична.
- (iii) $\mu_i = \mu_j$ при некотором $i \neq j$. Билиардная траектория лежит на соответствующей софокусной квадратичной гиперповерхности.

В случаях (ii) и (iii) изоспектральная кривая Γ является гиперэллиптической кривой с особенностями. При всем различии геометрической природы, в обоих этих случаях нужно провести один и тот же анализ условия $2nP_0 \sim 2nP_\infty$ для сингулярной кривой (2.5).

Используя нормализацию как в [29], можно показать, что теорема 2.14 применима не только в случае гладкой изоспектральной кривой, но и в случаях (ii) и (iii). Таким образом, имеет место следующее интересное свойство.

ТЕОРЕМА 2.15. *Если бильiardная траектория в эллипсоиде из d -мерного евклидова пространства периодическая с периодом $n < d$ с точностью до центральной симметрии, то она лежит на одной из n -мерных плоскостей симметрии эллипсоида.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это непосредственно вытекает из теоремы 2.14 и того факта, что при пересечении софокусного семейства квадрик с координатной гиперплоскостью снова получается софокусное семейство.

Заметим, что все траектории, имеющие период n с точностью до центральной симметрии, становятся замкнутыми после $2n$ отражений. Более точный результат, чем теорема 2.15, можно элементарно доказать для траекторий, становящихся замкнутыми после n отскоков, где $n \leq d$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.16. *Если бильiardная траектория в эллипсоиде из d -мерного евклидова пространства периодична с периодом $n \leq d$, то она лежит на одной из $(n - 1)$ -мерных плоскостей симметрии эллипсоида.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай $n = d$. Пусть $x_1 \dots x_d$ – периодическая траектория, а $(N, x) = \alpha$ – уравнение гиперплоскости, проходящей через ее вершины (здесь N – нормальный вектор к гиперплоскости, а α – константа). Поскольку все нормали к поверхности эллипсоида в точках отражения лежат в этой гиперплоскости, имеем $(AN, x_i) = (N, Ax_i) = 0$. Итак, $(AN, x) = 0$ – тоже уравнение этой гиперплоскости, значит, $\alpha = 0$ и векторы N и AN коллинеарны. Это немедленно приводит к требуемому результату.

Случай $n < d$ можно доказать аналогично или используя теорему 2.15 и предыдущий случай $n = d$.

В случае $d = 3$ это свойство наглядно видно.

ПРИМЕР 2.17. Рассмотрим движение бильiardного шара в эллипсоиде из трехмерного пространства с $\mu_1 = \mu_2$, когда отрезки траектории лежат на образующих соответствующего однополостного гиперболоида, софокусного с эллипсоидом. Если бы существовала периодическая траектория с периодом $n = d = 3$, то три точки отскока лежали бы в одной плоскости и пересечение этой плоскости с квадрикой состояло бы из трех прямых, что невозможно. Очевидно, любая периодическая траектория с периодом $n = 2$ проходит по одной из осей эллипсоида. Таким образом, не существует траекторий, лежащих на софокусной квадрике и имеющих период не больше 3.

2.3. Теорема Понселе и условие Кэли в пространстве Лобачевского. А. П. Веселов [31] доказал интегрируемость бильiardной системы в эллипсоиде из пространства Лобачевского. Он показал, что движения в такой системе соответствуют определенным сдвигам якобиана некоторой гиперэллиптической кривой, и привел явные формулы движения в терминах эта-функций. Самая первая по времени найденная нами ссылка на теорему Понселе в пространстве Лобачевского – это [53].

Цель этого пункта – представить аналог теорем Понселе и Кэли для движений бильiardного шара в эллипсоиде из пространства Лобачевского [32].

2.3.1. *Интегрирование движения билиардного шара в пространстве Лобачевского.* Для краткого изложения результатов Веселова по билиардам в пространстве Лобачевского [31] рассмотрим $(d+1)$ -мерное пространство Минковского $V = \mathbb{R}^{d,1}$ с симметричной билинейной формой

$$\langle \xi, \eta \rangle = -\xi_0 \eta_0 + \xi_1 \eta_1 + \dots + \xi_d \eta_d.$$

Полость гиперboloида $\langle \xi, \xi \rangle = -1$ с индуцированной метрикой является моделью d -мерного пространства Лобачевского $\mathbb{H}^d$. Эллипсоид Γ в таком пространстве задается уравнением

$$\mathcal{E} = \left\{ \xi \in \mathbb{H}^d : -\frac{\xi_0^2}{a_0} + \frac{\xi_1^2}{a_1} + \dots + \frac{\xi_d^2}{a_d} = 0 \right\}, \quad (2.6)$$

где $a_0 > a_1 \geq \dots \geq a_d > 0$.

Все отрезки билиардной траектории в этом эллипсоиде касаются (считая кратности) $d-1$ софокусной квадратичной поверхности, соответствующей данной траектории ([31; теорема 3]). Пусть μ_i , $i = 1, \dots, d-1$, – параметры, для которых уравнения этих каустик имеют вид

$$-\frac{x_0^2}{a_0 - \mu_i} + \frac{x_1^2}{a_1 - \mu_i} + \dots + \frac{x_d^2}{a_d - \mu_i} = 0 \quad (1 \leq i \leq d-1). \quad (2.7)$$

Тогда точки отражения от границы $\mathcal{E}$ соответствуют сдвигу $D_{k+1} = D_k + Q_- - Q_+$ на якобиане изоспектральной кривой

$$\Gamma : (\mu - a_0) \cdots (\mu - a_d) = c\lambda^2(\mu - \mu_1) \cdots (\mu - \mu_{d-1}), \quad (2.8)$$

где c – константа, а Q_+, Q_- – точки на Γ , лежащие над $\mu = 0$ (см. теорему 2 в [31]; кривая Γ – это изоспектральная кривая рассматриваемой там пары $L-A$).

Заметим, что в [31] рассмотрен только случай гладкой (гиперэллиптической) кривой Γ , однако приведенные там рассуждения годятся и для сингулярного случая.

2.3.2. *Теорема Понселе и условия типа Кэли.* Пусть задана периодическая билиардная траектория в эллипсоиде $\mathcal{E}$ из пространства Лобачевского. У всех траекторий с теми же каустиками одна и та же изоспектральная кривая. Если период данной траектории равен n , то $n(Q_+ - Q_-) = 0$ на $\mathcal{J}(\Gamma)$, и наоборот. Итак, все такие траектории замыкаются после n отскоков. Таким образом, из результатов Веселова мы можем получить следующую теорему типа Понселе для билиарда в пространстве Лобачевского.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.18 [32]. *Пусть дана периодическая билиардная траектория в эллипсоиде из пространств Лобачевского. Тогда всякая билиардная траектория с теми же каустиками тоже является периодической и имеет тот же период.*

Аналитическое условие для периодичности билиардной траектории, будь у нее особая или неособая изоспектральная кривая, формулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА 2.19 [32]. *Условие того, что билиардная траектория в эллипсоиде (2.6) в d -мерном пространстве Лобачевского, имеющая невырожденные каустики (2.7), периодична с точностью до центральной симметрии с периодом $n \geq d$, имеет вид*

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B_{n+1} & B_n & \dots & B_{d+1} \\ B_{n+2} & B_{n+1} & \dots & B_{d+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{2n-1} & B_{2n-2} & \dots & B_{n+d-1} \end{bmatrix} < n - d + 1,$$

где $\sqrt{(x - a_0) \dots (x - a_d)(x - \mu_1) \dots (x - \mu_{d-1})} = B_0 + B_1x + B_2x^2 + \dots$. Такая траектория не может иметь период меньше d .

Случай особой изоспектральной кривой может быть разобран так же, как в евклидовом пространстве (см. предыдущий пункт). Таким образом, в пространстве Лобачевского выполнен полный аналог теоремы 2.15:

ТЕОРЕМА 2.20 [32]. *Если билиардная траектория в эллипсоиде из d -мерного пространства Лобачевского периодична с периодом $n < d$ с точностью до центральной симметрии, то она лежит на одной из n -мерных плоскостей симметрии эллипсоида.*

В заключение пункта интересно отметить, что условия типа Кэли, полученные в случае пространства Лобачевского, имеют в точности тот же вид, что и для билиарда в евклидовом пространстве. Это удивительное совпадение объясняется траекторной эквивалентностью эллиптических билиардов в этих геометриях [32].

Следует отметить, что аналоги теоремы Понселе существуют и в других геометриях. На поверхностях Лиувилля такой аналог сформулирован и доказан Дарбу [44] (см. также [5] для интересного случая, относящегося к сферической геометрии). Теорема Понселе для эллиптических билиардов на квадраках доказана в [54], а в финслеровой плоскости – в [49], [50].

2.4. Топологические свойства эллиптического билиарда. Предметом этого пункта является топологическое описание эллиптических билиардов с использованием графов Фоменко [33]. Подробное изложение этого способа топологической классификации интегрируемых систем можно найти в [55]–[57] и в ссылках, приведенных в этих работах, в то время как здесь мы дадим краткое изложение для неосведомленного читателя. Хотя эллиптические билиарды на плоскости хорошо изучены, мы увидим, что такое описание позволит по-новому взглянуть на их свойства; в частности, отметим появление неориентируемой периодической траектории, идущей вдоль оси симметрии границы билиардного стола, в предложении 2.23 (см. рис. 9).

В книге [55] можно найти большое количество графов Фоменко для таких известных интегрируемых систем, как интегрируемые случаи движений твердого тела и интегрируемые геодезические потоки на поверхностях. В настоящей статье мы приводим дополнительные примеры такого рода. Еще некоторые примеры, связанные с почти интегрируемой динамикой, можно найти в [58], а бифуркации слоений Лиувилля для некоторого класса интегрируемых систем с двумя степенями свободы были классифицированы с использованием графов Фоменко в [59].

Заметим, что топологические свойства эллиптических билиардов, рассматриваемых как дискретные динамические системы, недавно были изучены в [60]. Однако здесь мы трактуем билиарды как системы с непрерывным временем, что позволяет нам использовать аппарат, разработанный Фоменко и его школой.

2.4.1. Изоэнергетические поверхности билиардных систем. Напомним, что мы считаем, что $\mathcal{M}^n$ есть n -мерное риманово многообразие, а $\Omega \subset \mathcal{M}$ – область с границей, составленной из нескольких гладких гиперповерхностей. Как уже было сказано вслед за [1], билиард в Ω – это динамическая система, в которой единичная точечная масса свободно движется внутри области и следует закону отражения на ее границе: углы падения и отражения с касательным пространством к границе во всякой точке удара равны по величине. Также предполагается, что отражения совершенно упругие.

Важно отметить, что при изменении общей энергии системы изменится только величина вектора скорости точки, в то время как траектории на всех энергетических уровнях одни и те же. Вот почему для полного анализа билиардной системы можно зафиксировать скорость и исследовать один-единственный уровень энергии.

Изоэнергетическое пространство билиардной системы в Ω имеет вид

$$\mathcal{B} = \{(x, v) : x \in \Omega, v \in T_x \mathcal{M}, |v| = 1\} / \sim, \\ (x, u) \sim (x, v) \iff x \in \partial\Omega \text{ и } u - v \perp T_x \partial\Omega.$$

Хотя движение билиардного шара перестает быть гладким на границе, заметим, что, как ни удивительно, если граница билиардного стола гладкая, то изоэнергетическая поверхность гладкая. Более того, это многообразие будет гладким и тогда, когда граница состоит из нескольких гладких частей, при условии, что закон отражения можно непрерывно определить в угловых точках. Так и будет в наших примерах, где граница будет лежать на нескольких софокусных кониках, поскольку такие коники взаимно ортогональны. Итак, в точках пересечения поверхностей отражение задается следующим образом: после отражения от негладкой точки границы вектор скорости v меняется на $-v$.

2.4.2. Плоские эллиптические билиарды. Важным примером интегрируемой билиардной системы является билиард внутри эллипса в $\mathbb{E}^2$. Эта система интегрируема в силу замечательного элементарного наблюдения: все отрезки траектории касаются одного и того же конического сечения, софокусного с границей [22], [17]. Более того, у всякого интегрируемого билиарда в плоской области граница должна быть составлена из кусков нескольких софокусных конических сечений [61].

Здесь мы опишем топологию плоских билиардов с эллиптической границей. Для представления изоэнергетических поверхностей мы используем графы Фоменко [56].

Пусть эллипс на плоскости задан уравнением

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1, \quad a > b > 0.$$

Семейство конических сечений, софокусных с $\mathcal{E}$, имеет вид

$$C_\mu: \frac{x^2}{a-\mu} + \frac{y^2}{b-\mu} = 1, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Мы рассмотрим билиардную систему в ограниченной области Ω в $\mathbb{E}^2$ с границей, состоящей из дуг нескольких софокусных конических сечений. Как и во введении, обозначим изоэнергетическую поверхность системы через $\mathcal{B}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.21. *Изоэнергетическая поверхность, соответствующая билиардной системе внутри эллипса в $\mathbb{E}^2$, представляется графом Фоменко на рис. 6.*

*Функции вращения, соответствующие ребрам графа, монотонны. Их пределы на нижних ребрах равны ∞ при стремлении к **A**-атому и 2 при стремлении к **B**-атому; на верхнем ребре предел равен ∞ при стремлении к **A**-атому и 1 при стремлении к **B**-атому.*

Рис. 6. Граф Фоменко, соответствующий билиарду внутри эллипса

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Изоэнергетическая поверхность $\mathcal{B}$ является полноторием с отношением эквивалентности $\sim$ на границе, при котором точки попарно идентифицируются. При этом точки двух кривых, представляющих потоки в положительном и отрицательном направлении вдоль границы билиардного стола, не склеиваются с другими точками. Полноторие с этими двумя кривыми на границе изображено на рис. 7. Две эти кривые соответствуют предельному потоку с каустикой $C_0 = \mathcal{E}$; они представляются **A**-атомами в нижней части графа. При значениях параметра $0 < \mu < b$, т. е. когда каустика – эллипс, мы получаем два лиувиллевых тора для всякого значения μ – по одному на каждое направление вращения.

Опишем теперь множество уровня $\mu = b$. Оно содержит в точности те билиардные траектории, которые проходят через фокусы эллипса. Одна из этих траекторий периодическая – это движение вдоль оси x , а у остальных есть хорошо известное свойство: их отрезки попеременно проходят через левый и правый фокусы эллипса. Эти траектории естественным образом разбиваются на два класса: один класс состоит из траекторий, по которым билиардный шар движется вверх через левый фокус и вниз через правый, а для траекторий из второго класса движение происходит наоборот. Обозначим эти классы через $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ соответственно. Траектории из этих классов гомоклинически приближаются к оси x , так что $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ – сепаратрисы. Заметим, что периодическая траектория ориентируема, так что рассматриваемое множество уровня соответствует $\mathbf{B}_\Delta$ атому.

Рис. 7. Изоэнергетическая поверхность для билиардной системы в эллипсе

Заметим, что $\mathcal{S}_1$ (соответственно $\mathcal{S}_2$) – предельное множество семейства лиувиллевых торов, соответствующих движению с эллиптической каустикой в направлении по часовой стрелке (соответственно против часовой стрелки).

При $b < \mu < a$, т.е. когда каустика – гипербола, каждому значению параметра соответствует единственный тор. Наконец, при $\mu = a$ происходит периодическое движение вдоль оси y ; оно изображается $\mathbf{A}_{\bar{\Delta}}$ атомом сверху.

Аналогичным образом доказывается следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.22. *Изоэнергетическая поверхность, соответствующая билиардной системе в области, ограниченной двумя софокусными эллипсами в $\mathbb{E}^2$, представляется графом Фоменко, изображенным на рис. 8.*

Рис. 8. Билиард в области, ограниченной софокусными эллипсами, и соответствующий граф Фоменко

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в предложении 2.21, $\mathbf{A}_{\bar{\Delta}}$ атомы в нижней части соответствуют предельным потокам на границе внешнего эллипса.

Множество уровня, отвечающее $\mu = b$, содержит две периодические траектории, лежащие на оси x , и все траектории, для которых прямые, содержащие отрезки траекторий, проходят через фокусы. Заметим, что такая траектория – гетероклиническая и целиком содержится в одной из полуплоскостей, с границей на оси x . Таким образом, в этом множестве уровня четыре сепаратрисы: по две в верхней и нижней полуплоскостях. В каждой полуплоскости одна сепаратриса содержит траектории, приближающиеся к левой периодической траектории на оси абсцисс, когда время возрастает до ∞ , и к аналогичной правой траектории, когда время убывает до $-\infty$; для траекторий из другой сепаратрисы все происходит наоборот. Лиувиллевы торы, соответствующие

эллиптическим каустикам, при $\mu \rightarrow b$ сходятся к двум сепаратрисам с тем же направлением движения – по или против часовой стрелки.

В случае гиперболических каустик бильярдный стол разбивается на две области, симметричные относительно оси абсцисс. Каждое из семейств лиувиллевых торов сходятся к двум сепаратрисам уровня $\mu = b$, лежащим в той же полуплоскости.

