Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Закалюкин, Особенности управляемых систем при вырождении неголономных связей, *УМН*, 2010, том 65, выпуск 4, 193–194

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9361>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 12:28:58

Особенности управляемых систем при вырождении неголономных связей

И. В. Закалюкин

В конфигурационном пространстве $M \approx \mathbb{R}^n$ с координатами q рассмотрим управляемую систему $\dot{q} = u$, для которой управления $u \in T_q M$ будем считать принадлежащими распределению, заданному уравнениями

$$A(q)u = 0, \quad (1)$$

где компоненты $a_{ij}(q)$ матрицы $A(q)$ размера $k \times n$ гладкие. Если ранг матрицы A максимален, то множество $C \subset \{(q, \dot{q})\}$ решений системы (1) представляет собой гладкое подрасслоение TM . В общем положении для того, чтобы ранг матрицы A упал на 1, необходимо выполнение $n - k + 1$ независимых условий (см. [1]), т. е. подмножество $\Sigma_1 \subset M$ значений обобщенных координат, при которых ранг $A(q)$ равен $k - 1$, является гладким подмногообразием коразмерности $n - k + 1$. Пусть $\Sigma \subset C$ – это подмножество $TM \setminus \{(q, 0)\}$ точек фазового пространства, в которых матрица A вырождена и имеет ранг $k - 1$. Подмножество Σ является гладким подмногообразием. Более того, множество C допустимых связями фазовых положений остается неособым подмногообразием в окрестности Σ .

ТЕОРЕМА 1. *Множество достижимости системы (1) общего положения для любой начальной точки содержит подмножество Σ_1 , если выполнено неравенство $(n - k)(n - k + 3) > n - 2$.*

Доказательство вытекает из теоремы Рашевского–Чжоу (см., например, [2]) и существования в общем положении допустимых обобщенных скоростей над всякой точкой из Σ_1 , не касающихся Σ .

Рассмотрим теперь динамическую систему с кинематическими связями (1), заданную уравнениями Даламбера–Лагранжа с неопределенными множителями

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i}, \quad A(q)\dot{q} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, k, \quad (2)$$

где $T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n m_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j$ – кинетическая энергия системы, являющаяся функцией обобщенных координат $q = (q_1, \dots, q_n)$ и обобщенных скоростей $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$, Q_i – обобщенные силы, которые будем считать управлениями $U = (Q_1, \dots, Q_n)$, не превосходящими по норме некоторой фиксированной константы, и λ_j – неопределенные множители [3], [4].

Пусть $N = (n_{ij})$ – матрица, обратная к матрице (m_{ij}) . В точках Σ_1 $(k \times k)$ -матрица $R = ANA^*$ (A^* – транспонированная к A матрица) вырождена. С помощью замены базисных уравнений связей и локальной замены обобщенных координат матрицу A , имеющую в начале координат ранг $k - 1$, можно привести к виду

$$A = \begin{pmatrix} B & K \\ g_1 \dots g_{n-k+1} & 0 \dots 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $(k - 1) \times (k - 1)$ -минор $K = (a_{lm})$ при $l = 1, \dots, k - 1$, $m = n - k + 2, \dots, n$, отличен от нуля, а компоненты $g_1, \dots, g_{n-k+1}$ – независимые функции координат, обращающиеся в нуль в начале координат.

Обозначим через $G_A \in \mathbb{R}^n$ вектор с компонентами $g_1(q), \dots, g_{n-k+1}(q), 0, \dots, 0$, через $\Delta_A(q)$ определитель матрицы $R = ANA^*$ и через $\xi_A(q, \dot{q})$ квадратичную форму обобщенных скоростей $\xi_A(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-k+1} \frac{\partial g_j}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \dot{q}_j$.

ТЕОРЕМА 2. В некоторой окрестности W начала координат q_0 существуют такие ограниченные вектор-функции $F(q, \dot{q})$, что разрешенные относительно обобщенных ускорений уравнения Даламбера–Лагранжа в точках из C , проекция которых на конфигурационное многообразие принадлежит $W \setminus \Sigma_1$, имеют вид:

$$\ddot{q} = F(q, \dot{q}) - \frac{\xi_A(q, \dot{q})}{\Delta_A(q)} NG_A. \quad (4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $\|q\|_A$ – расстояние в некоторой метрике от точки q до особого подмногообразия Σ_1 . Функции $\Delta_A(q)$, $D = \sum_{i=1}^{n-k+1} g_i^2$ и $\|q\|_A^2$ эквивалентны при $q \rightarrow \Sigma_1$. Вектор NG_A/Δ_A , входящий в правую часть (4), имеет порядок $\|q\|_A^{-1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Разложение (4) означает, что в окрестности Σ уравнения Даламбера–Лагранжа представляют собой быстро-медленную систему: медленными являются обобщенные координаты, а быстрыми – обобщенные скорости, производные которых задаются выражениями $\ddot{q} = P_n \|q\|_A^{-1}$, в которых компоненты вектор-функции $P_n(q, \dot{q})$ ограничены.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $m = (q_0, \dot{q}_0) \in \Sigma_1$ – некоторая точка особого подмногообразия, в которой $\xi(q_0, \dot{q}_0) \neq 0$ и $\dot{q}_0 \neq 0$. Тогда не существует ни одной непрерывно дифференцируемой фазовой траектории, трансверсально пересекающей подмногообразие Σ_1 в некоторый момент времени t_0 в точке m и являющейся решением уравнений Даламбера–Лагранжа при некоторых равномерно ограниченных по норме обобщенных силах для $t \neq t_0$. Кроме того, для всякого $B \in \mathbb{R}$ существует открытое подмножество компактной области фазового пространства, содержащее точки из Σ и не принадлежащее области достижимости для управляемой системы с обобщенными силами, ограниченными по норме константой B , и начальной точкой вне некоторой окрестности этого подмножества.

Примером такой системы являются уравнения плоского движения твердой балки, к концам которой шарнирно прикреплены два одинаковых конька, подчиняющихся стандартному “неголономному” условию: скорость в центре конька направлена вдоль его оси. В точках Σ уравнения неголономных связей становятся зависимыми: оба конька становятся перпендикулярными стержню. Если к балке прикладывать произвольные управления в виде активных обобщенных сил, ограниченных сколь угодно большой константой, и начинать движение из произвольной точки фазового пространства вне Σ , то система никогда не придет в положение из Σ с отличной от нуля квадратичной формой ξ .

Список литературы

- [1] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений*, 2-е изд., МЦНМО, М., 2004, 672 с. [2] А. А. Аграчев, Ю. Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, Физматлит, М., 2004, 391 с. [3] В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт, “Математические аспекты классической и небесной механики”, Итоги науки и техники. Современные проблемы матем. Фундам. напр., **3**, ВИНТИ, М., 1985, 5–290. [4] А. В. Борисов, И. С. Мамаев (ред.), *Неголономные динамические системы. Интегрируемость, хаос, странные аттракторы*, ИКИ, Ижевск, 2002, 328 с.