Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Г. Рыков, Вариационный принцип для двумерной системы уравнений газовой динамики без давления, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 1, 165–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm935>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 14:29:01

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ БЕЗ ДАВЛЕНИЯ

Ю. Г. РЫКОВ

Рассмотрена следующая система уравнений

$$(1) \quad \begin{cases} \partial \varrho / \partial t + \partial(\varrho u_1) / \partial x_1 + \partial(\varrho u_2) / \partial x_2 = 0, \\ \partial(\varrho u_1) / \partial t + \partial(\varrho u_1^2) / \partial x_1 + \partial(\varrho u_1 u_2) / \partial x_2 = 0, \\ \partial(\varrho u_2) / \partial t + \partial(\varrho u_1 u_2) / \partial x_1 + \partial(\varrho u_2^2) / \partial x_2 = 0, \end{cases} \quad (t, x_1, x_2) \in R_+ \times R^2,$$

где ϱ – плотность, (u_1, u_2) – вектор скорости; с начальными данными

$$(2) \quad \begin{aligned} \varrho(0, x_1, x_2) &= \varrho_0(x_1, x_2) > 0 \in C(R^2), \\ u_1(0, x_1, x_2) &= u_1^{(0)}(x_1, x_2) \in C(R^2) \\ u_2(0, x_1, x_2) &= u_2^{(0)}(x_1, x_2) \in C(R^2). \end{aligned}$$

Пусть существуют такие непрерывно-дифференцируемые функции $(A(x_1, x_2), B(x_1, x_2)) : R^2 = (x_1, x_2) \rightarrow G \subset R^2 = (A, B)$, что

$$(3) \quad \partial(A, B) / \partial(x_1, x_2) = \varrho_0(x_1, x_2) > 0; \quad \partial x_1 / \partial B = \partial x_2 / \partial A$$

$$(4) \quad \partial u_1^{(0)}(x_1(A, B), x_2(A, B)) / \partial B = \partial u_2^{(0)}(x_1(A, B), x_2(A, B)) / \partial A.$$

Обозначим через $S_0(A, B)$ соответствующий потенциал, т.е.

$$(5) \quad \partial S_0 / \partial A = u_1^{(0)}(x_1(A, B), x_2(A, B)), \quad \partial S_0 / \partial B = u_2^{(0)}(x_1(A, B), x_2(A, B)).$$

Рассмотрим также выпуклую функцию $\Phi(A, B)$ такую, что

$$(6) \quad \partial \Phi / \partial A = x_1(A, B); \quad \partial \Phi / \partial B = x_2(A, B).$$

Эта функция существует ввиду (3). Пусть выполнены условия

$$(7) \quad \begin{aligned} \Phi(A, B) &\rightarrow +\infty \text{ при } (A, B) \rightarrow \partial G, \\ \sup_{A^2 + B^2 = R^2} \frac{|S_0(A, B)|}{\Phi(A, B)} &\rightarrow 0 \text{ при } 2R \rightarrow \text{diam } G. \end{aligned}$$

Естественно считать, что (1) задает динамику в пространстве троек $(P_t, (I_1)_t, (I_2)_t)$, где P_t есть мера, отвечающая распределению масс, а $(I_1)_t, (I_2)_t$ – меры Радона, отвечающие распределению импульса, в момент времени t . При этом $(I_1)_t, (I_2)_t$ – абсолютно непрерывны относительно P_t и производные Радона–Никодима $d(I_1)_t(x_1, x_2) / dP_t(x_1, x_2) = u_1(t, x_1, x_2)$, $d(I_2)_t(x_1, x_2) / dP_t(x_1, x_2) = u_2(t, x_1, x_2)$, есть вектор скорости в точке (x_1, x_2) . Пусть $f, g, h \in C_0^1(R^2)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Семейство $(P_t, (I_1)_t, (I_2)_t)$, $0 \leq t \leq T$, назовем *слабым решением задачи* (1), (2) *на отрезке* $[0, T]$, если для любых $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$

$$\begin{aligned} &\iint f(x_1, x_2) dP_{t_2}(x_1, x_2) - \iint f(x_1, x_2) dP_{t_1}(x_1, x_2) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) d(I_1)_\tau(x_1, x_2) + \iint \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) d(I_2)_\tau(x_1, x_2) \right\} d\tau, \\ &\iint g(x_1, x_2) d(I_1)_{t_2}(x_1, x_2) - \iint g(x_1, x_2) d(I_1)_{t_1}(x_1, x_2) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint g(x_1, x_2) dP_\tau(x_1, x_2) + \iint \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2) d(I_1)_\tau(x_1, x_2) \right. \\ &\quad \left. + \iint \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2) d(I_2)_\tau(x_1, x_2) \right\} d\tau, \end{aligned}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-01-16090).