Этот анализ показывает, что множество уровня $\mu = b$ описывается атомом $\mathbb{C}_2$.

Атомы **A** в верхней части графа соответствуют периодическим орбитам, проходящим по оси ординат.

Рассмотрим теперь область, ограниченную эллипсом и софокусной гиперболой. Заметим, что когда граница области является гладкой не во всех точках, фазовое пространство следует описывать особенно тщательно. Поскольку софокусные конические сечения ортогональны друг другу в точках пересечения, периодические потоки вдоль гладких дуг могут быть пределами бильярдных движений при стремлении каустики к коническому сечению, содержащему эту дугу. Хотя касательное пространство к границе в точках пересечения не определено, мы будем считать, что “разрешенные” векторы скорости в этих точках касаются кривых, содержащих эти точки, идентифицируя противоположные векторы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.23. *Рассмотрим бильярдную область, граница которой образована эллипсом и софокусной гиперболой. Тогда:*

- 1) *если эта область лежит внутри одной из “полостей” гиперболы, то изоэнергетическая поверхность представлена графом на рис. 9.*
- 2) *Если область лежит между ветвями гиперболы, то изоэнергетическая поверхность представляется графом на рис. 10.*

Рис. 9. Бильярд в области между эллипсом и одной из ветвей гиперболы и соответствующий граф Фоменко

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В первом случае каждый из атомов **A** соответствует предельной периодической орбите, проходящей по одной из гладких дуг, составляющих границу бильярдной области. Атом **A*** представляет периодическую орбиту, проходящую вдоль оси x , и ее гомоклинические траектории.

Во втором случае атомы **A** внизу графа соответствуют предельному движению вдоль (двух) дуг эллипса, атом **B** соответствует периодической орбите,

Рис. 10. Биллиард в области между эллипсом и ветвями гиперболы и соответствующий граф Фоменко

проходящей вдоль оси x , и ее гомоклиническим траекториям, а атом **A** в верхней части соответствует периодической орбите, проходящей по оси y . Любопытно отметить, что эта система эквивалентна по Лиувиллю биллиарду внутри эллипса (ср. рис. 6 и 10).

Чтобы понять, как возникают бифуркации изоэнергетических поверхностей, проанализируем пример, в котором граница биллиардного стола непрерывно меняется.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.24. Рассмотрим биллиардную область, ограниченную двумя софокусными эллипсами и дугами разных ветвей софокусной гиперболы.

- 1) Если область лежит между ветвями гиперболы, то изоэнергетическая поверхность представляется графом на рис. 11.
- 2) Если ось абсцисс является частью границы, то изоэнергетическая поверхность представляется графом на рис. 12. (Отметим, что **V** соответствует вырожденному особому листу, содержащему две ориентируемые периодические траектории и две гетероклинические сепаратрисы.)
- 3) Если область соответствует изображению на рис. 13 слева, то изоэнергетическая поверхность представляется графом на рис. 13 справа.

Рис. 11. Биллиардное движение между двумя эллипсами и гиперболой и соответствующий граф Фоменко

ЗАМЕЧАНИЕ 2.25. Почти интегрируемые бифуркации биллиардов из предложений 2.23 и 2.24 можно анализировать, используя методы работы [62].

Рис. 12. Биллиардное движение между двумя эллипсами и вырожденной гиперболой и соответствующий граф Фоменко

Рис. 13. Биллиардное движение в области между двумя эллипсами и гиперболой и соответствующий граф Фоменко

2.4.3. Биллиарды на эллипсоидах и поверхности Лиувилля. В этом пункте мы проанализируем топологию биллиардного движения на эллипсоиде из $\mathbb{E}^3$, с границей, высеченной софокусной квадрикой. Затем будут рассмотрены биллиарды внутри обобщенных эллипсов на поверхностях Лиувилля. Мы сравним результаты с полученными в п. 2.4.2.

Топология движений по геодезическим на эллипсоиде из $\mathbb{E}^3$. Поскольку отрезки биллиардных траекторий на эллипсоиде лежат на геодезических, имеет смысл рассмотреть топологию изоэнергетических поверхностей для геодезического движения на эллипсоиде. Она полностью описана в [63].

Пусть эллипсоид в $\mathbb{E}^3$ задан уравнением

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1, \quad 0 < c < b < a. \quad (2.9)$$

ТЕОРЕМА 2.26 [63], [55]. *Граф Фоменко для задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде представлен на рис. 14.*

Функции вращения, соответствующие нижним и верхним ребрам графа, имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_{\text{lower}}(\alpha) &= \left(\int_c^\alpha \Phi(\lambda, \alpha) d\lambda \right)^{-1} \int_b^a \Phi(\lambda, \alpha) d\lambda & (\alpha \in (c, b)), \\ \rho_{\text{upper}}(\alpha) &= \left(\int_c^b \Phi(\lambda, \alpha) d\lambda \right)^{-1} \int_\alpha^a \Phi(\lambda, \alpha) d\lambda & (\alpha \in (b, a)), \end{aligned}$$

соответственно, где

$$\Phi(\lambda, \alpha) = \frac{\lambda}{\sqrt{-\lambda(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)(\alpha-\lambda)}}.$$

Интересно отметить, что этот результат используется в доказательстве того факта, что задача Якоби о геодезических на эллипсоиде и случай Эйлера движения твердого тела траекторно эквивалентны (см. [63], [55]).

Рис. 14. Граф Фоменко задачи Якоби

Биллиард на эллипсоиде в $\mathbb{E}^3$. Обобщенный эллипс на эллипсоиде (2.9) – это пересечение эллипсоида с софокусным гиперboloидом. Заметим, что подобное пересечение состоит из двух непересекающихся замкнутых кривых, являющихся линиями кривизны эллипсоида. Эти кривые пересечения разбивают поверхность эллипсоида на три области: две конгруэнтные односвязные и третью, лежащую между ними и не являющуюся односвязной.

Точнее говоря, всякая поверхность, софокусная с эллипсоидом (2.9), задается уравнением вида (см. рис. 15):

$$\mathcal{Q}_\lambda: Q_\lambda = \frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} = 1. \quad (2.10)$$

Предположим, что координаты Якоби $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, связанные с этой системой софокусных поверхностей второго порядка, упорядочены условием $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$.

Тогда однополостный гиперboloид $\mathcal{Q}_\beta$ ($c < \beta < b$) вырезает на поверхности $\mathcal{E}$ следующие три области: $\Omega_1^\beta = \{\lambda_2 > \beta, z > 0\}$, $\Omega_2^\beta = \{\lambda_2 > \beta, z < 0\}$ и $\Omega_3^\beta = \{\lambda_2 < \beta\}$. Первые две из них симметричны относительно плоскости xy , а третья является кольцом, расположенным между ними на $\mathcal{E}$, как показано на рис. 16.

Аналогичным образом, двуполостный гиперboloид $\mathcal{Q}_\gamma$ ($b < \gamma < a$) задает области $\Omega_1^\gamma = \{\lambda_1 < \gamma, x > 0\}$, $\Omega_2^\gamma = \{\lambda_1 < \gamma, x < 0\}$ и $\Omega_3^\gamma = \{\lambda_1 > \gamma\}$, см. рис. 17.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.27. *Изоэнергетические поверхности, соответствующие биллиардным системам в областях Ω_1^β и Ω_1^γ на $\mathcal{E}$, представляются графом Фоменко на рис. 6.*

Рис. 15. Софокусные квадррики

Рис. 16. Пересечение эллипсоида и однополостного гиперболоида

Рис. 17. Пересечение эллипсоида и двуполостного гиперболоида

Функции вращения для нижних и верхних ребер графа в случае бильярда в Ω_1^β суть

$$\begin{aligned}\rho_{\text{lower}}^\beta(\alpha) &= \left(\int_\beta^\alpha \Phi(\lambda, \alpha) \right)^{-1} \int_b^a \Phi(\lambda, \alpha) \quad (\alpha \in (\beta, b)), \\ \rho_{\text{upper}}^\beta(\alpha) &= \left(\int_\beta^b \Phi(\lambda, \alpha) \right)^{-1} \int_\alpha^a \Phi(\lambda, \alpha) \quad (\alpha \in (b, a)),\end{aligned}$$

А функции вращения для нижних и верхних ребер графа в случае бильярда в Ω_1^γ суть

$$\begin{aligned}\rho_{\text{lower}}^\gamma(\alpha) &= \left(\int_\alpha^\gamma \Phi(\lambda, \alpha) \right)^{-1} \int_c^b \Phi(\lambda, \alpha) \quad (\alpha \in (b, \gamma)), \\ \rho_{\text{upper}}^\gamma(\alpha) &= \left(\int_b^\gamma \Phi(\lambda, \alpha) \right) \int_c^\alpha \Phi(\lambda, \alpha) \quad (\alpha \in (c, b))\end{aligned}$$

(Φ определена в теореме 2.26).

2.4.4. Биллиард внутри эллипса на поверхности Лиувилля.

ТЕОРЕМА 2.28. *Все биллиардные системы внутри эллипса на произвольной поверхности Лиувилля эквивалентны по Лиувиллю. Граф Фоменко, соответствующий изоэнергетическим поверхностям такой системы, представлен на рис. 6.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Семейства софокусных эллипсов и гипербол, а также соответствующие биллиардные системы в этом случае были определены и описаны Дарбу [44] (см. недавнее изложение этих вопросов в [29], [39]). Поскольку все топологические свойства таких биллиардов аналогичны свойствам биллиардов внутри эллипса в евклидовой плоскости, мы приходим к утверждению теоремы.

2.4.5. Биллиарды внутри эллипсоидов в $\mathbb{E}^3$. Теперь мы проанализируем топологию биллиардных движений внутри эллипсоида в $\mathbb{E}^3$. Будем считать, что уравнение эллипсоида имеет вид (2.9).

У всякой траектории биллиардного шара в $\mathcal{E}$ ровно две каустики, принадлежащие софокусному семейству $\mathcal{Q}_\lambda$. Пусть $\mathcal{Q}_{\lambda_1}$ и $\mathcal{Q}_{\lambda_2}$, $\lambda_2 \leq \lambda_1$, — эти поверхности. Тогда бифуркационное множество изоэнергетической поверхности системы изображено на рис. 18.

Рис. 18. Бифуркационное множество для биллиарда внутри эллипсоида в $\mathbb{E}^3$

Бифуркации торов Лиувилля для этой системы были исследованы в [41], [64], [65].

Разъясним подробно, как биллиардные движения соотносятся с диаграммой на рис. 18.

Над каждой точкой области, выделенной серым цветом, на диаграмме “висит” один или два трехмерных лиувиллевых тора. Отмеченные ребра соответствуют вырожденным множествам уровня.

Теперь детально опишем множества уровня над различными точками бифуркационного множества на рис. 18.

Гладкие листы. Над каждой внутренней точкой прямоугольников $[c, b] \times [0, c]$, $[b, a] \times [0, c]$ и треугольника с вершинами (c, c) , (b, c) , (b, b) расположены два лиувиллевых тора $\mathbb{T}^3$. Над каждой внутренней точкой прямоугольника $[b, a] \times [c, b]$ “висит” ровно один тор $\mathbb{T}^3$.

- (а) Точки внутри $[c, b] \times [0, c]$ соответствуют движению, каустики которого – эллипсоид и однополостный гиперболоид. Один из лиувиллевых торов образован траекториями, обходящими ось z в положительном направлении, а второй – траекториями, обходящими ее в отрицательном направлении.
- (б) Точки внутри $[b, a] \times [0, c]$ соответствуют случаю, когда одна из каустик – эллипсоид, а вторая – двуполостный гиперболоид. Каждый из лиувиллевых торов образован траекториями, обходящими ось x в одном и том же направлении.
- (с) Внутренние точки треугольника $(c, c) - (b, c) - (b, b)$ соответствуют движению, каустики которого – различные однополостные гиперболоиды. Каждый из лиувиллевых торов образован траекториями, обходящими ось x в одном и том же направлении.
- (д) Точки внутри прямоугольника $[b, a] \times [c, b]$ соответствуют случаю, когда обе каустики – гиперболоиды, но разных типов. Все соответствующие билиардные траектории образуют один лиувиллев тор.

Сингулярные листы. Сингулярные листы лежат над ребрами диаграммы, представленной на рис. 18. Они возникают, когда хотя бы одна из каустик вырождена.

Поясним сначала, что такое вырожденная квадрика из софокусного семейства (2.10), а также геометрический смысл билиардного движения с такой каустикой.

Вырожденные квадрики $\mathcal{Q}_\lambda$, $\lambda \in \{a, b, c\}$, – это следующие кривые, лежащие в координатных плоскостях:

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_a : \quad & -\frac{y^2}{a-b} - \frac{z^2}{a-c} = 1, \quad x = 0, \\ \mathcal{Q}_b : \quad & \frac{x^2}{a-b} - \frac{z^2}{b-c} = 1, \quad y = 0, \\ \mathcal{Q}_c : \quad & \frac{x^2}{a-c} + \frac{y^2}{b-c} = 1, \quad z = 0.\end{aligned}$$

Заметим, что $\mathcal{Q}_c$ – эллипс в плоскости xy , $\mathcal{Q}_b$ – гипербола в плоскости xz , а $\mathcal{Q}_a$ – в вещественном случае пустое множество. Однако мы будем трактовать $\mathcal{Q}_a$ как абстрактную кривую в плоскости yz . Вырожденные квадрики изображены на рис. 19. Если у билиардного движения имеется одна из этих вырожденных каустик $\mathcal{Q}_\lambda$, то либо каждый отрезок траектории пересекает кривую $\mathcal{Q}_\lambda$, либо траектория целиком лежит в координатной плоскости, содержащей эту кривую. В последнем случае движение сводится к плоскому билиарду внутри одного из эллипсов

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_a : \quad & \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1, \quad x = 0, \\ \mathcal{E}_b : \quad & \frac{x^2}{a} + \frac{z^2}{c} = 1, \quad y = 0, \\ \mathcal{E}_c : \quad & \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1, \quad z = 0.\end{aligned}$$

Заметим, что при $\lambda = a$ имеются только плоские траектории.

Каждый из этих трех эллипсов является пересечением $\mathcal{E}$ с одной из координатных гиперплоскостей (см. рис. 20).

Рис. 19. Эллипсоид $\mathcal{E}$ и вырожденные квадрики $\mathcal{Q}_b, \mathcal{Q}_c$

Рис. 20. Эллипсоид $\mathcal{E}$ и эллипсы $\mathcal{E}_a, \mathcal{E}_b, \mathcal{E}_c$

Помимо этих случаев вырожденных каустик, имеется еще один особый случай: одна из каустик совпадает с граничным эллипсоидом $\mathcal{E}$. Его можно рассматривать как предельный случай каустик $\mathcal{Q}_\lambda$, $\lambda \rightarrow 0_+$, а соответствующие траектории – геодезические на $\mathcal{E}$.

Теперь анализируем ребра бифуркационной диаграммы на рис. 18.

Ребро $[c, a] \times \{0\}$. Как уже упоминалось, движение, соответствующее этому ребру, – геодезическое движение на $\mathcal{E}$. Таким образом, топология соответствующего подмножества изоэнергетической поверхности полностью описывается графом Фоменко на рис. 14.

Охарактеризуем этот случай:

- Точка $(c, 0)$ соответствует движению вдоль кривой $\mathcal{E}_c$. Два одномерных тора $\mathbb{T}^1$ лежат над точкой $(c, 0)$ бифуркационной диаграммы; каждый из них соответствует одному из возможных направлений потока.
- Внутренние точки отрезка $[c, b]$ на оси λ_1 соответствуют геодезическому движению на $\mathcal{E}$ с каустикой – однополостным гиперboloидом. Такие геодезические заполняют кольцо между двумя кривыми в пересечении $\mathcal{E}$ с гиперboloидом. Над каждой внутренней точкой отрезка висят два тора $\mathbb{T}^2$, соответствующие фиксированному направлению вращения вокруг оси z .
- Множество уровня, соответствующее $(b, 0)$, содержит две периодические траектории и четыре двумерные сепаратрисы. Периодические траектории проходят по кривой $\mathcal{E}_b$. Траектории на сепаратрисах проходят через омбилические точки эллипсоида.
- Внутренние точки отрезка $[b, a]$ оси λ_1 соответствуют геодезическому движению по $\mathcal{E}$ с каустикой – двуполостным гиперboloидом. Эти геодезические заполняют кольцо между двумя кривыми в пересечении $\mathcal{E}$ с гиперboloидом. Над каждой внутренней точкой отрезка висят два тора $\mathbb{T}^2$, каждый из которых соответствует некоторому направлению обхода оси x .
- Точка $(a, 0)$ соответствует движению вдоль $\mathcal{E}_a$. Над этой точкой находятся два одномерных тора $\mathbb{T}^1$; каждый из них соответствует одному из направлений движения.

