Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Г. Складенко, О когомологиях с носителями, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 1, 167–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm936>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 15:12:53

О КОГОМОЛОГИЯХ С НОСИТЕЛЯМИ

Е. Г. Складенко

Под семейством носителей принято понимать направленное по включению семейство Φ замкнутых множеств топологического пространства X такое, что из $A \in \Phi$ и $B \subset A$ следует $B \in \Phi$ (п. 3.2 в [4]). Когомологии $H_{\Phi}^*(X; \mathcal{G})$ пространства X с коэффициентами в пучке $\mathcal{G}$ с носителями в Φ определяются как когомологии коцепного комплекса $\Gamma_{\Phi}(\mathcal{A}^*(\mathcal{G}))$, составленного всеми сечениями с носителями в Φ любой Φ -ацикличной (например, вялой) резольвенты пучка $\mathcal{G}$.

Заметим, что для замкнутого множества A и вялой резольвенты $\mathcal{C}^*(\mathcal{G})$ ограничение сечений $\Gamma(\mathcal{C}^*(\mathcal{G})) = \mathcal{C}^*(\mathcal{G})(X) \rightarrow \mathcal{C}^*(\mathcal{G})(X \setminus A)$ эпиморфно, а ядром служит комплекс $\Gamma_A(\mathcal{C}^*(\mathcal{G}))$ всех сечений с носителями в A . Таким образом, $H^*(\Gamma_A(\mathcal{C}^*(\mathcal{G}))) = H^*(X, X \setminus A; \mathcal{G})$. Поскольку $\Gamma_{\Phi}(\mathcal{C}^*(\mathcal{G})) = \bigcup_{A \in \Phi} \Gamma_A(\mathcal{C}^*(\mathcal{G})) = \varinjlim_{A \in \Phi} \{\Gamma_A(\mathcal{C}^*(\mathcal{G}))\}$, а точный функтор $\varinjlim$ перестановочен с операцией H^* , имеем

$$\text{Предложение 1. } H_{\Phi}^*(X; \mathcal{G}) = \varinjlim_{A \in \Phi} \{H^*(X, X \setminus A; \mathcal{G})\}.$$

Смысл его, очевидно, в том, что когомологии с носителями в какой-то мере сводятся к обычным. Обсуждение этой меры и эпитета “обычные” – одна из целей заметки.

Семейство Φ называется окрестностным [7], если каждое $A \in \Phi$ имеет замкнутую окрестность: $A' \in \Phi$. В [2] впервые были введены паракомпактифицирующие семейства – это окрестностные семейства замкнутых паракомпактных множеств. Пусть Ψ – система множеств вида $X \setminus \text{Int } A$, $A \in \Phi$.

$$\text{Следствие 2. Для окрестностных семейств } H_{\Phi}^*(X; \mathcal{G}) = \varinjlim_{B \in \Psi} \{H^*(X, B; \mathcal{G})\}.$$

Для паракомпактифицирующих семейств этот факт был замечен еще А. Картаном. Вариант доказательства приведен в п. 3.10 в [4] (где вместо $H^*(X, B; \mathcal{G})$ используются изоморфные группы $H^*(X; \mathcal{G}_{X \setminus B})$).

Для замкнутого множества F паракомпактного пространства X и паракомпактифицирующего семейства Φ ограничение сечений $\Gamma_{\Phi}(\mathcal{C}^*(\mathcal{G})) \rightarrow \Gamma_{\Phi \cap F}(\mathcal{C}^*(\mathcal{G}) \mid F)$ эпиморфно (с учетом Φ -мягкости вялых пучков, п. 3.3 в [4], см. предложение 9.3 главы 2 в [1]), а его ядро есть $\Gamma_{\Phi \mid (X \setminus F)}(\mathcal{C}^*(\mathcal{G}))$. В силу Φ -ацикличности резольвенты $\mathcal{C}^*(\mathcal{G}) \mid F$ (вытекающей из утверждения (а) теоремы 3.5.5 главы II в [3] и предложения 9.8 главы 2 в [1]) указанные сечения на F определяют $H_{\Phi \cap F}^*(F; \mathcal{G} \mid F) = H_{\Phi}^*(F; \mathcal{G})$, а указанное ядро – $H_{\Phi \mid (X \setminus F)}^*(X; \mathcal{G}) = H_{\Phi}^*(X \setminus F; \mathcal{G})$.

