Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Де Лео, Замечание о несвободных изометрических погружениях, *УМН*, 2010, том 65, выпуск 3, 197–198

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9359>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 15:36:49

Замечание о несвободных изометрических погружениях

Р. Де Лео

Задача об изометрических погружениях впервые изучалась в выдающейся работе [1] Дж. Нэша, а затем, в значительно более общей ситуации, в работе М. Громова [2]. В этом контексте было показано, что для гладкого m -мерного многообразия M и множества $\Gamma(M)$ всех квадратичных дифференциалов на нем индуцирующее метрику отображение $\mathcal{D}: C^\infty(M, \mathbb{R}^q) \rightarrow \Gamma(M)$, сопоставляющее каждому отображению $f: M \rightarrow \mathbb{R}^q$ прообраз f^*e_q евклидовой метрики e_q на $\mathbb{R}^q$, открыто, будучи ограничено на множество свободных отображений (мы снабжаем все функциональные пространства топологией Уитни). Напомним, что отображение $f = (f^i): M \rightarrow \mathbb{R}^q$, $i = 1, \dots, q$, свободно, если в произвольной карте (x^α) многообразия M , $\alpha = 1, \dots, m$, набор из $q_m := m(m+3)/2$ векторов $\{\partial_\alpha f, \partial_{\alpha\beta} f\}$ линейно независим в каждой точке.

Множество $F(M, \mathbb{R}^q)$ всех свободных отображений есть открытое подмножество в $C^\infty(M, \mathbb{R}^q)$, известно, что оно пусто при $q < q_m$ и всюду плотно при $q \geq q_m + m$. Поэтому отображение $\mathcal{D}$ открыто над некоторым плотным множеством при $q \geq q_m + m$ и открыто по крайней мере над непустым открытым множеством (тогда $\mathcal{D}$ называется w -открытым) в тех случаях, когда $q_m \leq q < q_m + m$ и $F(M, \mathbb{R}^q)$ непусто. Очень мало известно о том, в каких случаях операторы $\mathcal{D}$ открыты для меньших значений q , когда свободных отображений появиться не может по размерностным соображениям, кроме очевидного факта, что они не могут быть открытыми при $q \leq q_m - m$.

Гипотеза М. Громова [2; гл. 2, § 3, п. 8, случай (E')] утверждает, что операторы $\mathcal{D}$ открыты над всюду плотным множеством для всех $q \geq q_m - \sqrt{m}/2$. Мы изучаем задачу, когда операторы $\mathcal{D}$ w -открыты, и концентрируемся на случае $M = \mathbb{R}^m$. Обозначим через $\mathcal{D}_{m,q}$ оператор $\mathcal{D}$, действующий на $C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^q)$. Так как $F(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^q)$ при $q \geq q_m$ непусто (см. пример 2 ниже), наша задача нетривиальна только при $q \leq q_m - 1$.

В [3] показано, что $\mathcal{D}_{2,4}$ w -открыт. Мы распространяем этот результат на $\mathcal{D}_{m,q_m-1}$, основываясь по существу на следующем хорошо известном результате из [4].

ТЕОРЕМА ДН. Пусть M – открытое многообразие, λ и ξ – гладкая функция и гладкое векторное поле на нем. Тогда оператор $X(f) = \xi(f) + \lambda f$ на $C^\infty(M)$ сюръективен тогда и только тогда, когда ξ допускает глобальную трансверсаль, т.е. вложенную гиперповерхность, которая пересекает каждую его интегральную траекторию в единственной точке.

Пусть $q = q_m - 1$. Наша цель – найти открытое множество $\mathcal{A}_{m,q} \subset C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^q)$ такое, что если $f_0 \in \mathcal{A}_{m,q}$ и $g_0 = \mathcal{D}_{m,q}(f_0)$, то уравнение $\mathcal{D}_{m,q}(f) = g$ имеет решение для любого g , достаточно близкого к g_0 в $\Gamma(\mathbb{R}^m)$. Напомним, что по общей фундаментальной теореме Громова (см. [2; гл. 2, § 3, п. 2]) существование решения уравнения $\mathcal{D}_{m,q}(f) = g$ обеспечивается существованием решений его линеаризованного варианта, который в свою очередь эквивалентен (см., например, [2; гл. 2, § 3, п. 8, случай (E')]) алгебраической системе:

$$\begin{cases} \delta_{ij} \partial_\alpha f^i \delta f^j = h_\alpha, \\ \delta_{ij} \partial_{\alpha\beta} f^i \delta f^j = (\partial_\alpha h_\beta + \partial_\beta h_\alpha - \delta g_{\alpha\beta})/2, \end{cases} \quad (1)$$

где δf^i – это q неизвестных, $\delta g_{\alpha\beta}$ – это $m(m+1)/2$ данных функций, а h_α – это m произвольных функций. Следовательно, для наших целей достаточно показать, что для некоторого непустого открытого множества в $C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^q)$ всегда можно выбрать h_α так, чтобы система (1) имела решение.

ТЕОРЕМА ДН. Операторы $\mathcal{D}_{m,q}$ являются w -открытыми при $q \geq q_m - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Коэффициенты в (1) совпадают с компонентами наших q_m векторных полей $\{\partial_\alpha f, \partial_{\alpha\beta} f\}$, поэтому найдутся не обращающиеся тождественно в нуль функции λ^α и $\lambda^{\alpha\beta} = \lambda^{\beta\alpha}$ такие, что имеет место тождество $\lambda^\alpha \partial_\alpha f + \lambda^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} f = 0$.