Ребро $\{a\} \times [0, b]$. Это ребро соответствует билиардному движению с вырожденной каустикой $\mathcal{Q}_a$. Все траектории этого движения лежат в плоскости yz , так что на самом деле это ребро соответствует билиарду в эллипсе. Топология множества, висящего над ребром, полностью описывается атомом Фоменко на рис. 6.

Ребро $[b, a] \times \{b\}$. Это ребро соответствует билиардному движению с одной вырожденной каустикой $\mathcal{Q}_b$, в то время как вторая каустика – двуполостный гиперболоид.

2.5. Интегрируемые возмущения потенциалом для эллиптического билиарда. В этом пункте мы изложим результаты по интегрируемым возмущениям потенциалом билиардной системы в эллипсе. Анализ билиардов с квадратичным потенциалом в эллипсоидах был проведен в [37].

Уравнение (см. [38]):

$$\lambda V_{xy} + 3(yV_x - xV_y) + (y^2 - x^2)V_{xy} + xy(V_{xx} - V_{yy}) = 0 \quad (2.11)$$

– частный случай уравнения Бертрона–Дарбу [66]–[68], описывающего необходимое и достаточное условие того, что в натуральной механической системе с двумя степенями свободы

$$H = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) + V(x, y)$$

переменные разделяются в эллиптических переменных или в некоторых координатах, являющихся вырожденным случаем эллиптических.

Решения уравнения (2.11) в виде полиномов Лорана по x, y описаны в [34]. В [36] такие решения были естественным образом связаны с гипергеометрическими функциями Аппеля. Эта связь автоматически приводит к более широкому классу решений уравнения (2.11): новые потенциалы получаются при нецелых значениях параметров, что дает огромное семейство интегрируемых билиардов с потенциалом внутри эллипса. Аналогичные формулы для возмущений потенциалом можно дать и в случае задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде [34], [35]. Они указывают на связь между разделяющимися переменными в классических системах с одной стороны и теорией гипергеометрических функций с другой, однако эта связь до сих пор не очень понятна. Основными ссылками по функциям Аппеля являются работы [69]–[71].

Функция F_4 – это одна из четырех гипергеометрических функций двух переменных, введенных Аппелем (см. [69], [70]):

$$F_4(a, b, c, d; x, y) = \sum \frac{(a)_{m+n}(b)_{m+n}}{(c)_m(d)_n} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!}, \quad (2.12)$$

где $(a)_n$ – обычный символ Похгаммера:

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1) \cdots (a+n-1), \quad (a)_0 = 1.$$

(Например, $m! = (1)_m$.)

Ряд (2.12) сходится при $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1$. Функции F_4 аналитически продолжаются до решений уравнений

$$\begin{aligned} x(1-x) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 2xy \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ + [c - (a+b+1)x] \frac{\partial F}{\partial x} - (a+b+1)y \frac{\partial F}{\partial y} - abF = 0, \\ y(1-y) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ + [c' - (a+b+1)y] \frac{\partial F}{\partial y} - (a+b+1)x \frac{\partial F}{\partial x} - abF = 0. \end{aligned}$$

2.5.1. *Возмущения потенциалом для билиарда внутри эллипса.* Билиардная система, описывающая частицу, свободно движущуюся в эллипсе

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1,$$

вполне интегрируема и имеет дополнительный интеграл

$$K_1 = \frac{\dot{x}^2}{A} + \frac{\dot{y}^2}{B} - \frac{(\dot{x}y - \dot{y}x)^2}{AB}.$$

Нас интересуют возмущения потенциалом $V = V(x, y)$, при которых у возмущенной системы имеется интеграл $\tilde{K}_1$ вида

$$\tilde{K}_1 = K_1 + k_1(x, y),$$

где $k_1 = k_1(x, y)$ зависит только от координат. Это специальное условие приводит к уравнению (2.11) на V с $\lambda = A - B$.

В [34], [35] были приведены решения (2.11), имеющие вид многочленов Лорана. Для

$$V_\gamma = \tilde{y}^{-\gamma} ((1-\gamma)\tilde{x}F_4(1, 2-\gamma, 2, 1-\gamma; \tilde{x}, \tilde{y}) + 1), \quad (2.13)$$

где $\tilde{x} = x^2/\lambda$, $\tilde{y} = -y^2/\lambda$, в [36] был получен следующий более общий результат.

ТЕОРЕМА 2.29. *Каждая функция V_γ , определенная в (2.13) с $\gamma \in \mathbb{C}$, является решением уравнения (2.11).*

При нецелых γ эта теорема дает новые примеры потенциалов. При целых γ мы получаем лорановские решения.

2.5.2. *Механическая интерпретация.* Если $\gamma \in \mathbb{R}^-$ и коэффициент при V_γ положителен, то мы получаем потенциальный барьер вдоль оси x . Мы можем рассмотреть билиард в верхней полуплоскости, тогда можно считать, что вдоль отрицательной части y -оси проведен разрез, так что потенциал превратился в однозначную вещественную функцию.

Решения уравнения (2.11) связаны также с интересными геометрическими вопросами.

2.5.3. *Биллиард в эллипсоиде с квадратичным потенциалом.* В [37] рассмотрена биллиардная система в эллипсоиде

$$\mathcal{E}: \quad (x, a^{-1}x) = 1, \quad a = (a_1, \dots, a_n), \quad 0 < a_1 < \dots < a_n,$$

из n -мерного пространства, с квадратичным потенциалом вида

$$\frac{\sigma(x_1^2 + \dots + x_n^2)}{2}, \quad \sigma = \text{const}.$$

Этот потенциал называют также *потенциалом Гука*.

Пусть $\mathcal{B}: (x, v) \mapsto (\tilde{x}, \tilde{v})$ – биллиардное отображение, где $x, \tilde{x} \in \mathcal{E}$ – точки последовательных отражений от границы, а $v, \tilde{v}$ – векторы скорости в точках $x, \tilde{x}$ после отражения.

В следующей теореме приводятся явные формулы для $\mathcal{B}$.

ТЕОРЕМА 2.30 [37]. *Биллиардное отображение эквивалентно следующему отображению:*

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= -\frac{1}{\nu} [(\sigma - (v, a^{-1}v))x + 2(x, a^{-1}v)v], \\ \tilde{v} &= -\frac{1}{\nu} [(\sigma - (v, a^{-1}v)v - 2\sigma(x, a^{-1}v)x] + \mu a^{-1}\tilde{x}, \quad \mu = \frac{2(\tilde{v}, a^{-1}\tilde{x})}{(\tilde{x}, a^{-2}\tilde{x})}, \\ \nu &= \sqrt{4\sigma(x, a^{-1}v)^2 + (\sigma - (v, a^{-1}v))^2}. \end{aligned}$$

Оказывается, что для биллиардного отображения $\mathcal{B}$ можно найти пары Лакса.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.31 [37]. *С точностью до симметрии*

$$(x, v) \mapsto (-x, -v)$$

биллиардное отображение $\mathcal{B}$ эквивалентно уравнению

$$\tilde{L}(\lambda) = M(\lambda)L(\lambda)M^{-1}(\lambda),$$

где

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \begin{pmatrix} q_\lambda(x, v) & q_\lambda(v, v) - \sigma \\ -q_\lambda(x, x) + 1 & -q_\lambda(x, v) \end{pmatrix}, \quad q_\lambda(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{\lambda - a_i}, \\ M(\lambda) &= \begin{pmatrix} [\sigma - (v, a^{-1}v)]\lambda + 2(x, a^{-1}v)\mu & 2\sigma(x, a^{-1}v)\lambda - [\sigma - (v, a^{-1}v)]\mu \\ -2(x, a^{-1}v)\lambda & [\sigma - (v, a^{-1}v)]\lambda \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

а $\tilde{L}(\lambda)$ зависит от $\tilde{x}, \tilde{v}$ в точности так же, как $L(\lambda)$ зависит от x, v .

Биллиард с потенциалом Гука имеет следующие геометрические свойства.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.32 [37]. При $\sigma > 0$ отрезки траекторий биллиарда с потенциалом Гука внутри эллипсоида $\mathcal{E}$ из $\mathbb{E}^n$ являются дугами эллипсов. Все эллипсы, содержащие отрезки одной траектории, касаются n фиксированных квадрик, софокусных с $\mathcal{E}$. Параметры этих квадрик являются корнями характеристического полинома

$$(\lambda - a_1) \cdots (\lambda - a_n) \det L(\lambda).$$

Заметим, что число каустик движения с потенциалом Гука равно n , в то время как для невозмущенной системы это число по теореме Шаля равно $n - 1$. Более того, как мы узнали от Ю. Фёдорова, число каустик равно $n + k - 1$, если сепарабельное возмущение имеет степень $2k$.

2.5.4. Задача Якоби о геодезических на эллипсоиде. У задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1$$

имеется дополнительный интеграл

$$K_1 = \left(\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} \right) \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right).$$

Возмущения потенциалом $V = V(x, y, z)$, при которых у возмущенных систем есть интегралы вида

$$\tilde{K}_1 = K_1 + k(x, y, z),$$

удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} \right) V_{xy} \frac{A - B}{AB} - 3 \frac{yV_x}{B^2A} + 3 \frac{xV_y}{A^2B} \\ & \quad + \left(\frac{x^2}{A^3} - \frac{y^2}{B^3} \right) V_{xy} + \frac{xy}{AB} \left(\frac{V_{yy}}{A} - \frac{V_{xx}}{B} \right) + \frac{zxV_{zy}}{CA^2} - \frac{zyV_{zx}}{CB^2} = 0, \\ & \left(\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} \right) V_{yz} \frac{B - C}{BC} - 3 \frac{zV_y}{C^2B} + 3 \frac{yV_z}{B^2C} \\ & \quad + \left(\frac{y^2}{B^3} - \frac{z^2}{C^3} \right) V_{yz} + \frac{yz}{BC} \left(\frac{V_{zz}}{B} - \frac{V_{yy}}{C} \right) + \frac{xyV_{xz}}{AB^2} - \frac{xzV_{xy}}{AC^2} = 0, \\ & \left(\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} \right) V_{zx} \frac{C - A}{AC} - 3 \frac{xV_z}{A^2C} + 3 \frac{zV_x}{C^2A} \\ & \quad + \left(\frac{z^2}{C^3} - \frac{x^2}{A^3} \right) V_{zx} + \frac{xz}{AC} \left(\frac{V_{xx}}{C} - \frac{V_{zz}}{A} \right) + \frac{zyV_{xy}}{BC^2} - \frac{yxV_{yz}}{BA^2} = 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Это аналог уравнения Бертрана–Дарбу (2.11) (см. [36]).

Пусть

$$\frac{x^2 C(A - C)}{z^2(B - A)A} = \hat{x}, \quad \frac{y^2 C(C - B)}{z^2(B - A)B} = \hat{y}.$$

Следующее утверждение также было доказано в [36].

ТЕОРЕМА 2.33. Для всякого $\gamma \in \mathbb{C}$ функция

$$V_\gamma = (-\gamma + 1) \left(\frac{z^2}{x^2} \right)^\gamma F_4(1, -\gamma + 2, 2, -\gamma + 1; \hat{x}, \hat{y})$$

является решением системы (2.14).

Таким образом, решая уравнение Бертрана–Дарбу и его обобщения, как это делалось, например, в теоремах 2.29 и 2.33, мы получаем большие семейства механических систем с двумя степенями свободы, в которых переменные разделяются. Хорошо известно, что системы с двумя степенями свободы и разделяющимися переменными необходимо являются системами типа Лиувилля (см. [68]).

Теперь возникает естественный вопрос о теореме типа Понселе, описывающей периодические решения таких возмущенных систем. Оказывается, что Дарбу исследовал и этот вопрос: в [44] он изучал обобщения теоремы Понселе на случай поверхностей Лиувилля.

3. Закон бильярдного отражения и гиперэллиптические кривые

В этом разделе мы продемонстрируем наличие глубоких и тесных связей между общими гиперэллиптическими якобианами и интегрируемыми бильярдными системами, порожденными пучками квадрик.

В п. 3.1 мы приводим определение бильярдного закона отражения в проективной геометрии, используя вместо метрик семейства софокусных квадрик. Затем мы перейдем к важным теоремам об отражении и о двойном отражении из [21], к понятию *виртуального отражения* из [44] и к нескольким важным следствиями из [29]. В п. 3.2 вводится обобщенная кривая Кэли. В п. 3.3 мы приводим конструкцию бильярдной алгебры на якобиане этой гиперэллиптической кривой. В п. 3.4 вводится понятие *s-слабых траекторий* Понселе и находятся соответствующие условия типа Кэли. Результаты, представленные в пп. 3.5 и 3.6, свидетельствуют о возможностях метода бильярдных алгебр: в их числе обобщения пространственной теоремы Гриффитса–Харриса, теоремы Вейра и теоремы Дарбу. Изложение в пп. 3.3–3.6 опирается на [39].

3.1. Динамика бильярдных в проективной постановке. В этом пункте рассматривается d -мерное проективное пространство над произвольным полем характеристики отличной от 2.

Сначала нам потребуется проективное определение бильярдного отражения, не использующее метрик. В этом мы следуем [21].

Пусть $\mathcal{Q}_1$ и $\mathcal{Q}_2$ – квадрики. Обозначим через u касательную плоскость $\mathcal{Q}_1$ в точке x , а через z полюс u относительно $\mathcal{Q}_2$. Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в x , и пусть плоскость, содержащая их, пересекает u по прямой ℓ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Если прямые ℓ_1, ℓ_2, xz, ℓ компланарны и гармонически сопряжены, то скажем, что лучи ℓ_1 и ℓ_2 удовлетворяют закону отражения в точке x квадрики $\mathcal{Q}_1$ относительно софокусной системы, содержащей $\mathcal{Q}_1$ и $\mathcal{Q}_2$.

После введения системы координат, в которой квадрики $\mathcal{Q}_1$ и $\mathcal{Q}_2$ софокусны в обычном смысле, так определенное отражение перейдет в обычное.

ТЕОРЕМА 3.2 (теорема об отражении). Пусть лучи ℓ_1 и ℓ_2 удовлетворяют закону отражения в точке x квадрики $\mathcal{Q}_1$ относительно софокусной системы, задаваемой квадраками $\mathcal{Q}_1$ и $\mathcal{Q}_2$. Допустим, что ℓ_1 пересекает $\mathcal{Q}_2$ в y'_1 и y_1 , пусть u – касательная плоскость к $\mathcal{Q}_1$ в x , а z – ее полюс относительно $\mathcal{Q}_2$. Тогда прямые $y'_1 z$ и $y_1 z$ содержат точки y'_2 и y_2 пересечения луча ℓ_2 с $\mathcal{Q}_2$. Обратное утверждение тоже верно.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Предположим, что лучи ℓ_1 и ℓ_2 удовлетворяют закону отражения от $\mathcal{Q}_1$ относительно софокусной системы, задаваемой квадраками $\mathcal{Q}_1$ и $\mathcal{Q}_2$. Тогда ℓ_1 касается $\mathcal{Q}_2$ в том и только том случае, когда ℓ_2 касается $\mathcal{Q}_2$; ℓ_1 пересекает $\mathcal{Q}_2$ в двух точках в том и только том случае, когда ℓ_2 пересекает $\mathcal{Q}_2$ в двух точках.

Следующее утверждение является одним из основных инструментов проективного анализа бильярдной динамики.

ТЕОРЕМА 3.4 (теорема о двойном отражении). Для заданных квадрик $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$ пусть ℓ_1 – прямая, пересекающая $\mathcal{Q}_1$ в точке x_1 и $\mathcal{Q}_2$ в y_1 . Пусть u_1, v_1 – касательные плоскости к $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$ в точках x_1, y_1 , и пусть z_1, w_1 – их полюсы относительно $\mathcal{Q}_2$ и $\mathcal{Q}_1$. Обозначим через x_2 вторую точку пересечения прямой $w_1 x_1$ с $\mathcal{Q}_1$, через y_2 точку пересечения $y_1 z_1$ с $\mathcal{Q}_2$ и через ℓ_2, ℓ'_1, ℓ'_2 прямые $x_1 y_2, y_1 x_2, x_2 y_2$. Тогда пары $\ell_1, \ell_2; \ell_1, \ell'_1; \ell_2, \ell'_2; \ell'_1, \ell'_2$ удовлетворяют закону отражения соответственно в точках x_1 (квадрики $\mathcal{Q}_1$), y_1 (квадрики $\mathcal{Q}_2$), y_2 (квадрики $\mathcal{Q}_2$) и x_2 (квадрики $\mathcal{Q}_1$).

СЛЕДСТВИЕ 3.5. Если прямая ℓ_1 касается квадрики $\mathcal{Q}'$, софокусной с $\mathcal{Q}_1$ и $\mathcal{Q}_2$, то лучи ℓ_2, ℓ'_1 и ℓ'_2 также касаются $\mathcal{Q}'$.

