Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Гришин, О строении центра относительно свободной алгебры Грассмана, *УМН*, 2010, том 65, выпуск 4, 191–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9360>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:49:37

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

О строении центра относительно свободной алгебры Грассмана

А. В. Гришин

Пусть $F^{(3)} = k\langle 1, x_1, \dots, x_i, \dots \rangle$ — унитарная относительно свободная счетно порожденная ассоциативная алгебра над бесконечным полем k характеристики $p > 0$, соответствующая тождеству Грассмана $[[x_1, x_2], x_3] = 0$, и пусть W_p — T -пространство, порожденное всеми p -словами (одночленами, содержащими каждую свою переменную с кратностью p). В [1]–[4] исследуется W_p как T -пространство и как подалгебра в $F^{(3)}$. Из развития результатов и методов этих работ вытекает

ТЕОРЕМА. W_p — центр алгебры $F^{(3)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что W_p лежит в центре, доказано в [2]. Для доказательства обратного включения будем использовать следующие факты (см. [2], [4], [5]).

В $F^{(3)}$ имеют место тождества

$$\begin{aligned} [x_1, x_2][x_1, x_3] &= [x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4] = [x_1^p, x_2] \\ &= [x_1^n, x_2] - nx_1^{n-1}[x_1, x_2] = [x_1x_2, x_3] - [x_1, x_3]x_2 - [x_2, x_3]x_1 = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

В $F^{(3)}$ имеется базис, состоящий из многочленов вида

$$x_{i_1}^{m_{i_1}-1} x_{i_2}^{m_{i_2}-1} \dots x_{i_{2r-1}}^{m_{i_{2r-1}}-1} x_{i_{2r}}^{m_{i_{2r}}-1} [x_{i_1}, x_{i_2}] \dots [x_{i_{2r-1}}, x_{i_{2r}}] x_{j_1}^{n_{j_1}} \dots x_{j_s}^{n_{j_s}}, \quad (2)$$

где $i_1 < \dots < i_{2r}$, $j_1 < \dots < j_s$, m_{i_α} , n_{j_β} — натуральные числа и $\{i_\alpha\} \cap \{j_\beta\} = \emptyset$, причем может отсутствовать как коммутаторная часть (т. е. $r = 0$), так и чисто степенная часть (т. е. $s = 0$). При $r = s = 0$ выражение (2) по определению равно 1.

Пусть f — произвольный полиоднородный многочлен из центра (в силу бесконечности основного поля можно предполагать полиоднородность). Согласно [2], если f — сумма коммутаторов, то f лежит в W_p . Если все переменные, входящие в f , имеют кратность, делящуюся на p , то f также лежит в W_p (см. [2]). Если нет, то пусть y — переменная с наибольшим номером, входящая в f с кратностью m , не делящейся на p (эта переменная обозначена для удобства другой буквой). Тогда любой элемент (2), участвующий в разложении многочлена f , как следует из тождеств (1), имеет вид gy^m или $[y^m, x_i]g$, где многочлен g не содержит y . Отсюда следует, что $f = f_1 + f_2y^m$, где f_1 — сумма коммутаторов, а f_2 не содержит переменную y . В самом деле, согласно (1),

$$[y^m, x_i]g = [y^m g, x_i] - [g, x_i]y^m. \quad (3)$$

Суммируя элементы (3), входящие в запись элементов (2) из разложения многочлена f , получаем требуемое представление f . Покажем теперь, что если f — элемент

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 05-01-00944 и № 07-01-00373).

из центра, то $f_2 = 0$. Предположим, что $f_2 \neq 0$. Тогда, если z – переменная с номером, большим всех номеров переменных, входящих в f , то

$$[f, z] = [f_2 y^m, z] = [f_2, z] y^m + f_2 [y^m, z] \neq 0,$$

так как в силу независимости системы (2) второе слагаемое не равно нулю и не зависит от первого. Это противоречит центральности f . Следовательно, $f = f_1$ лежит в W_p и теорема доказана.

В [1]–[4] дается описание коммутативной алгебры W_p и структуры ее T -пространств. Так, при $p > 2$ $W_p = D_p \oplus CD_p$ – прямая сумма T -пространств, первое из которых порождено x_1^p , а второе имеет бесконечную неприводимую систему порождающих вида (2) при $r \geq 1$, $s = 1$, $m_{i_\alpha} = n_{j_1} = p$. При этом $D_p = k[x_1^p, \dots, x_i^p, \dots]$ – алгебра коммутативных многочленов, а CD_p – радикал алгебры W_p , являющийся нильпотентной ниль-алгеброй индекса p .

В [3], [4] исследуется строение $F^{(3)}$ как модуля над W_p и над D_p . В частности, показано, что $F^{(3)}$ – свободный D_p -модуль.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Отказ от унитарности относительно свободной алгебры или от бесконечности поля k практически не влияет на основной результат.

2. Как сообщил автору А. Н. Красильников, изучая вопрос о центре, поставленный в [2], он пришел к аналогичному результату при $p > 2$.

Список литературы

- [1] А. В. Гришин, Л. М. Сурмина, *УМН*, **62:4** (2007), 145–146; англ. пер.: A. V. Grishin, L. M. Surmina, *Russian Math. Surveys*, **62:4** (2007), 802–803. [2] А. В. Гришин, Л. М. Цыбуля, *Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. Математика*, **57:7** (2007), 35–55. [3] А. В. Гришин, Л. М. Цыбуля, *УМН*, **63:4** (2008), 181–182; англ. пер.: A. V. Grishin, L. M. Tsybulya, *Russian Math. Surveys*, **63:4** (2008), 782–784. [4] А. В. Гришин, Л. М. Цыбуля, *О T -пространственном и мультипликативном строении относительно свободной алгебры Грассмана*, 893-В2008, ВИНТИ, 44 с. [5] A. V. Grishin, V. V. Shchigolev, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **134:1** (2006), 1799–1878; пер. с рус.: А. В. Гришин, В. В. Щиголев, *Соврем. мат. прилож.*, 2004, № 18, 26–97.

А. В. Гришин (A. V. Grishin)

Московский педагогический
государственный университет
E-mail: grishinaleksandr@yandex.ru

Представлено А. В. Михалёвым

Принято редколлегией
29.04.2010