Предложение 3. Если Φ – паракомпактифицирующее семейство в паракомпактном пространстве X , то для $h \in H_{\Phi}^*(X; \mathcal{G})$ найдутся $A \in \Phi$ и такое замкнутое множество $B \subset X$, что $X = A \cup B$ и образ h в $H_{\Phi}^*(B; \mathcal{G})$ равен нулю.

Это означает, очевидно, что элемент h сосредоточен на $X \setminus B \subset A \in \Phi$.

Утверждение выполнено для множества $B \in \Psi$ (см. следствие), для которого h содержится в образе $H^*(X, B; \mathcal{G})$, и для $A \in \Phi$, являющегося замыканием $X \setminus B$.

Скажем (условно), что замкнутое множество $Y \subset X$ служит носителем некоторого $h \in H_{\Phi}^*(X; \mathcal{G})$, если существует замкнутое B , для которого $X = Y \cup B$ и ограничение h на B равно нулю. Таким способом определяются носители теории когомологий в [7] (см. также определение когомологий с компактными носителями в [6]).

Предложение 4. Если Φ – паракомпактифицирующее семейство в паракомпактном пространстве X , то носитель Y любого $h \in H_{\Phi}^*(X; \mathcal{G})$ содержит в себе носители h из Φ .

На самом деле, элемент h с носителем Y содержится в образе $H_{\Phi}^*(X, B; \mathcal{G}) = H_{\Phi}^*(X \setminus B; \mathcal{G}) \rightarrow H_{\Phi}^*(X; \mathcal{G})$ и потому в силу предложения 1 представляется элементом из $H^*(X, X \setminus A; \mathcal{G})$ для $A \subset X \setminus B \subset Y$, $A \in \Phi$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 94-01-00670), Международного научного фонда (грант № JH 2100) и Правительства России.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если Φ – паракомпактифицирующее семейство в паракомпактном X , то при $p > 0$ для любой точки $x \in X$ имеем $\lim_{\rightarrow N} \{H_{\Phi}^p(N; \mathcal{G})\} = 0$, где N – замкнутые окрестности x . Иными словами, для $h \in H_{\Phi}^p(X; \mathcal{G})$ и $x \in X$ найдется столь малая N , что ограничение h на N равно нулю.

Таким образом, как и в случае обычной теории H^* , элементы групп H_{Φ}^* должны занимать в пространстве X определенный “объем”.

Для доказательства обозначим через s определяющее h сечение $\mathcal{C}^*(\mathcal{G})$ с носителем $|s| \in \Phi$, $ds = 0$. Если $x \notin |s|$, то s обращается в нуль в некоторой окрестности N точки x , и ограничение h на N равно нулю. Пусть $x \in |s|$. Выберем $A \in \Phi$ такое, что $|s| \subset \text{Int } A$. Росток s в точке x имеет вид ds' для сечения s' на некоторой замкнутой окрестности N . Если $N \subset A$, то $N \in \Phi$, и h на N равно нулю.

Картина резко меняется для непаракомпактифицирующих Φ . Для пар (A, N) , где $A \in \Phi$ и N – замкнутая окрестность x , полагаем $(A, N) < (A', N')$, если $A \subset A'$ и $N' \subset N$. Легко видеть, что $\lim_{\rightarrow x \in N} \{H_{\Phi}^p(N; \mathcal{G})\} = \lim_{\rightarrow (A, N)} \{H^p(N, N \setminus A; \mathcal{G})\}$. В тех случаях, когда $x \notin \text{Int } A$ для всех $A \in \Phi$, обращение в нуль указанного предела маловероятно.