3.1.1. Виртуальные бильярдные траектории. Помимо реального движения бильярдного шара в $\mathbb{E}^d$, интерес представляют виртуальные отражения. Дарбу рассматривал их в [44] (см. гл. XIV книги IV в т. 2). В этом пункте мы рассматриваем некоторые результаты из [29], [39], в которых устанавливается и обобщается свойство виртуального отражения, сформулированное Дарбу для трехмерного случая (см. сноску [44; с. 320–321]).

Формальным образом виртуальное отражение от квадрики $\mathcal{Q}$ в евклидовом пространстве определяется как отображение луча ℓ с концом в P_0 ($P_0 \in \mathcal{Q}$) в луч, дополнительный к образу ℓ относительно обычного отражения от $\mathcal{Q}$ в точке P_0 .

Заметим, что в случае обычных отражений ровно одна эллиптическая координата имеет локальный экстремум в точке отражения, а именно, та, что соответствует квадрике $\mathcal{Q}$. С другой стороны, на виртуальном отраженном луче только у этой координаты нет локального экстремума в точке отражения. В двумерном случае виртуальное отражение легко определить как отражение от другой софокусной квадрики, проходящей через P_0 . В более высоких размерностях виртуальное отражение можно рассматривать как реальное отражение от прямой, нормальной к $\mathcal{Q}$ в P_0 .

Понятия реального и виртуального отражения не могут быть прямо обобщены на проективное пространство, так как здесь мы существенно используем естественный порядок на поле вещественных чисел. Однако можно ввести некоторую конфигурацию, связанную с реальным и виртуальным отражением, так, чтобы ее свойства сохранялись и в проективном случае.

Пусть X_1, X_2 и Y_1, Y_2 – соответственно точки квадрики $\mathcal{Q}_1$ и $\mathcal{Q}_2$ из $\mathbb{P}^d$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6. Скажем, что четверка точек X_1, X_2, Y_1, Y_2 задает *конфигурацию виртуального отражения*, если пары прямых $X_1Y_1, X_1Y_2; X_2Y_1, X_2Y_2$; X_1Y_1, X_2Y_1 ; X_1Y_2, X_2Y_2 удовлетворяют закону отражения в точках X_1, X_2 квадрики $\mathcal{Q}_1$ и в точках Y_1, Y_2 квадрики $\mathcal{Q}_2$ относительно софокусной системы, задаваемой $\mathcal{Q}_1$ и $\mathcal{Q}_2$.

Если к тому же касательные плоскости к $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$ в X_1, X_2 и Y_1, Y_2 входят в один пучок, то скажем, что эти точки задают *конфигурацию двойного отражения*.

Утверждение Дарбу теперь можно обобщить и доказать следующим образом.

ТЕОРЕМА 3.7 [29]. Пусть $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$ – квадрики в проективном пространстве $\mathbb{P}^d$, X_1, X_2 – точки $\mathcal{Q}_1$ и Y_1, Y_2 – точки $\mathcal{Q}_2$. Если касательные плоскости к квадратикам в этих точках входят в один пучок, то X_1, X_2, Y_1, Y_2 задают конфигурацию виртуального отражения.

Далее, пусть проективное пространство определено над полем вещественных чисел. Введем систему координат, в которой $\mathcal{Q}_1$ и $\mathcal{Q}_2$ оказываются софокусными эллипсоидами в евклидовом пространстве. Если $\mathcal{Q}_1$ лежит внутри $\mathcal{Q}_2$, то стороны четырехугольника $X_1Y_1X_2Y_2$ связаны реальным отражением от $\mathcal{Q}_2$ и виртуальным отражением от $\mathcal{Q}_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ξ_1, ξ_2 и η_1, η_2 – касательные плоскости соответственно к $\mathcal{Q}_{\lambda_1}$ в точках X_1, X_2 и к $\mathcal{Q}_{\lambda_2}$ в Y_1, Y_2 . Все эти гиперплоскости входят в пучок, так что их полюсы относительно любой квадрики коллинеарны; в частности, полюс P гиперплоскости ξ_1 лежит на прямой Y_1Y_2 . Если $Q = Y_1Y_2 \cap \xi_1$, то пары P, Q и Y_1, Y_2 гармонически сопряжены. Следовательно, прямые X_1Y_1 и X_1Y_2 удовлетворяют закону отражения в ξ_1 . Завершение доказательства проходит аналогично.

Приведем также утверждение, обратное к этой теореме.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8 [29]. Пусть X_1, X_2 и Y_1, Y_2 – пары точек на софокусных эллипсоидах $\mathcal{Q}_1$ и $\mathcal{Q}_2$ в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^d$, и пусть $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ – соответствующие касательные плоскости. Если четверка X_1, X_2, Y_1, Y_2 образует конфигурацию виртуального отражения, то плоскости $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ входят в один пучок.

3.1.2. Обобщения основной теоремы Лебега на более высокие размерности. Мы завершим п. 3.1 анализом обобщений впечатляющей конструкции Лебега из [15] на случай более высоких размерностей. Представленные результаты были получены в [29].

У центральной леммы из [15] имеется следующий аналог в больших размерностях.

ЛЕММА 3.9 [29]. Пусть $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$ – квадрики из софокусной системы, и пусть прямые ℓ_1, ℓ_2 удовлетворяют закону отражения в точке X_1 квадрики $\mathcal{Q}_1$, а ℓ_2, ℓ_3 удовлетворяют ему в точке Y_2 квадрики $\mathcal{Q}_2$. Тогда прямая ℓ_1 пересекает $\mathcal{Q}_2$ в такой точке Y_1 , а ℓ_3 пересекает $\mathcal{Q}_1$ в такой точке X_2 , что пары прямых ℓ_1, Y_1X_2 и Y_1X_2, ℓ_3 удовлетворяют закону отражения соот-

ветственно в точках Y_1 и X_2 квадрат Q_2 и Q_1 . Более того, касательные плоскости в X_1, X_2, Y_1, Y_2 к этим квадратикам входят в один пучок.

Этот результат можно доказать непосредственным применением теоремы 3.7 о виртуальных отражениях. Однако между леммой 3.9 и соответствующим результатом на плоскости нет полной аналогии. В общем положении прямые ℓ_1, ℓ_3 и $\ell_2, Y_1 Y_2$ скрещиваются, так что у нас нет третьей пары плоскостей, касающихся квадратиков и содержащих точки пересечения указанных двух пар прямых.

Все же мы можем сформулировать полный аналог основной леммы.

ТЕОРЕМА 3.10 [29]. Пусть $\mathcal{F}$ – двойственный пучок квадратик в трехмерном пространстве.

Для любой квадратик $\Gamma_0 \in \mathcal{F}$ существуют четыре плоскости $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, касательные к Γ_0 , и такие квадратик $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \in \mathcal{F}$, соприкасающиеся соответственно с парами пересекающихся прямых $\alpha\beta$ и $\gamma\delta$, $\alpha\gamma$ и $\beta\delta$, $\alpha\delta$ и $\beta\gamma$, что все касательные плоскости к $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ в точках касания с прямыми входят в один пучок Δ . Более того, шесть пересекающихся прямых входят в одну связку.

3.2. Обобщенная кривая Кэли. Продолжим исследования, начатые в п. 2.1. Пусть дано софокусное семейство квадратик в d -мерном пространстве. Тогда каждая прямая в пространстве определяет некоторую замечательную риманову поверхность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.11. Пусть ℓ – прямая, не лежащая на квадратике из фиксированного софокусного семейства в проективном пространстве $\mathbb{P}^d$. Обобщенная кривая Кэли C_ℓ – это многообразие касательных плоскостей к квадратикам из софокусного семейства в точках ℓ .

Эта кривая вложена естественным образом в двойственное пространство $\mathbb{P}^{d*}$.

На рис. 21 мы видим плоскости, соответствующие одной точке прямой ℓ в трехмерном пространстве.

Рис. 21. Три точки обобщенной кривой Кэли в размерности 3

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.12. Обобщенная кривая Кэли – это гиперэллиптическая кривая рода $g = d - 1$ при $d \geq 3$. Ее естественная реализация в $\mathbb{P}^{d*}$ имеет степень $2d - 1$.

Естественная инволюция τ_ℓ обобщенной кривой Кэли C_ℓ переводит касательные плоскости в точках пересечения ℓ с каждой квадрикой из софокусного семейства одна в другую. Легко видеть, что неподвижные точки этой инволюции соответствуют $d-1$ квадрике, касающейся ℓ и $d+1$ вырожденной квадрике софокусного семейства.

Уравнение обобщенной кривой Кэли, соответствующей софокусному семейству вида (2.1), можно записать в виде

$$y^2 = \mathcal{P}(x),$$

где $\mathcal{P}(x)$ – полином (2.2).

Важно отметить, что постоянные $\alpha_1, \dots, \alpha_{d-1}$, соответствующие квадрикам, соприкасающимся с ℓ , могут принимать не любые значения. Точнее, вслед за [64], [41] мы можем сформулировать следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.13. *Прямая в $\mathbb{E}^d$, касающаяся $d-1$ различных невырожденных квадрик $\mathcal{Q}_{\alpha_1}, \dots, \mathcal{Q}_{\alpha_{d-1}}$ из семейства (2.1), существует тогда и только тогда, когда множество $\{a_1, \dots, a_d, \alpha_1, \dots, \alpha_{d-1}\}$ можно упорядочить в виде $b_1 < b_2 < \dots < b_{2d-1}$, где $\alpha_j \in \{b_{2j-1}, b_{2j}\}$ ($1 \leq j \leq d-1$).*

Как было замечено в [29], обобщенная кривая Кэли изоморфна изоспектральной кривой Веселова–Мозера.

Эта кривая также изоморфна естественным образом кривым, изученным Кнёррером, Донаги и Райдом (RDK-кривые). Следующий пункт мы начнем с построения этого изоморфизма, с тем чтобы установить связь между законом бильярдного отражения и алгебраической структурой якобиана $\text{Jac}(C_\ell)$.

3.3. Закон бильярдного отражения и алгебраическая структура на многообразии $\mathcal{A}_\ell$. Целью этого пункта является введение на $\mathcal{A}_\ell$ алгебраической структуры, естественно связанной с бильярдными движениями. Сначала мы покажем, что обобщенная кривая Кэли изоморфна RDK-кривой. Затем для лучшего понимания и наглядности мы подробно опишем бильярдную алгебру и докажем несколько ее красивых геометрических свойств в случае размерности 3, т. е. когда соответствующая кривая имеет род 2. За этим следует общая конструкция.

3.3.1. Морфизм между обобщенной кривой Кэли и RDK-кривой. Здесь мы установим связь между обобщенной кривой Кэли, определенной выше, и кривыми, изученными Кнёррером, Донаги и Райдом и проследим за связями между бильярдными конструкциями и алгебраической структурой соответствующих абелевых многообразий.

Пусть ℓ – прямая в $\mathbb{E}^d$, касающаяся квадрик $\mathcal{Q}_{\alpha_1}, \dots, \mathcal{Q}_{\alpha_{d-1}}$ из софокусного семейства (2.1). Обозначим через $\mathcal{A}_\ell$ семейство всех прямых, касающихся тех же $d-1$ квадрик. Заметим, что в соответствии со следствием из теоремы об отражении множество $\mathcal{A}_\ell$ инвариантно относительно бильярдного отражения от любой из софокусных квадрик.

Начнем с простого замечания.

ЛЕММА 3.14. Пусть прямые ℓ и ℓ' удовлетворяют закону отражения в точке z квадрики $\mathcal{Q}$, предположим, что они касаются софокусной квадрики $\mathcal{Q}_1$ в точках z_1 и z_2 . Тогда пересечение касательных пространств $T_{z_1}\mathcal{Q}_1 \cap T_{z_2}\mathcal{Q}_1$ лежит в касательном пространстве $T_z\mathcal{Q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Результат следует из теоремы об отражении: поскольку полюсы z_1 , z_2 и w плоскостей $T_{z_1}\mathcal{Q}_1$, $T_{z_2}\mathcal{Q}_1$ и $T_z\mathcal{Q}$ относительно квадрики $\mathcal{Q}_1$ коллинеарны, плоскости лежат в одном пучке.

Следуя [41], для $d-1$ аффинных квадрик $\mathcal{Q}_{\alpha_1}, \dots, \mathcal{Q}_{\alpha_{d-1}}$ мы можем рассмотреть их проективные замыкания $\mathcal{Q}_{\alpha_1}^p, \dots, \mathcal{Q}_{\alpha_{d-1}}^p$ и пересечение V двух квадрик из $\mathbb{P}^{2d-1}$:

$$x_1^2 + \dots + x_d^2 - y_1^2 - \dots - y_{d-1}^2 = 0, \quad (3.1)$$

$$a_1 x_1^2 + \dots + a_d x_d^2 - \alpha_1 y_1^2 - \dots - \alpha_{d-1} y_{d-1}^2 = x_d^2. \quad (3.2)$$

Через $F = F(V)$ обозначим множество $(d-2)$ -мерных линейных подпространств V . Для данного $L \in F$ обозначим через F_L замыкание в F множества $\{L' \in F \mid \dim L \cap L' = d-3\}$. Как показано в [40], F_L – неособая гиперэллиптическая кривая рода $d-1$. Заметим, что при $d=3$, т.е. когда кривая $\mathcal{C}_\ell$ имеет род 2, изоморфизм между $F(V)$ и якобианом гиперэллиптической кривой был установлен в [72].

Проекция

$$\pi: \mathbb{P}^{2d-1} \setminus \{(x, y) : x = 0\} \rightarrow \mathbb{P}^d, \quad \pi'(x, y) = x,$$

отображает $L \in F(V)$ в подпространство $\pi'(L) \subset \mathbb{P}^d$ коразмерности 2, $\pi'(L)$ касается квадратик $\mathcal{Q}_{\alpha_1}^p, \dots, \mathcal{Q}_{\alpha_{d-1}}^p$, двойственных к $\mathcal{Q}_{\alpha_1}^p, \dots, \mathcal{Q}_{\alpha_{d-1}}^p$.

Таким образом, двойственное к $\pi'(L)$ пространство $\pi^*(L)$ является прямой, касающейся квадратик $\mathcal{Q}_{\alpha_1}^p, \dots, \mathcal{Q}_{\alpha_{d-1}}^p$.

Для обобщенной кривой Кэли $\mathcal{C}_\ell$, определенной как семейство касательных гиперплоскостей, мы можем дать и другую интерпретацию – как множества прямых из $\mathcal{A}_\ell$, пересекающих ℓ . А именно, для почти каждой касательной гиперплоскости имеется единственная прямая ℓ' , полученная из ℓ билиардным отражением. Имея в виду эту идентификацию, легко доказать следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 3.15. Существует бирациональный морфизм между обобщенной кривой Кэли $\mathcal{C}_\ell$ и кривой Райда–Донаги–Кнёррера F_L с $L = \pi^{*-1}(\ell)$, задаваемый формулой

$$j: \ell' \mapsto L', \quad L' = \pi^{*-1}(\ell'),$$

где ℓ' – прямая, полученная из ℓ билиардным отражением от софокусной квадрики.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следствие предыдущих лемм, а также леммы 4.1 и следствия 4.2 в [41].

Итак, лемма 3.14 связывает динамику билиардов в эллипсоидах с алгебраической структурой некоторых абелевых многообразий. Эту связь можно использовать двояко: как для приложения алгебраических методов к анализу билиардных движений, так и, наоборот, используя билиардные конструкции для более эффективного, конструктивного и наглядного анализа алгебраической структуры.

В следующем пункте мы используем эту связь в конструкции *бильiardной алгебры*, задающей на $\mathcal{A}_\ell$ структуру группы.

3.3.2. Случай рода 2. Прежде чем перейти к общему случаю, мы хотим особо выделить бильiardные конструкции, используемые в первом нетривиальном случае, случае рода 2.

Основной принцип, определение и первые свойства операции. Сформулируем *основной принцип*:

Во всякой конфигурации виртуального отражения сумма прямых равна нулю, если четыре касательных плоскости в точках отражения входят в один пучок.

Напомним, что, согласно определению 3.6, такую конфигурацию четырех прямых, задающих конфигурацию виртуального отражения, в которой касательные плоскости принадлежат одному пучку, мы будем называть *конфигурацией двойного отражения*.

Нулевой элемент. Зафиксируем прямую $\mathcal{O} \in \mathcal{A}_\ell$.

Противоположный элемент. Сначала положим по определению $-\mathcal{O} := \mathcal{O}$. Для прямой $x \in \mathcal{C}_\mathcal{O}$ положим

$$-x := \tau_\mathcal{O}(x),$$

где $\tau_\mathcal{O}$ – гиперэллиптическая инволюция кривой $\mathcal{C}_\mathcal{O}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.16. Для всякой точки $x \in \mathcal{C}_\mathcal{O}$ прямые x и $-x$ получаются из $\mathcal{O}$ отражением от одной и той же квадрики $\mathcal{Q}_x$ из софокусного семейства.

Кроме того, пусть π – единственная плоскость из пучка, задаваемого касательными плоскостями к $\mathcal{Q}_x$ в точках пересечения с $\mathcal{O}$, такая, что π ортогональна $\mathcal{O}$, и пусть $\mathcal{Q}_\mathcal{O}$ – единственная квадрика из софокусного семейства, которой π касается. Тогда точка пересечения π и $\mathcal{O}$ лежит в $\mathcal{Q}_\mathcal{O}$.