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2) u_1(\tau, x_1, x_2) d(I_1)_\tau(x_1, x_2) \right. \\
&\quad \left. + \iint \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2) u_1(\tau, x_1, x_2) d(I_2)_\tau(x_1, x_2) \right\} d\tau, \\
&\iint h(x_1, x_2) d(I_2)_{t_2}(x_1, x_2) - \iint h(x_1, x_2) d(I_2)_{t_1}(x_1, x_2) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint \frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1, x_2) u_2(\tau, x_1, x_2) d(I_1)_\tau(x_1, x_2) \right. \\
&\quad \left. + \iint \frac{\partial h}{\partial x_2}(x_1, x_2) u_2(\tau, x_1, x_2) d(I_2)_\tau(x_1, x_2) \right\} d\tau,
\end{aligned}$$

и $P_t \rightarrow P_0$, $(I_1)_t \rightarrow I_1^{(0)}$, $(I_2)_t \rightarrow I_2^{(0)}$ при $t \rightarrow +0$ в слабой топологии на любом компакте R^2 , где P_0 , $I_1^{(0)}$, $I_2^{(0)}$ определяются начальными функциями (2).

Следуя Зельдовичу [1]–[3], мы рассматриваем динамику свободно движущихся частиц, которые взаимодействуют посредством столкновений в соответствии с законами сохранения массы и импульса. В отличие от [2], [3] при фиксированном $t \in [0, T]$ для всякой точки с координатами (x_1, x_2) нельзя указать частиц, пришедших в эту точку к моменту времени t , а можно указать лишь соответствующие распределения массы и импульса. Поскольку характеристики системы (1) известны, решение $(P_t, (I_1)_t, (I_2)_t)$ будет однозначно определено, если для каждого $t \in [0, T]$ мы укажем разбиение ξ_t плоскости R^2 , элементы C_{ξ_t} которого представляют собой связанные выпуклые подмножества R^2 , определяющие искомые меры. Для построения элементов C_{ξ_t} для каждого $t \in [0, T]$ рассмотрим выпуклую оболочку $C_\Omega(t)$ функции $\Omega(t, A, B) \equiv \Phi(A, B) + tS_0(A, B)$. Тогда $C_\Omega(t)$ порождает разбиение ξ_t плоскости (A, B) . Элементами разбиения ξ_t служат множества $p_t(x_1, x_2)$, на которых $C_\Omega(t)$ совпадает с подходящей линейной функцией $x_1 A + x_2 B + z(x_1, x_2)$.

Теперь обсудим получающееся обобщение условий Ренкина–Гюгонио для (1), выражающее собой закон сохранения импульса. Пусть $p_t(x_1, x_2)$ является треугольником с вершинами (A_1, B_1) ; (A_2, B_2) ; (A_3, B_3) . Рассмотрим треугольник T в пространстве (S, A, B) с вершинами (S_1, A_1, B_1) ; (S_2, A_2, B_2) ; (S_3, A_3, B_3) , где $S_j \equiv S_0(A_j, B_j)$ ($j = 1, 2, 3$), S_0 определяется формулой (5). Оказывается, что точка $X = (x_1, x_2)$ будет обладать массой $P(X)$, равной площади проекции T на плоскость $S = 0$ и вектор-импульсом $(I_1(X), I_2(X))$ таким, что $I_1(X)$ равно ориентированной площади проекции T на плоскость $A = 0$, а $-I_2(X)$ равно ориентированной площади проекции T на плоскость $B = 0$.

Пусть теперь $p_t(x_1(l), x_2(l))$ является отрезком с концами $(A_1(l), B_1(l))$, $(A_2(l), B_2(l))$ для точек $\Gamma = (x_1(l), x_2(l))$, лежащих на некоторой кривой, l – параметр вдоль этой кривой. В пространстве (S, A, B) рассмотрим кривые $(S_1(l), A_1(l), B_1(l))$; $(S_2(l), A_2(l), B_2(l))$, где $S_j(l) \equiv S_0(A_j(l), B_j(l))$ ($j = 1, 2$), S_0 определяется формулой (5). Для каждого значения l рассмотрим бесконечно малый четырехугольник $\Pi(l)$ с вершинами (S_1, A_1, B_1) ; (S_2, A_2, B_2) ; $(S_2 + \frac{dS_2}{dt}\Delta l, A_2 + \frac{dA_2}{dt}\Delta l, B_2 + \frac{dB_2}{dt}\Delta l)$; $(S_1 + \frac{dS_1}{dt}\Delta l, A_1 + \frac{dA_1}{dt}\Delta l, B_1 + \frac{dB_1}{dt}\Delta l)$. Тогда бесконечно малый участок $\Delta\Gamma$ кривой Γ будет обладать массой $P(\Delta\Gamma)$, равной площади проекции Π на плоскость $S = 0$ и вектор-импульсом $(I_1(\Delta\Gamma), I_2(\Delta\Gamma))$ таким, что $I_1(\Delta\Gamma)$ равно ориентированной площади проекции Π на плоскость $A = 0$, а $-I_2(\Delta\Gamma)$ равно ориентированной площади проекции Π на плоскость $B = 0$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (3), (4), (7). Тогда для всякого $T > 0$ построенное семейство разбиений ξ_t порождает слабое решение задачи (1), (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Zeldovich Ya. B. // Astron. Astrophys. 1970. V. 5. P. 84–89. [2] Вейнан И., Рыков Ю. Г., Синай Я. Г. // УМН. 1995. Т. 50. С. 193–194. [3] Weinan E., Rykov Yu. G., Sinai Ya. G. // Comm. Math. Phys. 1995 (to appear).