Система (1) имеет решение, если и только если $2\lambda^\alpha h_\alpha + \lambda^{\alpha\beta}(\partial_\alpha h_\beta + \partial_\beta h_\alpha - \delta g_{\alpha\beta}) = 0$. Перепишем это в виде $X^\alpha h_\alpha = \phi$, где $\phi = \lambda^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}$ и $X^\alpha = \xi_\alpha + 2\lambda^\alpha$ с $\xi_\alpha = \lambda^{\alpha\beta} \partial_\beta$.

Теперь пусть $\mathcal{A}_{m,q} \subset C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^q)$ – открытое множество погружений f , удовлетворяющее следующим открытым свойствам: 1) матрица $D^2 f$ размера $q_m \times (q_m - 1)$ имеет полный ранг в каждой точке; 2) найдется индекс α_0 , для которого функции $\lambda^{\alpha_0\beta}$ не обращаются в нуль все одновременно. Тогда, если положить $h_\beta = \lambda^{\alpha_0\beta} h$, $\beta = 1, \dots, m$, для некоторой неизвестной функции h , то уравнение $X^\alpha h_\alpha = \phi$ превращается в $Yh = \phi'$, где $Y = \zeta + \lambda'$ для некоторого векторного поля ζ и функции λ' . Прямое вычисление показывает, что компонента α_0 поля ζ равна $(\lambda^{\alpha_0 1})^2 + \dots + (\lambda^{\alpha_0 m})^2$ и, следовательно, никогда не обращается в нуль по предположению. В частности, это означает, что любая поверхность $x^{\alpha_0} = \text{const}$ является глобальной трансверсалью для ζ , и, следовательно, по теореме ДН, Y – сюръективный дифференциальный оператор первого порядка. Значит, для любой функции из $\mathcal{A}_{m,q}$ всегда можно выбрать h_α в определении функций $\delta g_{\alpha\beta}$ так, чтобы выполнялось условие совместности $X^\alpha h_\alpha = \phi$. Примеры 1 и 2 показывают, что эти множества непусты.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим произвольную пару (g, h) свободных отображений из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^2$. Тогда функция $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$, заданная формулой $f(x, y) = (g(x), h(y))$, принадлежит $\mathcal{A}_{2,4} \subset C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4)$. Действительно, в этом случае $\partial_{xy} f = 0$, так что можно выбрать $\lambda^x = \lambda^y = \lambda^{xx} = \lambda^{yy} = 0$, $\lambda^{xy} = \lambda^{yx} = 1$ и, значит, условие совместности превращается в тривиально разрешимое: $\partial_x h_y + \partial_y h_x = \delta g_{xy}$. Например, функция $f(x, y) = (x, e^x, y, e^y)$ лежит в $\mathcal{A}_{2,4}$. Заметим, что наше множество $\mathcal{A}_{2,4}$ строго больше множества, введенного в [3].

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $\mathcal{D}_q$ – индуцирующий метрику оператор, действующий на $C^\infty(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^q)$. Случаи $q \geq 7$ и $q \leq 3$ тривиальны. Пример 1 показывает, что $\mathcal{D}_4$ является w -открытым. Действительно, множество $\mathcal{A}_{2,4}$ содержит функции, двояко периодичные, например, $f(x, y) = (\cos x, \sin x, \cos y, \sin y)$. Подмножество, состоящее из всех них, рассматриваемых как функции на $\mathbb{T}^2$, открыто в $C^\infty(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^4)$, и $\mathcal{D}_4$ очевидно является открытым отображением над ним. Отметим, что случай $q = 6$ тривиален, поскольку $F(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^6) \neq \emptyset$, в то время как ничего нельзя сказать в случае $q = 5$, поскольку до сих пор неизвестно, является ли $F(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^5)$ пустым.

ПРИМЕР 2. Пусть $f \in F(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{qm})$ – каноническое свободное отображение, заданное формулой $f(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^m, (x^1)^2, x^1 x^2, \dots, (x^m)^2)$, и π – произвольная проекция $\pi: \mathbb{R}^{qm} \rightarrow \mathbb{R}^{q_m-1}$, забывающая любую из последних $(m+1)/2$ компонент. Тогда композиция $f_\pi = \pi \circ f$ принадлежит $\mathcal{A}_{m, q_m-1}$. Действительно, матрица $D^2 f_\pi$ имеет полный ранг и одна из вторых производных функции f_π (скажем, $\partial_{x^1 x^2} f_\pi$) тождественно нулевая, так что можно выбрать соответствующий множитель (в этом случае $\lambda^{x^1 x^2}$) тождественно равным единице, а остальные – нулю. Например, в случае $(m, q) = (2, 4)$ мы получим функции $f_1(x, y) = (x, y, xy, y^2)$, $f_2(x, y) = (x, y, x^2, y^2)$ и $f_3(x, y) = (x, y, x^2, xy)$.

Автор благодарит G. D'Ambra, A. Loi и A. Bergamasco за введение в предмет и полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] J. Nash, *Ann. of Math.* (2), **63**:1 (1956), 20–63. [2] М. Громов, *Дифференциальные соотношения с частными производными*, Мир, М., 1990, ISBN: 5-03-001297, 536 с. [3] G. D'Ambra, A. Loi, *Geom. Dedicata*, **127** (2007), 151–158. [4] J. J. Duistermaat, L. Hörmander, *Acta Math.*, **128**:1 (1972), 183–269.

Р. Де Лео (R. De Leo)

University of Maryland, USA

E-mail: roberto.deleo@ca.infn.it, rdl@math.umd.edu

Представлено С. П. Новиковым

Принято редколлегией

13.04.2010