Рис. 22. Предложение 3.16

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следует из вырожденного случая теоремы о двойном отражении, примененного к квадрикам $\mathcal{Q}_x$ и $\mathcal{Q}_\mathcal{O}$, $\mathcal{O} = l_1 = l_2$. См. рис. 22.

СЛЕДСТВИЕ 3.17. Плоскость π и квадрика $\mathcal{Q}_\mathcal{O}$ не зависят от x . Прямая $\mathcal{O}$ при отражении от $\mathcal{Q}_\mathcal{O}$ переходит в себя.

Теперь пусть $x \in \mathcal{A}_\ell$, но x не лежит в $\mathcal{C}_\mathcal{O}$, так что x не пересекает $\mathcal{O}$ и эти две прямые порождают проективное пространство прямых. Это пространство пересекает $\mathcal{A}_\ell$ по дивизору

$$\mathcal{O} + x + p + q$$

(см., например, [73], [74]).

Из теоремы о двойном отражении можно видеть, что прямые $\mathcal{O}$, x , p и q образуют конфигурацию двойного отражения. Определим прямую $-x$ так, чтобы она задавала конфигурацию двойного отражения с $\mathcal{O}$, $-p$, $-q$.

Из определения непосредственно видно, что $-(-x) = x$ для всякого $x \in \mathcal{A}_\ell$.

Следующее свойство вытекает из предложения 3.16 и теоремы о двойном отражении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.18. *Прямые x и $-x$ пересекаются и удовлетворяют закону отражения от $\mathcal{Q}_\mathcal{O}$.*

Следующий пример иллюстрирует только что проведенное построение.

ПРИМЕР 3.19. Пусть прямая $\mathcal{O}$ ортогональна одной из координатных гиперплоскостей. Тогда $\mathcal{Q}_\mathcal{O} = \pi$ совпадает с этой гиперплоскостью, и к тому же среди каустик $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_{d-1}$ не может быть двух квадрик одного типа.

Согласно [64], как раз тот случай, когда все квадрики имеют различные типы, отвечает ситуации, когда $\mathcal{A}_\ell$ состоит из единственной вещественной связной компоненты, изоморфной компоненте связности, $\text{Jac}(\mathcal{C}_\mathcal{O})(\mathbb{R})$, содержащей нуль.

В этом случае для всякой прямой $x \in \mathcal{A}_\ell$ противоположный элемент $-x$ определяется как прямая, симметричная x относительно плоскости $\mathcal{Q}_\mathcal{O}$.

Сложение. Определим операцию

$$+: \mathcal{A}_\ell \times \mathcal{A}_\ell \rightarrow \mathcal{A}_\ell.$$

Положим $\mathcal{O} + x = x + \mathcal{O} = x$ для всех $x \in \mathcal{A}_\ell$.

При $s_1, s_2 \in \mathcal{C}_\mathcal{O}$ определим $s_1 + s_2$ как прямую, образующую конфигурацию двойного отражения с $-s_1, -s_2, \mathcal{O}$. Очевидно, что $s_1 + s_2 = s_2 + s_1$.

Заметим, что $-s_1, -s_2$ — единственные прямые из $\mathcal{A}_\ell$, пересекающие как $s_1 + s_2$, так и $\mathcal{O}$ (см. [73]). Таким образом, имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 3.20. *Всякую прямую $x \in \mathcal{A}_\ell \setminus \mathcal{C}_\mathcal{O}$ можно единственным образом представить как сумму двух прямых, пересекающих $\mathcal{O}$.*

Теперь пусть $s \in \mathcal{C}_\mathcal{O}$, $x \in \mathcal{A}_\ell \setminus \mathcal{C}_\mathcal{O}$ (см. рис. 23). В соответствии со сказанным выше, рассмотрим такие прямые $p, q \in \mathcal{C}_\mathcal{O}$, что $x = p + q$, и построим

$$p_1 = (-s) + (-p), \quad q_1 = (-s) + (-q)$$

как выше, поскольку обе пары s, p и s, q пересекают $\mathcal{O}$. Как p_1 , так и q_1 пересекает s . Итак, три эти линии входят в конфигурацию двойного отражения вместе с z . По определению положим

$$s + x = x + s = z.$$

В следующей лемме описывается одно из важнейших свойств этой операции.

Рис. 23. Частично определенная операция сложения

ЛЕММА 3.21. Пусть s, x – прямые соответственно в $\mathcal{C}_O$ и $\mathcal{A}_\ell$, а $\mathcal{Q}_s$ – такая квадрика из софокусного семейства, что s и O получаются друг из друга отражением относительно $\mathcal{Q}_s$. Тогда прямая $s + x$ пересекает прямую $-x$, точка их пересечения лежит на квадрике $\mathcal{Q}_s$ и две эти прямые удовлетворяют бильiardному закону отражения на $\mathcal{Q}_s$.

Рис. 24. Лемма 3.21

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следует из [42], [41] и леммы 3.14.

Лемма 3.21 будет играть важную роль при доказательстве следующих основных свойств так определенной операции сложения.

ЛЕММА 3.22. Для $p, q, s \in \mathcal{C}_O$ выполнен закон ассоциативности: $p + (q + s) = (p + q) + s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как на рис. 24, обозначим через x, p_1, q_1 прямые, образующие конфигурацию двойного отражения с тройками (O, p, q) , (O, p, s) , (O, q, s) . Применяя лемму 3.21, мы видим, что $(p + q) + s$ – единственная прямая, образующая конфигурацию двойного отражения с тройками (p_1, q_1, s) , $(p, p_1, -x)$ и $(q, q_1, -x)$. То же верно для прямой $p + (q + s)$, а значит, эти две прямые совпадают.

ЛЕММА 3.23. Пусть $p, q, s \in \mathcal{C}_O$. Тогда $-(p + q + s) = (-p) + (-q) + (-s)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно проверяется, что $p + q + s \in \mathcal{C}_O$ тогда и только тогда, когда две из прямых p, q, s взаимно обратны. В этом случае нужное нам равенство очевидно.

Итак, допустим, что $p + q + s$ не пересекает $\mathcal{O}$, а a и b — прямые, образующие конфигурацию двойного отражения с $p + q + s$, $\mathcal{O}$. По лемме 3.21, $p + q + s$ — единственная прямая, пересекающая $(-p) + (-q)$, $(-p) + (-s)$ и $(-q) + (-s)$. Отразив p , q , s , a , b от $\mathcal{Q}_\mathcal{O}$ и применив теорему о двойном отражении, мы получаем, что прямая $-(p + q + s)$ пересекает прямые $p + q$, $p + s$ и $q + s$. Значит, она совпадает с $(-p) + (-q) + (-s)$ по лемме 3.21.

Пусть теперь даны прямые $x, y \in \mathcal{A}_\ell$, не пересекающиеся с $\mathcal{O}$. Их сумма будет определена следующим образом.

Сначала представим x как сумму двух прямых, пересекающих $\mathcal{O}$: $x = s_1 + s_2$, $s_1, s_2 \in \mathcal{C}_\mathcal{O}$. Теперь положим

$$x + y := s_1 + (s_2 + y).$$

Убедимся в корректности этого определения.

ЛЕММА 3.24. Пусть $s_1, s_2 \in \mathcal{C}_\mathcal{O}$, и пусть $y \in \mathcal{A}_\ell$. Тогда

$$s_1 + (s_2 + y) = s_2 + (s_1 + y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $y \in \mathcal{C}_\mathcal{O}$ достаточно применить лемму 3.22 и свойство коммутативности сложения в $\mathcal{C}_\mathcal{O}$.

Если $y \in \mathcal{A}_\ell \setminus \mathcal{C}_\mathcal{O}$, то прямые $-s_2 - y$ и y пересекаются и получают друг из друга бильярдным отражением. То же выполнено и для прямых $-s_1 - y$ и y . Таким образом, существует единственная четвертая прямая, лежащая в пересечении пространства, порожденного $[-s_1 - y, y, -s_2 - y]$, с $\mathcal{A}_\ell$. С одной стороны, эта прямая совпадает с $s_2 - (-s_1 - y)$, а с другой, она равна $s_1 - (-s_2 - y)$.

Из лемм 3.22–3.24 видно, что мы задали на $\mathcal{A}_\ell$ структуру коммутативной группы, естественно связанную с бильярдным законом.

Дальнейшие свойства групповой операции. В начале раздела (с. 174) мы сформулировали *основной принцип*, к выполнению которого мы стремились при построении алгебры. Теперь мы увидим, что наши усилия увенчались успехом: утверждение, сформулированное как основной принцип, действительно выполняется в построенной группе.

ТЕОРЕМА 3.25. Сумма прямых, входящих в любую конфигурацию двойного отражения, равна нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть a, b, c, d — прямые из конфигурации двойного отражения. Будем считать, что пары a, b и c, d удовлетворяют закону отражения от $\mathcal{Q}_1$, а пары b, c и d, a удовлетворяют закону отражения от $\mathcal{Q}_2$. Тогда по лемме 3.21 получаем

$$b = -a + s_1, \quad c = -b + s_2, \quad d = -c + \bar{s}_1, \quad a = -d + \bar{s}_2, \quad (3.3)$$

где $s_i, \bar{s}_i$ получены из $\mathcal{O}$ бильярдными отражениями от $\mathcal{Q}_i$, $i = 1, 2$. Очевидно, что $\bar{s}_i \in \{s_i, -s_i\}$.

Из (3.3) мы получаем

$$a + b + c + d = s_1 + \bar{s}_1 = s_2 + \bar{s}_2. \quad (3.4)$$

Таким образом, проверка нужна только в случае, когда $\bar{s}_1 = s_1$ и $\bar{s}_2 = s_2$. Итак, $s_2 = s_1 + s_1 + (-s_2)$ и, как следует из определения операции сложения, прямые $\mathcal{O}$, s_1 , $-2s_1$, s_2 составляют замкнутую бильярдную траекторию с последовательными отражениями от $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$, $\mathcal{Q}_2$. С другой стороны, $(-s_1) + (-s_2)$ – единственная прямая из $\mathcal{A}_\ell$, которая, помимо $\mathcal{O}$, пересекает также s_1 и s_2 . Таким образом,

$$-2s_1 = (-s_1) + (-s_2) \Rightarrow s_1 = s_2 \Rightarrow \mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_2.$$

Это означает, что конфигурация двойного отражения a , b , c , d вырождена, т. е. две прямые в ней совпадают. Пусть $a = c$, тогда и b и d получаются из a бильярдным отражением от $\mathcal{Q}_1$. Итак, $b = -a + s_1$, $d = -a - s_1$ и мы приходим к результату теоремы.

Рассмотрим бильярдную траекторию $\mathbf{t} = (\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n)$ с $\ell_0 = \mathcal{O}$ и с отражениями от квадрик $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_n$ из софокусного семейства. Применив теорему о двойном отражении к $\mathbf{t}$, получим различные траектории с тем же начальным отрезком $\mathcal{O}$ и тем же конечным отрезком ℓ_n . Каждая из этих траекторий отражается от того же набора квадрик $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_n$, но порядок может быть другим. Обозначим через $\ell_1^{(1)}, \dots, \ell_n^{(n)}$ все возможные прямые, содержащие отрезки этих траекторий после первого отражения. Используя нашу алгебру, мы можем вычислить по этим данным конечный отрезок ℓ_n .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.26. $\ell_n = (-1)^{n+1}(\ell_1^{(1)} + \dots + \ell_n^{(n)})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следует из теоремы 3.25.

Мы также можем вывести из лемм 3.22–3.24 следующее интересное свойство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.27. Пусть $x \in \mathcal{A}_\ell$ – прямая, полученная из $\mathcal{O}$ последовательными отражениями от трех квадрик $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$, $\mathcal{Q}_3$. Тогда шесть прямых, полученных из $\mathcal{O}$ отражениями от этих квадрик, разбиваются на две группы, такие, что

- при $i \in \{1, 2, 3\}$ прямые, полученные из $\mathcal{O}$ отражениями от $\mathcal{Q}_i$, лежат в разных группах;
- любая траектория, включающая три отражения от $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$, $\mathcal{Q}_3$, начинающаяся с $\mathcal{O}$ и кончающаяся на x , содержит отрезки прямых только из одной группы.

Обсуждение случая рода 2 мы закончим красивым и нетривиальным результатом о софокусных семействах квадрик.

ТЕОРЕМА 3.28. Пусть $\mathcal{F}$ – семейство софокусных квадрик в $\mathbb{P}^3$. Тогда существуют конфигурации 12 плоскостей в $\mathbb{P}^3$ со следующими свойствами:

- из этих плоскостей можно составить 8 троек так, чтобы плоскости из одной тройки касались разных квадрик из $\mathcal{F}$ и три точки касания

лежали на одной прямой; каждая плоскость конфигурации войдет в две тройки;

- из этих плоскостей можно составить в 6 четверок так, что плоскости в каждой четверке будут входить в один пучок и касаться двух различных квадриков из $\mathcal{F}$; каждая плоскость конфигурации войдет в две четверки.

Более того, такая конфигурация задается тремя плоскостями, касающимися трех разных квадриков из $\mathcal{F}$, с точками касания, лежащими на одной прямой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{O}$ – прямая, содержащая три точки касания, а p, q, s – прямые, полученные из $\mathcal{O}$ билиардными отражениями от заданных квадриков из $\mathcal{F}$. Построим прямые $p_1, q_1, -x, x + s$ в соответствии с объяснениями перед леммой 3.21 (см. рис. 24). Плоскости из конфигурации касаются соответствующих квадриков в точках пересечения прямых.

Рис. 25. Конфигурация плоскостей

На рис. 25 изображено представление конфигурации плоскостей в двойственном пространстве $\mathbb{P}^{3*}$. Здесь каждая плоскость кодируется парой прямых, которые переводятся друг в друга отражением относительно этой плоскости.

Интересно было бы описать многообразие таких конфигураций как пространство модулей.

3.3.3. Общий случай. Разобрав случай рода 2, мы получили необходимый опыт использования билиардных конструкций для введений структуры группы. Более того, тем самым мы рассмотрели случай $n = 2$ общей конструкции, которую мы изложим теперь.

Билиардные траектории и эффективные дивизоры. При введении групповой операции на множестве $\mathcal{A}_\ell$ в более высоких размерностях мы будем мотивированы предложением 3.26. Опишем подробно конструкцию, предшествующую этому предложению.

Пусть $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_n$ – квадрики из софокусного семейства в $\mathbb{E}^d$. Пусть $\mathcal{O} = \ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n$ – такие прямые в $\mathcal{A}_\ell$, что каждая пара соседних прямых ℓ_i, ℓ_{i+1} удовлетворяет закону билиардного отражения от квадрики $\mathcal{Q}_{i+1}$ ($0 \leq i \leq n-1$); таким образом, эти прямые задают билиардную траекторию $\mathbf{t} = (\ell_0, \dots, \ell_n)$.

При $n \geq 1$ определим прямые $\ell_n^{(n)}, \ell_n^{(n-1)}, \dots, \ell_n^{(1)}$ следующим построением.

1. Положим $\ell_n^{(n)} = \ell_n$.
2. При $n - 1 \geq k \geq 1$ возьмем в качестве $\ell_n^{(k)}$ единственную прямую, образующую конфигурацию двойного отражения с ℓ_{k-1} , ℓ_k и $\ell_n^{(k+1)}$.

Заметим, что при этом всякая прямая из последовательности

$$\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_k, \ell_n^{(k+1)}, \dots, \ell_n^{(n)}$$

получена из предыдущей отражением соответственно от

$$\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_k, \mathcal{Q}_n, \mathcal{Q}_{k+1}, \dots, \mathcal{Q}_{n-1}.$$

Рассматривая начальные подпоследовательности $\ell_0, \dots, \ell_k$ ($1 \leq k \leq n$), мы аналогично определяем прямые $\ell_k^{(1)}, \dots, \ell_k^{(k)}$. Заметим, что для всякого k прямая $\ell_k^{(1)}$ пересекает ℓ_0 и эти две прямые связаны законом отражения от $\mathcal{Q}_k$.

Таким образом, построено отображение $\mathcal{D}$ из множества $\mathcal{TB}(\mathcal{O})$ билиардных траекторий с фиксированной начальной прямой $\ell_0 = \mathcal{O}$ в упорядоченные наборы прямых из $\mathcal{A}_\ell$, пересекающих $\mathcal{O}$:

$$\mathcal{D}: \quad \mathbf{t} = (\ell_0, \dots, \ell_n) \quad \mapsto \quad (\ell_1^{(1)}, \dots, \ell_n^{(1)}),$$

где $\ell_k^{(1)}$ пересекается с $\mathcal{O}$ в соответствии с билиардным законом отражения от квадрики $\mathcal{Q}_k$.