Пусть, например, X – (нульмерное) пространство рациональных точек интервала $(0, 1)$, $\mathcal{G} = \mathbb{Z}$ – целые числа и $\Phi = \mathcal{C}$ – непаракомпактифицирующее семейство компактных множеств (паракомпактифицируемость $\mathcal{C}$ эквивалентна локальной компактности пространства). Для $C \in \mathcal{C}$ рассмотрим точную последовательность $\cdots \rightarrow H^0(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{i} H^0(X \setminus C; \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X, X \setminus C; \mathbb{Z}) \rightarrow 0$. Обе первые группы – это группы локально постоянных функций, принимающих значения в $\mathbb{Z}$. Поскольку в первой из групп они постоянны вблизи точек $x \in C$, отображение i – включение, и $H^1(X, X \setminus C; \mathbb{Z}) \neq 0$. Сопоставляя две точные последовательности, отвечающие включению $C \subset C'$, заключаем, что отображение $H^1(X, X \setminus C; \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X, X \setminus C'; \mathbb{Z})$ – мономорфизм. В силу предложения 1 $H_{\mathcal{C}}^1(X; \mathbb{Z}) \neq 0$.

Отличный от нуля элемент $h \in H_{\mathcal{C}}^1(X; \mathbb{Z})$ содержится в некоторой группе $H^1(X, X \setminus C; \mathbb{Z})$ и потому представляется локально постоянной функцией на $X \setminus C$, не постоянной вблизи некоторой точки $x \in C$ (отличной от константы в сколь угодно малом интервале вокруг x). Это свойство сохраняется при ограничениях на множества $X \setminus C'$ для любых содержащих C множеств $C' \in \mathcal{C}$. Это означает (ср. с предложением 5), что ограничения h на сколь угодно малые окрестности точки x отличны от нуля.

Приведенный пример нельзя считать нетипичным, поскольку отличие от нуля $H^p(X, U; \mathcal{G})$ для открытых U в размерности $p = \dim_{\mathcal{G}} X + 1$ – явление довольно частое (см. § 5 в [5]). Представляет интерес даже тот частный случай, когда $\Phi = \{x\}$ – одна точка. В этом случае $H_{\Phi}^p(X; \mathcal{G}) = H^p(X, X \setminus x; \mathcal{G}) = H_x^p(\mathcal{G})$ – локальная группа когомологий, изоморфная пределу $\lim_{\rightarrow} \{H^{p-1}(U \setminus x; \mathcal{G})\}$ по окрестностям U точки x (§ 1 в [5]). Ясно, что и для этих групп утверждение предложения 5 не имеет места. Существует (локально) стягиваемый двумерный компакт X (для таких пространств, кстати, пучковые когомологии изоморфны сингулярным, § 1 главы 3 в [1]) с такой точкой $x \in X$, что $X \setminus x$ – полиэдр, но $H^3(X, X \setminus x; \mathbb{Z}) \neq 0$ (пример 4.6 в [5]).

Таким образом, когомологии H_{Φ}^* сводятся к “обычным” только для паракомпактифицирующих (или окрестностных) семейств Φ , без этого же условия они имеют другую природу, оказываясь в большой степени зависимыми от локальной структуры пространств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бредон Г. Э. Теория пучков. М.: Наука, 1988. [2] Cartan H. Cohomologie des groupes, suite spectral, faisceaux. Séminaire. Paris: Ecole Norm. Super, 1950–1951. [3] Годаман Р. Алгебраическая топология и теория пучков. М.: ИЛ, 1961. [4] Grothendieck A. // Tôhoku Math. J. 1957. V. 9. P. 119–211. [5] Скляренко Е. Г. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 44. № 6. С. 1417–1433. [6] Spanier E. // Contemporary Math. 1982. V. 12. P. 315–329. [7] Spanier E. // Pacif. J. Math. 1986. V. 123. № 2. P. 447–464.