Проделав обратное построение, мы определим морфизм $\mathcal{B}$, обратный к $\mathcal{D}$, который набору n прямых, пересекающих $\mathcal{O}$, сопоставляет единственную билиардную траекторию длины n с начальной прямой $\ell_0 = \mathcal{O}$:

$$\mathcal{B}: \quad (\ell_1^{(1)}, \dots, \ell_n^{(1)}) \quad \mapsto \quad (\ell_0, \dots, \ell_n).$$

Итак, отображение $\mathcal{B}$ задает *билиардное представление* упорядоченного набора прямых, пересекающих $\mathcal{O}$.

Если вместо упорядоченных наборов n прямых мы хотим рассматривать просто дивизоры на кривой $\mathcal{C}_\mathcal{O}$, то мы должны ввести следующее отношение α между билиардными траекториями: будем говорить, что две траектории α -эквивалентны, если одна может быть получена из другой конечным набором *элементарных перестроек с двойным отражением*. Элементарная перестройка с двойным отражением переводит траекторию $p_1 p_2 \dots p_{k-1} p_k p_{k+1} \dots p_n$ в траекторию $p_1 p_2 \dots p_{k-1} p'_k p_{k+1} \dots p_n$, если прямые p_{k-1} , p_k , p'_k , p_{k+1} образуют конфигурацию двойного отражения.

Из теоремы о двойном отражении непосредственно следует, что две траектории $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$ с одним и тем же начальным отрезком $\mathcal{O} = \ell_0$ являются α -эквивалентными тогда и только тогда, когда n -наборы $\mathcal{D}(\mathbf{t}_1)$ и $\mathcal{D}(\mathbf{t}_2)$ получаются один из другого перестановкой.

Итак, $\mathcal{D}$ можно рассматривать как отображение

$$\widehat{\mathcal{TB}}(\mathcal{O}) = \mathcal{TB}(\mathcal{O}) / \alpha$$

в множество положительных дивизоров на $\mathcal{C}_\mathcal{O}$, и оно задает *дивизориальное представление* билиардных траекторий.

Следующий результат, вытекающий из [42], является своего рода теоремой Римана–Роха в рамках данного подхода.

ЛЕММА 3.29. *Минимальная билиардная траектория длины s из x в y единственна с точностью до α -эквивалентности. Если существуют две α -неэквивалентных траектории одной длины $k > s$ из x в y , то существует траектория из x в y длины $k - 2$.*

Теперь на множестве $\widehat{\mathcal{TB}}(\mathcal{O})$ мы можем ввести операцию сложения. Для двух билиардных траекторий $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \widehat{\mathcal{TB}}(\mathcal{O})$ мы определим их сумму формулой

$$\mathbf{t}_1 \oplus \mathbf{t}_2 := \mathcal{B}(\mathcal{D}(\mathbf{t}_1) + \mathcal{D}(\mathbf{t}_2)).$$

По теореме о двойном отражении эта операция ассоциативна и коммутативна.

ТЕОРЕМА 3.30. *Множество $\widehat{\mathcal{TB}}(\mathcal{O}) = \mathcal{TB}(\mathcal{O})/\alpha$ с операцией сложения является коммутативной полугруппой. Она изоморфна полугруппе эффективных дивизоров на кривой $\mathcal{C}_0$, не содержащих точек, соответствующих касаниям.*

Заметим, что траектория, состоящая из одной прямой $\mathcal{O}$, будет нулевым элементом в $\widehat{\mathcal{TB}}(\mathcal{O})$.

Теперь определим следующее отношение эквивалентности на множестве конечных билиардных траекторий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.31. *Две билиардные траектории β -эквивалентны, если их начальные и конечные отрезки совпадают и эти траектории имеют одинаковую длину.*

Мы обозначим множество классов β -эквивалентных билиардных траекторий длины n с фиксированным начальным отрезком $\mathcal{O}$ через $\widetilde{\mathcal{TB}}(\mathcal{O})(n)$ и положим

$$\widetilde{\mathcal{TB}}(\mathcal{O}) = \bigcup_n \widetilde{\mathcal{TB}}(\mathcal{O})(n).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.32. *Отношение β согласуется со сложением билиардных траекторий.*

Для доказательства нам потребуется следующая важная лемма.

ЛЕММА 3.33. *Пусть $\mathbf{t} = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{2k}, \ell_{2k+1} = \ell_1)$ – замкнутая билиардная траектория, а $p_1 \in \mathcal{A}_\ell$ – прямая, пересекающая ℓ_1 . Итеративной процедурой построим прямые $p_2, \dots, p_{2k+1}$, для которых четверки $p_i, \ell_i, p_{i+1}, \ell_{i+1}$ ($1 \leq i \leq 2k$) образуют конфигурацию двойного отражения. Тогда $p_{2k+1} = p_1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем рассуждать по индукции. При $k = 2$ прямые $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ образуют конфигурацию двойного отражения и результат следует по теореме о двойном отражении.

Пусть теперь $k > 2$. Тогда $(\ell_1, \dots, \ell_k)$ и $(\ell_1 = \ell_{2k+1}, \ell_{2k}, \dots, \ell_k)$ – это билиардные траектории одной длины из ℓ_1 в ℓ_k . Если они α -эквивалентны, то утверждение следует из теоремы о двойном отражении. Если они α -неэквивалентны, то по лемме 3.29 мы имеем билиардную траекторию $\ell'_1 = \ell_1, \ell'_2, \dots, \ell'_{k-2} = \ell_k$. Теперь утверждение леммы следует по предположению индукции для траекторий

$$(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k = \ell'_{k-2}, \ell'_{k-3}, \dots, \ell'_1 = \ell_1)$$

и

$$(\ell'_1, \ell'_2, \dots, \ell'_{k-2} = \ell_k, \ell_{k+1}, \dots, \ell_{2k+1} = \ell_1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО предложения 3.32. Мы должны доказать импликацию

$$\mathbf{t}_1 \sim_\beta \mathbf{t}'_1, \quad \mathbf{t}_2 \sim_\beta \mathbf{t}'_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 \sim_\beta \mathbf{t}'_1 + \mathbf{t}'_2.$$

Ясно, что достаточно доказать ее в случае, когда $\mathbf{t}_2 = \mathbf{t}'_2$, а $\mathbf{t}_2$ имеет длину 2. Пусть $\mathbf{t}_2 = (\mathcal{O}, p)$, где p получена из $\mathcal{O}$ отражением от квадрики $\mathcal{Q}_p$. Тогда траектории $\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2$ и $\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}'_2$ получены добавлением к $\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{t}'_1$ по одному отрезку. Эти отрезки связаны с последними отрезками траекторий $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}'_1$ законом отражения от $\mathcal{Q}_p$. Поскольку $\mathbf{t}_1 \sim_\beta \mathbf{t}'_1$, их последние отрезки совпадают и предложение следует из леммы 3.33 для траектории

$$(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n = \ell'_n, \ell'_{n-1}, \ell'_{n-2}, \dots, \ell'_1 = \ell_1),$$

где $\mathbf{t}_1 = (\ell_1, \dots, \ell_n)$, $\mathbf{t}_2 = (\ell'_1, \dots, \ell'_n)$.

Структура группы на $\mathcal{A}_\ell$. Мы хотим использовать алгебру, построенную на множестве билиардных траекторий, чтобы ввести алгебраическую структуру на $\mathcal{A}_\ell$ с операцией, естественно связанной с законом билиардного отражения.

Следующий результат содержится в [73].

ТЕОРЕМА 3.34. *Для произвольных прямых x и y из $\mathcal{A}_\ell$ существует такой набор из не более чем $d - 1$ квадрик из софокусного семейства, что y получается из x последовательными отражениями от этих квадрик.*

Дивизориальное представление соответствующей билиардной траектории длины $s \leq d - 1$ назовем s -щеткой y относительно x .

Теперь мы можем задать на $\mathcal{A}_\ell$ структуру группы, привязанную к фиксированной прямой из этого множества.

Нейтральный элемент. Фиксируем прямую $\mathcal{O} \in \mathcal{A}_\ell$.

Обратный элемент. Пусть x – произвольная прямая в $\mathcal{A}_\ell$, а $\mathcal{D}(x)$ – дивизориальное представление минимальной билиардной траектории, связывающей $\mathcal{O}$ с x . Определим $-x$ как последний отрезок билиардной траектории $\mathcal{B}(\tau\mathcal{D}(x))$, где τ – гиперэллиптическая инволюция $\mathcal{C}_\mathcal{O}$.

Сложение. Для двух прямых x и y из $\mathcal{A}_\ell$ обозначим их щетки относительно $\mathcal{O}$ через S_1 и S_2 . Положим

$$x + y := (-1)^{|S_1|+|S_2|+1} \mathcal{EB}(\tau^{|S_1|+1}(S_1), \tau^{|S_2|+1}(S_2)),$$

где $\mathcal{EB}(\tau^{|S_1|+1}(S_1), \tau^{|S_2|+1}(S_2))$ – последний отрезок билиардной траектории $\mathcal{B}(\tau^{|S_1|+1}(S_1), \tau^{|S_2|+1}(S_2))$.

Из сказанного выше, аналогично случаю рода 2, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.35. *Множество $\mathcal{A}_\ell$ с определенной выше операцией является абелевой группой.*

Заметим, что можно ввести еще одно дивизориальное представление биллиардных траекторий, сопоставляющее траектории дивизор степени 0. Это представление использовалось в [44] и было явно описано в [26], [29]. Положительная компонента дивизора в этом представлении совпадает с дивизором, полученным с помощью $\mathcal{D}$, а отрицательная часть инвариантна относительно гиперэллиптической инволюции. Более того, как следует из [44], две траектории с начальным отрезком $\mathcal{O}$ имеют один и тот же конечный отрезок тогда и только тогда, когда их представления являются эквивалентными дивизорами. Отсюда следует, что групповая структура на $\mathcal{A}_\ell$ изоморфна фактору якобиана кривой $\mathcal{C}_\mathcal{O}$ по конечной подгруппе, порожденной точками, соответствующими квадрикам-каустикам.

3.4. s -слабые траектории Понселе. Как следует из теоремы 3.34, мы можем теперь ввести следующие иерархии понятий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.36. Для данных прямых x и y из $\mathcal{A}_\ell$ скажем, что они s -скрещены, если s – наименьшее число, для которого существует такой набор из $s+1 \leq d-1$ квадратик $\mathcal{Q}_k$, $k = 1, \dots, s+1$, из софокусного семейства, что прямая y получена из x последовательными отражениями от $\mathcal{Q}_k$. Если прямые x и y пересекаются, то они 0-скрещены. Они (-1) -скрещены, если совпадают.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.37. Пусть S – система из n квадратик $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_n$ софокусного семейства. Для системы прямых $\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n$ в $\mathcal{A}_\ell$, где каждая пара соседних прямых $\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_{i+1}$ удовлетворяет биллиардному закону отражения от $\mathcal{Q}_{i+1}$ ($0 \leq i \leq n-1$), мы скажем, что она образует s -слабую траекторию Понселе длины n , ассоциированную с системой S , если прямые $\mathcal{O}_0$ и $\mathcal{O}_n$ s -скрещены.

s -слабые траектории Понселе мы будем иногда называть $(d-s-2)$ -резонансными биллиардными траекториями. Периодические траектории, т. е. обобщенные классические многоугольники Понселе, являются (-1) -слабыми траекториями Понселе или, другими словами, $(d-1)$ -резонансными биллиардными траекториями; они аналитически описаны в [29], [26].

Очередной нашей задачей является аналитическое описание s -слабых траекторий Понселе длины r , что станет обобщением результатов из [29]. Здесь мы в полной мере используем методы и возможности биллиардной алгебры.

Чтобы дать представление об основной идее, рассмотрим сначала систему S из r одинаковых квадратик $\mathcal{Q}_1 = \dots = \mathcal{Q}_r$ софокусного семейства. Пусть набор прямых $\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_r$ из $\mathcal{A}_\ell$ образует s -слабую траекторию Понселе длины r , ассоциированную с набором S . Тогда

$$\mathcal{O}_r = r\mathcal{O}_1^{(1)}$$

для некоторой прямой $\mathcal{O}_1^{(1)}$, пересекающей $\mathcal{O}_0$. Снова пользуясь условием s -скрещенности $\mathcal{O}_r$ и $\mathcal{O}_0$, получаем

$$\mathcal{O}_r = \mathcal{O}_1'^{(1)} + \dots + \mathcal{O}_{s+1}'^{(1)},$$

где $\mathcal{O}_i'^{(1)} =: P_i$ – некоторые прямые, пересекающие $\mathcal{O}_0$. Два последних уравнения приводят нас к следующему выводу.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.38. *Существование s -слабой траектории Понселе длины r эквивалентно существованию такой мероморфной функции f на гиперэллиптической кривой $\mathcal{C}_\ell$, что f имеет нуль порядка r в $P = \mathcal{O}_1^{(1)}$ и единственный полюс на “бесконечности” E , порядок полюса равен $n = r + s + 1$.*

Теперь мы выведем явное аналитическое условие типа Кэли. Как и в [26], рассмотрим пространство $\mathcal{L}(nE)$ мероморфных функций на $\mathcal{C}_\ell$, имеющих единственный полюс порядка не выше n в бесконечно удаленной точке E . Пусть $(f_1, \dots, f_k)$ – некоторый базис в этом пространстве, $k = \dim \mathcal{L}(nE)$. Рассмотрим векторы

$$v_1, \dots, v_r \in \mathbb{C}^k,$$

где $v_i^j = f_j^{(i-1)}(P)$, и векторы

$$u_1, \dots, u_{s+1} \in \mathbb{C}^k,$$

где $u_i^j = f_j(P_i)$. Из условия (см. [26])

$$\text{rank}[v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_{s+1}] < n - g + 1$$

получаем

$$\text{rank}[v_1, \dots, v_r] < r + s - g + 2 = r + s - d + 3.$$

Мы можем переписать это условие в форме привычной для условий типа Кэли.

ТЕОРЕМА 3.39. *Существование s -слабой траектории Понселе длины r эквивалентно неравенству*

$$\text{rank} \begin{pmatrix} B_{d+1} & B_{d+2} & \dots & B_{m+1} \\ B_{d+2} & B_{d+3} & \dots & B_{m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{d+m-s-2} & B_{d+m-s-1} & \dots & B_{r-1} \end{pmatrix} < m - d + 1$$

при $r + s + 1 = 2m$ и неравенству

$$\text{rank} \begin{pmatrix} B_d & B_{d+1} & \dots & B_{m+1} \\ B_{d+1} & B_{d+2} & \dots & B_{m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{d+m-s-2} & B_{d+m-s-1} & \dots & B_{r-1} \end{pmatrix} < m - d + 2$$

при $r + s + 1 = 2m + 1$.

Через $B_0, B_1, B_2, \dots$ мы обозначаем здесь коэффициенты тейлоровского разложения функции $y = \sqrt{\mathcal{P}(x)}$ в окрестности P , где $y^2 = \mathcal{P}(x)$ – уравнение обобщенной кривой Кэли, а $\mathcal{P}(x)$ – полином, заданный в (2.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{L}((r+s+1)E)$ – линейное пространство мероморфных функций на $\mathcal{C}_\ell$ с единственным полюсом в бесконечно удаленной точке E , порядка не выше $r+s+1$. По теореме Римана–Роха

- (i) $\dim \mathcal{L}((r+s+1)E) = \left\lfloor \frac{r+s+1}{2} \right\rfloor + 1$ при $r+s+1 \leq 2d-1$,
- (ii) $\dim \mathcal{L}((r+s+1)E) = r+s-g+1$ при четном $r+s+1$, превосходящем $2d-2$,
- (iii) $\dim \mathcal{L}((r+s+1)E) = r+s-g+2$ при нечетном $r+s+1$, превосходящем $2d-1$.

В этих трех случаях мы можем выбрать соответственно следующие базисы:

- (i) $1, x, \dots, x^m$, где $m = \left\lfloor \frac{r+s+1}{2} \right\rfloor \leq d$;
- (ii) $1, x, \dots, x^m, y, xy, \dots, x^{m-d}$, при $r+s+1 = 2m \geq 2d-2$;
- (iii) $1, x, \dots, x^m, y, xy, \dots, x^{m-d+1}$ при $r+s+1 = 2m+1 \geq 2d-2$.

Теперь утверждение теоремы следует из рассуждений, предшествующих формулировке.

ПРИМЕР 3.40. При $s = -1$ неравенства в теореме 3.39 оказываются условиями периодичности билиардной траектории (см. [26], [29]).

ПРИМЕР 3.41. Условие существования $(d-3)$ -слабой траектории Понселе длины r эквивалентно равенствам

$$\det \begin{pmatrix} B_{d+1} & B_{d+2} & \dots & B_{m+1} \\ B_{d+2} & B_{d+3} & \dots & B_{m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{m+1} & B_{m+2} & \dots & B_{r-1} \end{pmatrix} = 0, \quad r+d-2 = 2m;$$

$$\det \begin{pmatrix} B_d & B_{d+1} & \dots & B_{m+1} \\ B_{d+1} & B_{d+2} & \dots & B_{m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{m+1} & B_{m+2} & \dots & B_{r-1} \end{pmatrix} = 0, \quad r+d-2 = 2m+1.$$

ПРИМЕР 3.42. При $r+s < 2d-1$, как следует из доказательства теоремы 3.39, s -слабая траектория Понселе длины r может существовать только когда гиперэллиптическая кривая $\mathcal{C}_\ell$ особая.

3.5. Обобщенная теорема Вейра и пространственная теорема Понселе в форме Гриффитса–Харриса в больших размерностях. В этом пункте мы получим многомерные обобщения результатов из [43], [75], [4]. Хороший обзор по этим классическим результатам можно найти в [18]. Двойственная версия [4] приведена в [21].

Каждая квадрака $\mathcal{Q}$ из $\mathbb{P}^{2d-1}$ содержит не более двух унирациональных семейств $(d-1)$ -мерных линейных подпространств. Такие унирациональные семейства обычно называют *прямолинейными образующими квадрики*.

ТЕОРЕМА 3.43. Пусть $\mathcal{Q}_1$ и $\mathcal{Q}_2$ – две общие квадрики в $\mathbb{P}^{2d-1}$ с гладким пересечением V , и пусть $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ – их прямолинейные образующие. Если существует такая замкнутая цепочка

$$L_1, L_2, \dots, L_{2n}, L_{2n+1} = L_1$$

различных $(d-1)$ -мерных линейных подпространств, что $L_{2i-1} \in \mathcal{R}_1$, $L_{2i} \in \mathcal{R}_2$ ($1 \leq i \leq n$) и $L_j \cap L_{j+1} \in F(V)$ ($1 \leq j \leq 2n$), то такие замкнутые цепочки подпространств длины $2n$ проходят через каждую точку $F(V)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждое из унирациональных семейств $\mathcal{R}_i$ задает инволюцию τ_i на абелевом многообразии $F(V)$. Эта инволюция переставляет два $(d-2)$ -мерных подпространства в пересечении образующей $\mathcal{R}_i$ с V . Пусть $\text{Tr}: F(V) \rightarrow F(V)$ – композиция этих инволюций, а $L := L_{2n} \cap L_1 \in F(V)$. Поскольку Tr – сдвиг на $F(V)$, для которого $\text{Tr}^n(L) = L$, мы видим, что Tr имеет порядок n , что и дает утверждение теоремы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.44. Цепочки, рассмотренные в теореме 3.43, назовем *обобщенными цепочками Вейра*.

Эту теорему можно сформулировать и для негладких пересечений, но мы не будем в это вдаваться. Вместо этого рассмотрим случай двух квадрик (3.1) и (3.2), как в п. 3.3. Используя проекцию π^* , получаем следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.45. *Обобщенная цепочка Вейра длины $2n$ проецируется на многоугольник Понселе длины $2n$, описанный около квадрик $\mathcal{Q}_{\alpha_1}^p, \dots, \mathcal{Q}_{\alpha_{d-1}}^p$ и попеременно вписанный в две фиксированные софокусные квадрики (проекции $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$). Наоборот, всякий такой многоугольник Понселе длины $2n$, описанный около квадрик $\mathcal{Q}_{\alpha_1}^p, \dots, \mathcal{Q}_{\alpha_{d-1}}^p$ и попеременно вписанный в две фиксированные софокусные квадрики, можно поднять до обобщенной цепочки Вейра длины $2n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение вытекает из [41; лемма 4.1, следствие 4.2] и леммы 3.14.

Таким образом, мы получаем соответствие между обобщенными цепочками Вейра и многоугольниками Понселе, описанными около $d-1$ фиксированной квадрики и попеременно вписанными в две квадрики из софокусного семейства. Такие многоугольники Понселе были в числе прочего полностью аналитически описаны в [29] (см. пример 4 в этой работе).

Заметим, что соответствие между классической теоремой Вейра в $\mathbb{P}^3$ и классической теоремой Понселе о двух кониках на плоскости было отмечено Гурвицем в [75]. Однако используемая нами здесь проекция не является непосредственным обобщением проекции, использованной Гурвицем.

Ломаные, описанные около коники и попеременно вписанные в две другие коники, возникают в [31] в качестве примера. Наш результат в минимальной размерности дает условие замкнутости такой ломаной; см. следствие 1 в [29].

Укажем также, что если прямолинейные образующие $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ связаны обобщенной цепочкой Вейра длины $2n$, то то же выполнено для $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_1$ и для пары $\mathcal{R}'_1, \mathcal{R}'_2$ “дополнительных” семейств прямолинейных образующих на $\mathcal{Q}_1$ и $\mathcal{Q}_2$.

Теперь мы можем сформулировать новое многомерное обобщение пространственной теоремы Понселе, принадлежащей Гриффитсу и Харрису [4].

ТЕОРЕМА 3.46. Пусть $\mathcal{Q}_1^*$ и $\mathcal{Q}_2^*$ двойственны к общим квадрикам в $\mathbb{P}^{2d-1}$ с гладким пересечением V . Обозначим через $\mathcal{R}_i, \mathcal{R}'_i$ пары унирациональных семейств $(d-1)$ -мерных подпространств, лежащих в $\mathcal{Q}_i^*$. Предположим, что $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$, а также $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}'_2$ связаны обобщенными цепочками Вейра. Тогда существует конечная конфигурация, вписанная и описанная в обе квадрики $\mathcal{Q}_1$ и $\mathcal{Q}_2$. Таких конфигураций бесконечно много.

“Конфигурации” из предыдущей теоремы могут быть описаны детальнее как конфигурации d -мерных “граней”, бикасательных к квадракам $\mathcal{Q}_1$ и $\mathcal{Q}_2$. Их пересечения – $(d-1)$ -мерные “ребра”, попеременно принадлежащие семействам прямолинейных образующих на $\mathcal{Q}_1^*$ и $\mathcal{Q}_2^*$. Пересечения “ребер” – это $(d-2)$ -мерные “вершины”, принадлежащие $F(V)$.

Доказательство последней теоремы основано на следующей лемме из [42].

ЛЕММА 3.47. Пусть $\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}^{2d-1}$ – квадрака ранга не меньше $2d-1$ и $x \subset \mathcal{Q}$ – линейное подпространство размерности $d-2$. Если $\mathcal{Q}$ особая, то дополнительно допустим, что x не содержит вершины. Тогда для всякой системы образующих $\mathcal{R}$ на $\mathcal{Q}$ существует единственное $(d-1)$ -мерное линейное подпространство $s = s(\mathcal{R}, x)$ с тем свойством, что $s \in \mathcal{R}$ и $x \subset s$.

3.6. Сетка Понселе–Дарбу и многомерные обобщения.

3.6.1. Историческое замечание о наследии Дарбу. В [44] (том 3, книга VI, гл. I) Дарбу показал, что поверхности Лиувилля – это в точности класс поверхностей, на которых имеется ортогональная система кривых, которые можно рассматривать как геодезические коники двумя или, что эквивалентно, бесконечным числом способов. Эти координатные кривые являются аналогами систем софокусных коник в евклидовой плоскости. Ввиду этого, важнейшие свойства коник можно обобщить на все поверхности Лиувилля (см. [44], а также обзор и разъяснения в [29]). Вот цитата с описанием одного из таких свойств:

“Рассмотрим переменный многоугольник, все стороны которого являются геодезическими, касающимися одной и той же координатной кривой. Тогда последняя вершина многоугольника будет описывать некоторую координатную кривую и тем же свойством будут обладать точки пересечения произвольных пар сторон многоугольника”.

Здесь мы видим не только обобщение теоремы Понселе для поверхностей Лиувилля. Сверх того для многоугольника Понселе, описанного около фиксированной координатной кривой, каждая вершина которого движется по какой-либо координатной кривой, Дарбу утверждает, что точка пересечения произвольной пары его сторон также будет описывать координатную кривую.

Заметим, что ослабленная форма этого утверждения, хотя и с некоторыми усовершенствованиями, недавно была переоткрыта в [76], а более элементарное доказательство результата из [76] было опубликовано в [77]. Основная теорема работы [76] соответствует случаю фиксированного многоугольника Понселе, связанного с парой эллипсов в евклидовой плоскости. В каком-то смысле это еще одно свидетельство в пользу нашего замечания в [26] и [29], что работы Дарбу по билиярдам и теореме Понселе, по-видимому, неизвестны современным математикам.

Этот пункт посвящен многомерному обобщению теоремы Дарбу, связанному с билиардными траекториями внутри эллипсоида в d -мерном евклидовом пространстве.

3.6.2. Сетка Понселе–Дарбу в евклидовой плоскости. Перед тем как перейти к многомерным обобщениям, изложим здесь чуть более элементарное доказательство некоторого усиления соответствующего результата в плоском случае.

Рис. 26. Биллиардные траектории с каустикой-эллипсом и точки пересечения соответствующих отрезков

Рис. 27. Биллиардные траектории с каустикой-эллипсом и точки пересечения соответствующих отрезков

ТЕОРЕМА 3.48. Пусть $\mathcal{E}$ – эллипс в $\mathbb{E}^2$, а $(a_m)_{m \in \mathbb{Z}}$, $(b_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ – последовательности отрезков биллиардных траекторий в $\mathcal{E}$ с одной и той же каустикой. Тогда все точки $a_m \cap b_m$ ($m \in \mathbb{Z}$) лежат на одном и том же коническом сечении $\mathcal{K}$, софокусном с $\mathcal{E}$.

Более того, если дополнительно предположить, что каустика – эллипс, и если обе траектории обходят каустик в одном и том же направлении, то $\mathcal{K}$ – также эллипс; если же траектории обходят каустик в противоположных направлениях, то $\mathcal{K}$ – гипербола (см. рис. 26).

Если же каустика является гиперболой, а отрезки a_m , b_m пересекают большую ось $\mathcal{E}$ в одном и том же направлении, то $\mathcal{K}$ – гипербола, в противном случае это эллипс (см. рис. 27).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Этот результат доказывается применением теоремы о двойном отражении. А именно, прямые a_0 и b_0 пересекаются в точке, лежащей на некотором эллипсе и некоторой гиперболе из софокусного семейства. Они удовлетворяют закону отражения от какой-то одной из этих кривых, в зависимости от направления биллиардного движения вдоль прямых. Теперь по теореме о двойном отражении a_1 и b_1 удовлетворяют закону отражения от той же коники. То же выполнено по индукции и для всякой пары a_m , b_m .

Для доказательства второй части теоремы достаточно заметить, что направление обхода эллипса меняется при отражении от гипербол и сохраняется при отражении от эллипсов из софокусного семейства. Если ориентированная прямая проходит между фокусами, то направление, в котором она пересекает ось, содержащую фокусы, меняется при отражении от эллипсов и сохраняется при отражении от гипербол.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.49. Пусть $(a_m)_{m \in \mathbb{Z}}$, $(b_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ – две последовательности отрезков билиардных траекторий внутри эллипса $\mathcal{E}$, имеющих одну и ту же каустику. Если эта каустика – эллипс, а траектории обходят его в противоположных направлениях, то все точки $a_m \cap b_m$ ($m \in \mathbb{Z}$) лежат на двух симметричных относительно центра четвертях гиперболы, софокусной с $\mathcal{E}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathcal{E}_c$ эллипс, являющийся общей каустикой рассматриваемых билиардных траекторий. Мы можем ввести метрику μ на $\mathcal{E}_c$, в которой $\mu(AB) = \mu(CD)$ тогда и только тогда, когда касательные в A, B и C, D пересекаются в точках одного и того же эллипса из софокусного семейства. В частности, это значит, что точки, в которых два последовательных отрезка траектории касаются каустики $\mathcal{E}'$, всегда расположены на одном и том же расстоянии друг от друга.

Допустим, что a_0 и b_0 пересекаются в точке верхней левой четверти гиперболы $\mathcal{K}$ (см. рис. 26). Тогда, используя теорему о двойном отражении, можно доказать, что всякая пара точек касания таких отрезков с каустикой $\mathcal{E}'$ лежит на равном μ -расстоянии от верхней левой точки пересечения $\mathcal{K}$ и $\mathcal{E}_c$. Поскольку μ симметрична относительно начала координат, они также равноудалены от нижней правой точки пересечения, но не равноудалены от двух других точек пересечения. То же выполняется для любой пары a_m, b_m . Итак, их точки пересечения лежат на двух центрально симметричных четвертях гиперболы.

Теперь обобщенное утверждение о сетках Понселе–Дарбу оказывается непосредственным следствием теоремы 3.48.

ТЕОРЕМА 3.50. Пусть $(\ell_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ – последовательность отрезков билиардной траектории внутри эллипса $\mathcal{E}$. Тогда каждое из множеств

$$P_k = \bigcup_{i-j=k} \ell_i \cap \ell_j, \quad Q_k = \bigcup_{i+j=k} \ell_i \cap \ell_j \quad (k \in \mathbb{Z})$$

лежит на некоторой конике, софокусной с $\mathcal{E}$.

Если каустика траектории (ℓ_m) – эллипс, то множества P_k лежат на эллипсах, а Q_k лежат на гиперболах. Если эта каустика – гипербола, то множества P_k, Q_k лежат на эллипсах при четных k и на гиперболах при нечетных k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства утверждения относительно P_k положим $a_m = \ell_m$, $b_m = \ell_{m+k}$ и применим теорему 3.48. Для Q_k положим $a_m = \ell_m$ и $b_m = \ell_{k-m}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.51. Заметим, что в теореме 3.50 доказан более общий результат, чем в [76], [77], поскольку мы не требуем замкнутости билиардной траектории. Кроме того, его можно сформулировать для любого конического сечения, не обязательно эллипса.

Основной результат [76] и [77] – это частное следствие теоремы 3.50:

СЛЕДСТВИЕ 3.52 [76], [77]. Пусть (ℓ_m) – замкнутая билиардная траектория внутри эллипса с каустикой-эллипсом. Тогда каждое множество P_k лежит на эллипсе, софокусном с $\mathcal{E}$, а Q_k лежит на софокусной гиперболе. (См. рис. 26.)

Продemonстрируем интересное свойство сеток Понселе–Дарбу.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.53. Пусть (ℓ_m) – билиардная траектория в эллипсе $\mathcal{E}$ с каустикой-эллипсом $\mathcal{E}_c$. Тогда эллипс, содержащий множество P_k , зависит только от k , $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}_c$. Иными словами, этот эллипс оказывается одним и тем же при любом выборе траектории в $\mathcal{E}$ с каустикой $\mathcal{E}_c$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Этот результат доказывается с использованием теоремы о двойном отражении, аналогично теореме 3.48. Однако мы проведем доказательство иначе, что даст возможность явно вычислить эллипс, содержащий P_k .

Билиарду в $\mathcal{E}$ и фиксированной каустике $\mathcal{E}_c$ можно сопоставить эллиптическую кривую (см. [15], [16], [30], [52]). Каждой точке этой кривой соответствует коника из софокусного семейства. С другой стороны, билиардное движение можно рассматривать как линейное движение по якобиану кривой (т.е. по самой кривой, поскольку мы в эллиптическом случае), со сдвигами, соответствующими отскокам. Точнее, сдвиг происходит в точности на элемент эллиптической кривой, отвечающий эллипсу, от которого отражается отрезок траектории.

Итак, если точке M эллиптической кривой сопоставлен эллипс $\mathcal{E}$, то множество P_k лежит на эллипсе, сопоставленном точке kM .

3.6.3. Сетки в произвольной размерности. Хотя теорема 3.48 является некоторым продвижением в понимании сеток Понселе–Дарбу, существенным прорывом в этом направлении, с нашей точки зрения, оказывается исследование многомерного случая. Этот анализ основывается на введении многомерных аналогов сеток и введенном нами понятии s -скрещенных прямых.

ТЕОРЕМА 3.54. Пусть $(a_m)_{m \in \mathbb{Z}}$, $(b_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ – две последовательности отрезков билиардных траекторий внутри эллипсоида $\mathcal{E}$ в $\mathbb{E}^d$, имеющих одну и ту же $d-1$ каустикую. Допустим, что пара (a_0, b_0) s -скрещена и что последовательность отражений от квадрик $Q^1, \dots, Q^{s+1}$ реализует минимальную билиардную траекторию, связывающую a_0 с b_0 .

Тогда всякая пара (a_m, b_m) s -скрещена и минимальная билиардная траектория, связывающая эту пару прямых, задается последовательностью отражений от тех же квадрик $Q^1, \dots, Q^{s+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство можно провести с использованием теоремы о двойном отражении аналогично теореме 3.48.

Этот результат можно сформулировать и для произвольной квадрики, а не только для эллипсоида.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.55. Пусть $\mathcal{E}$ – эллипсоид в $\mathbb{E}^d$, $Q_1, \dots, Q_{d-1}$ – софокусные с $\mathcal{E}$ квадрики и k – целое число.

Предположим, что существует траектория (ℓ_m) билиарда внутри $\mathcal{E}$ с каустиками $Q_1, \dots, Q_{d-1}$, у которой пара (ℓ_0, ℓ_k) s -скрещена, причем минимальная билиардная траектория, соединяющая ℓ_0 с ℓ_k , реализуется последовательностью отражений от квадрик $Q^1, \dots, Q^{s+1}$, софокусных с $\mathcal{E}$.

Тогда для всякой билиардной траектории $(\hat{\ell}_m)$ внутри $\mathcal{E}$ с каустиками $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_{d-1}$, пары прямых $(\hat{\ell}_m, \hat{\ell}_{m+k})$ s -скрещены и минимальная билиардная траектория, соединяющая $\hat{\ell}_m$ с $\hat{\ell}_{m+k}$, реализуется последовательностью отражений от $\mathcal{Q}^1, \dots, \mathcal{Q}^{s+1}$.

Авторы признательны рецензенту за полезные замечания.

Список литературы

- [1] В. В. Козлов, Д. В. Трещёв, *Билиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами*, Изд-во МГУ, М., 1991, ISBN: 5-211-01566-5, 168 с.; англ. пер.: V. V. Kozlov, D. V. Treschev, *Billiards. A genetic introduction to the dynamics of systems with impacts*, Transl. Math. Monogr., **89**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, ISBN: 0-8218-4550-0, viii+171 pp.
- [2] J. V. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, Mett, Paris, 1822; Reprint of the 2nd (1866) ed.: vol. I, II, Les Grands Classiques Gauthier-Villars, Gauthier-Villars, Sceaux, 1995, vol. I, ISBN: 2-87647-132-9, xxxii+429 pp.; vol. II, viii+453 pp.
- [3] Я. К. Г. Якоби, *Лекции по динамике*, 2-е изд., стер., УРСС, М., 2004, ISBN: 5-354-00689-9, 271 с.; пер. с нем.: C. G. J. Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik. Gesammelte Werke, Supplementband*, G. Reimer, Berlin, 1884.
- [4] Ph. Griffiths, J. Harris, “A Poncelet theorem in space”, *Comment. Math. Helv.*, **52**:2 (1977), 145–160.
- [5] G. Darboux, *Principes de géométrie analytique*, Gauthier-Villars, Paris, 1917.
- [6] N. Trudi, “Rappresentazione geometrica immediata dell’ equazione fondamentale nella teoria delle funzioni ellittiche con diverse applicazioni”, *Memoria della R. Accademia delle Scienze di Napoli*, 1853, 63–99.
- [7] N. Trudi, “Studii intorno ad una singolare eliminazione, con applicazione alla ricerca delle relazione tra gli elementi di due coniche, l’una iscritta, l’altra circoscritta ad un poligono, ed ai corrispondenti teoremi di Poncelet”, *Atti di Napoli*, **1** (1863).
- [8] V. M. Buchstaber, A. P. Veselov, “Integrable correspondences and algebraic representations of multivalued groups”, *Internat. Math. Res. Notices*, **8** (1996), 381–400.
- [9] A. Cayley, “Developments on the porism of the in-and-circumscribed polygon”, *Philosophical magazine*, **7** (1854), 339–345.
- [10] A. Cayley, “Note on the porism of the in-and-circumscribed polygon”, *Philosophical magazine*, **6** (1853), 99–102.
- [11] A. Cayley, “On the porism of the in-and-circumscribed triangle, and on an irrational transformation of two ternary quadratic forms each into itself”, *Philosophical magazine*, **9** (1855), 513–518.
- [12] A. Cayley, “On the porism of the in-and-circumscribed triangle”, *Quart. Math. J.*, **1** (1857), 344–354.
- [13] A. Cayley, “On the a posteriori demonstration of the porism of the in-and-circumscribed triangle”, *Quart. Math. J.*, **2** (1858), 31–38.
- [14] A. Cayley, “On the porism of the in-and-circumscribed polygon”, *Philos. Trans. R. Soc. Lond.*, **51** (1861), 225–239.
- [15] H. Lebesgue, *Les coniques*, Gauthier-Villars, Paris, 1942, viii+190 pp.
- [16] Ph. Griffiths, J. Harris, “On Cayley’s explicit solution to Poncelet’s porism”, *Enseign. Math.* (2), **24**:1–2 (1978), 31–40.
- [17] M. Berger, *Geometry*, vol. I, II, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1987, vol. I, ISBN: 3-540-11658-3, xiv+428 pp.; vol. II, x+406 pp.
- [18] W. Barth, Th. Bauer, “Poncelet theorems”, *Expo. Math.*, **14**:2 (1996), 125–144.

- [19] W. Barth, J. Michel, “Modular curves and Poncelet polygons”, *Math. Ann.*, **295**:1 (1993), 25–49.
- [20] B. Jakob, “Moduli of Poncelet polygons”, *J. Reine Angew. Math.*, **436** (1993), 33–44.
- [21] Shau-Jin Chang, B. Crespi, Kang-Jie Shi, “Elliptical billiard systems and the full Poncelet’s theorem in n dimensions”, *J. Math. Phys.*, **34**:6 (1993), 2242–2256.
- [22] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Учеб. пособие, Наука, М., 1974, 431 с.; англ. пер.: V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Grad. Texts in Math., **60**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1978, ISBN: 0-387-90314-3, x+462 pp.
- [23] G. Darboux, “Sur les polygones inscrits et circonscrits à l’ellipsoïde”, *Bulletin de la Société philomathique*, **7** (1870), 92–94.
- [24] V. Dragović, M. Radnović, “Conditions of Cayley’s type for ellipsoidal billiard”, *J. Math. Phys.*, **39**:1 (1998), 355–362.
- [25] V. Dragović, M. Radnović, “On periodical trajectories of the billiard systems within an ellipsoid in $\mathbb{R}^d$ and generalized Cayley’s condition”, *J. Math. Phys.*, **39**:11 (1998), 5866–5869.
- [26] V. Dragović, M. Radnović, “Cayley-type conditions for billiards within k quadrics in $\mathbb{R}^d$ ”, *J. Phys. A*, **37**:4 (2004), 1269–1276.
- [27] V. Dragović, M. Radnović, “Corrigendum: Cayley-type conditions for billiards within k quadrics in $\mathbb{R}^d$ ”, *J. Phys. A*, **38**:36 (2005), 7927.
- [28] V. Dragović, M. Radnović, “A survey of the analytical description of periodic elliptical billiard trajectories”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **135**:4 (2006), 3244–3255.
- [29] V. Dragović, M. Radnović, “Geometry of integrable billiards and pencils of quadrics”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **85**:6 (2006), 758–790.
- [30] J. Moser, A. P. Veselov, “Discrete versions of some classical integrable systems and factorization of matrix polynomials”, *Comm. Math. Phys.*, **139**:2 (1991), 217–243.
- [31] A. P. Veselov, “Confocal surfaces and integrable billiards on the sphere and in the Lobachevsky space”, *J. Geom. Phys.*, **7**:1 (1990), 81–107.
- [32] V. Dragović, B. Jovanović, M. Radnović, “On elliptical billiards in the Lobachevsky space and associated geodesic hierarchies”, *J. Geom. Phys.*, **47**:2–3 (2003), 221–234.
- [33] V. Dragović, M. Radnović, “Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **14**:4–5 (2009), 479–494.
- [34] V. Dragović, “On integrable potential perturbations of the Jacobi problem for the geodesics on the ellipsoid”, *J. Phys. A*, **29**:13 (1996), L317–L321.
- [35] В. И. Драгович, “Интегрируемые возмущения бильярда Биркгофа внутри эллипса”, *ПММ*, **62**:1 (1998), 166–168; англ. пер.: V. I. Dragovich, “Integrable perturbations of the Birkhoff billiard inside an ellipse”, *J. Appl. Math. Mech.*, **62**:1 (1998), 159–162.
- [36] V. Dragović, “The Appell hypergeometric functions and classical separable mechanical systems”, *J. Phys. A*, **35**:9 (2002), 2213–2221.
- [37] Ю. Н. Федоров, “Эллипсоидальный бильярд с квадратичным потенциалом”, *Функц. анализ и его прил.*, **35**:3 (2001), 48–59; англ. пер.: Y. N. Fedorov, “An ellipsoidal billiard with quadratic potential”, *Funct. Anal. Appl.*, **35**:3 (2001), 199–208.
- [38] В. В. Козлов, “Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде”, *ПММ*, **59**:1 (1995), 3–9; англ. пер.: V. V. Kozlov, “Some integrable generalizations of the Jacobi problem on geodesics on an ellipsoid”, *J. Appl. Math. Mech.*, **59**:1 (1995), 1–7.
- [39] H. Knörrer, “Geodesics on the ellipsoid”, *Invent. Math.*, **59**:2 (1980), 119–143.
- [40] M. Reid, *The complete intersection of two or more quadrics*, Ph. D. Thesis, Trinity College, Cambridge, 1972.
- [41] V. Dragović, M. Radnović, “Hyperelliptic Jacobians as billiard algebra of pencils of quadrics: Beyond Poncelet porisms”, *Adv. Math.*, **219**:5 (2008), 1577–1607.

- [42] R. Donagi, “Group law on the intersection of two quadrics”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **7**:2 (1980), 217–239.
- [43] E. Weyr, “Über einige Sätze von Steiner und ihren Zusammenhang mit der zwei und zweigliedrigen Verwandtschaft der Grundgebilde ersten Grades”, *J. Reine Angew. Math.*, **71** (1870), 18–28.
- [44] G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*, vol. 2, 3, Gauthier-Villars, Paris, 1915.
- [45] В. В. Козлов, “Условия рациональности отношения эллиптических интегралов и большая теорема Понселе”, *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, 2003, № 4, 6–13; англ. пер.: V. V. Kozlov, “Rationality conditions for the ratio of elliptic integrals and the great Poncelet theorem”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **58**:4 (2003), 1–7.
- [46] V. V. Kozlov, “Billiards, invariant measures, and equilibrium thermodynamics. II”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **9**:2 (2004), 91–100.
- [47] В. В. Козлов, “Двузвенные бильярдные траектории: экстремальные свойства и устойчивость”, *ПММ*, **64**:6 (2000), 942–946; англ. пер.: V. V. Kozlov, “Two-link billiard trajectories: extremal properties and stability”, *J. Appl. Math. Mech.*, **64**:6 (2000), 903–907.
- [48] V. V. Kozlov, “Billiards, invariant measures, and equilibrium thermodynamics”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **5**:2 (2000), 129–138.
- [49] E. Gutkin, S. Tabachnikov, “Billiards in Finsler and Minkowski geometries”, *J. Geom. Phys.*, **40**:3–4 (2002), 277–301.
- [50] M. Radnović, “A note on billiard systems in Finsler plane with elliptic indicatrices”, *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, **74** (2003), 97–102.
- [51] S. Tabachnikov, “Ellipsoids, complete integrability and hyperbolic geometry”, *Mosc. Math. J.*, **2**:1 (2002), 185–196.
- [52] J. Moser, “Geometry of quadrics and spectral theory”, *The Chern Symposium*, 1979: *Proceedings of the International Symposium on Differential Geometry in honor of S.-S. Chern* (Berkeley, CA, 1979), Springer, New York–Berlin, 1980, 147–188.
- [53] Д. Д. Мордухай-Болтовской, “Теорема Понслэ на плоскости Лобачевского и эллиптические интегралы”, *Докл. АН СССР*, **77**:6 (1951), 961–964.
- [54] Shau Jin Chang, Kang Jie Shi, “Billiard systems on quadric surfaces and the Poncelet theorem”, *J. Math. Phys.*, **30**:4 (1989), 798–804.
- [55] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, т. 1, 2, РХД, Ижевск, 1999, ISBN: 5-7029-0352-8, 444 с., 446 с.; англ. пер.: A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, *Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification*, Chapman & Hall, Boca Raton, FL, 2004, ISBN: 0-415-29805-9, 730 pp.
- [56] А. В. Болсинов, С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, “Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности”, *УМН*, **45**:2 (1990), 49–77; англ. пер.: A. V. Bolsinov, S. V. Matveev, A. T. Fomenko, “Topological classification of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom. List of systems with small complexity”, *Russian Math. Surveys*, **45**:2 (1990), 59–94.
- [57] A. V. Bolsinov, A. A. Oshemkov, “Singularities of integrable Hamiltonian systems”, *Topological methods in the theory of integrable systems*, Cambridge Sci. Publ., Cambridge, 2006, 1–67.
- [58] E. Shlizerman, V. Rom-Kedar, “Hierarchy of bifurcations in the truncated and forced nonlinear Schrödinger model”, *Chaos*, **15**:1 (2005), 013107, 22 pp.
- [59] M. Radnović, V. Rom-Kedar, “Foliations of isonergy surfaces and singularities of curves”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **13**:6 (2008), 645–668.
- [60] H. Waalkens, H. R. Dullin, “Quantum monodromy in prolate ellipsoidal billiards”, *Ann. Physics*, **295**:1 (2002), 81–112.

- [61] С. В. Болотин, “Интегрируемые бильярды Биркгофа”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем., мех.*, 1990, № 2, 33–36; англ. пер.: S. V. Bolotin, “Integrable Birkhoff billiards”, *Mosc. Univ. Mech. Bull.*, **45**:2 (1990), 1–13.
- [62] D. Turaev, V. Rom-Kedar, “Soft billiards with corners”, *J. Statist. Phys.*, **112**:3–4 (2003), 765–813.
- [63] A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, “The geodesic flow of an ellipsoid is orbitally equivalent to the Euler integrable case in the dynamics of a rigid body”, *ДАН*, **339**:3 (1994), 253–296; англ. пер.: A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, “The geodesic flow of an ellipsoid is orbitally equivalent to the integrable Euler case in the dynamics of a rigid body”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **50**:3 (1994), 412–417.
- [64] M. Audin, “Courbes algébriques et systèmes intégrables: géodesiques des quadriques”, *Expo. Math.*, **12**:3 (1994), 193–226.
- [65] A. Delshams, Y. Fedorov, R. Ramírez-Ros, “Homoclinic billiard orbits inside symmetrically perturbed ellipsoids”, *Nonlinearity*, **14**:5 (2001), 1141–1195.
- [66] J. Bertrand, “Mémoire sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de Mécanique”, *Jour. de Math.*, **17** (1852), 121–174.
- [67] G. Darboux, “Sur un problème de mécanique”, *Archives Néerlandaises* (2), **6**:2 (1901), 371–376.
- [68] Э. Т. Уиттекер, *Аналитическая динамика*, 2-е изд., испр., УРСС, М., 2004, 500 с.; пер. с англ.: E. T. Whittaker, *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies with an introduction to the problem of three bodies*, 3rd ed., Univ. Press, Cambridge, 1927, xiv+456 pp.; Reprint of the 1937 edition: Cambridge Math. Lib., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988, ISBN: 0-521-35883-3, 456 pp.
- [69] A. Paul, “Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables et sur des équations linéaires aux dérivées partielles”, *Comptes Rendus*, **90** (1880), 296–298.
- [70] P. E. Appell, J. Kampé de Fériet, *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynômes d'Hermite*, Gauthier-Villars, Paris, 1926, 441 pp.
- [71] Н. Я. Виленкин, *Специальные функции и теория представления групп*, 2-е изд., М., Наука, 1991, ISBN: 5-02-014541-6, 576 с.; англ. пер. 1-го изд.: N. Ja. Vilenkin, *Special functions and the theory of group representations*, Transl. Math. Monogr., **22**, Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1968, x+613 pp.
- [72] M. S. Narasimhan, S. Ramanan, “Moduli of vector bundles on compact Riemann surfaces”, *Ann. of Math.* (2), **89**:1 (1969), 14–51.
- [73] А. Н. Тюрин, “О пересечении квадрик”, *УМН*, **30**:6 (1975), 51–99; англ. пер.: A. N. Tyurin, “On intersection of quadrics”, *Russian Math. Surveys*, **30**:6 (1975), 51–105.
- [74] Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии*, т. 1, 2, М., Мир, 1982, 496 с., 366 с.; пер. с англ.: Ph. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Pure Appl. Math., Wiley, New York, 1978, ISBN: 0-471-32792-1, 813 pp.
- [75] A. Hurwitz, “Über unendlich-vieldeutige geometrische Aufgaben, insbesondere über die Schließungsprobleme”, *Math. Ann.*, **15**:1 (1879), 8–15.
- [76] R. E. Schwartz, “The Poncelet grid”, *Adv. Geom.*, **7**:2 (2007), 157–175.
- [77] M. Levi, S. Tabachnikov, “The Poncelet grid and the billiard in ellipses”, *Amer. Math. Monthly*, **114**:10 (2007), 895–908.

В. Драгович (V. Dragović)

Математический институт САНИ, Белград, Сербия;
 Mathematical Physics Group,
 University of Lisbon, Portugal
E-mail: vladad@mi.sanu.ac.rs

Поступила в редакцию

03.02.2010

М. Раднович (M. Radnović)

Математический институт САНИ, Белград, Сербия
E-mail: milena@mi.sanu.ac.rs