Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Г. Гриневич, А. Е. Миронов, С. П. Новиков, Двумерный оператор Шрёдингера: эволюционные $(2 + 1)$ -системы и их новые редукции; двумерная иерархия Бюргерса и данные обратной задачи, *УМН*, 2010, том 65, выпуск 3, 195–196

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9363>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 05:09:59

**Двумерный оператор Шрёдингера:
эволюционные (2+1)-системы и их новые редукции;
двумерная иерархия Бюргерса и данные обратной задачи**

П. Г. Гриневич, А. Е. Миронов, С. П. Новиков

Теория (2+1)-систем, базирующихся на двумерном операторе Шрёдингера, была начата в 1976 г. в [1], [2]. Аналог пар Лакса [1] имеет вид $\dot{L} = [H, L] - fL$, где $L = \partial_x \partial_y + G \partial_y + S$, а H, f – некоторые дифференциальные операторы. В [2] были построены алгебро-геометрические решения таких систем, а следовательно, и их полные иерархии. В [2] была начата теория обратных задач для эллиптического оператора L ($x \rightarrow z, y \rightarrow \bar{z}$), где данные снимаются с комплексной кривой Ферми нулевого уровня $L\psi = 0$. Ряд интересных систем были найдены в [3]. Однако первая система такого рода, построенная в [1], не изучалась до работы [4], в которой были найдены преобразования Бэклунда и была указана редукция типа Бюргерса¹. Авторами настоящей работы недавно были найдены приложения данной системы, предложены самосопряженная иерархия и двумерная иерархия Бюргерса, а также найдены редукции на данные обратной задачи для важных физических операторов (“чисто магнитный оператор Паули”). Мы обозначим эту систему GKMMN по фамилиям авторов, исследовавших ее. Пусть $H = \partial_x^2 + \partial_y^2 + F \partial_y + A$, $L = \partial_x \partial_y + G \partial_y + S$ (их можно привести к такому виду калибровочным преобразованием).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Система GKMMN имеет вид:

$$G_t = \square G + (F^2/4)_x - (G^2)_x - A_x + 2S_y, \quad S_t = \square S - 2(GS)_x + (FS)_y, \quad (1)$$

$$F_x = 2G_y, \quad A_y = 2S_x, \quad f = 2G_x - F_y, \quad \square = \partial_x^2 - \partial_y^2.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Система GKMMN допускает вещественную редукцию.

СЛЕДСТВИЕ 2. Система GKMMN обладает редукцией $S = 0$ (“2D-уравнение Бюргерса” B_2). Полная иерархия строится с помощью теоремы 2.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для системы GKMMN и ее стационарной задачи оператор H может быть самосопряженным только в тривиальных случаях. Для $H = \partial_x^2 + \partial_y^2 + F \partial_y + A$ в самосопряженном случае магнитное поле F_x/i и электрический потенциал $A - F^2/4 - F_y/2$ вещественны.

При наложенных условиях система GKMMN становится сильно переопределенной, приводя к полному вырождению.

ГИПОТЕЗА. Для гладкого периодического самосопряженного 2D-оператора L второго порядка полное многообразие $W(L)$ комплексных функций Блоха–Флоке за исключением тривиальных случаев (сводящихся к одной переменной) не содержит открытых в топологии Зариского частей $\Gamma \subset W(L)$ алгебраических кривых кроме уровней $\varepsilon = \text{const}$, найденных в [2].

Подстановка $G = -(\log c)_x$, $F = -2(\log c)_y$, $A = -2u_x$, $S = -u_y$ приводит систему к виду: $[(c_t - \square c)c^{-1}]_x = -2\square u$, $(u_t + \square u)_y = 2(u_y c_x c^{-1})_x - 2(u_y c_y c^{-1})_y$. При этом

П. Гриневич поддержан РФФИ (грант № 09-01-12148-офи-м), грантом НШ-5413.2010.1 и программой Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики”, А. Миронов – интеграционным проектом СО РАН (грант 65) и грантом НШ-5770.2010.1, С. Новиков – РФФИ (грант № 08-01-00054-а).

¹К сожалению, в [4] эта система была представлена как новая, хотя работа [1] была включена в список литературы [4]. Работа [2], в которой в 1976 г. были найдены алгебро-геометрические решения этих систем, в [4] вообще не цитируется. Это создает ложное впечатление, что до 1980 г. никакого прогресса не было, заменяя хронологический порядок участия авторов на противоположный.

B_2 -редукция, отвечающая $S = 0$, имеет вид: $c_t - \square c = (U(x, t) + V(y, t))c$, где U, V – произвольные функции.

Алгебро-геометрические данные обратной задачи таковы: дана риманова поверхность Γ рода g с двумя точками ∞_1, ∞_2 и локальными параметрами k_1^{-1}, k_2^{-1} , где $k_j^{-1}(\infty_j) = 0$, а также дивизор полюсов $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 + \dots + \mathcal{P}_g$. Двухточечная функция Бейкера–Ахиезера $\Psi(x, y, \mathcal{P})$, $\mathcal{P} \in \Gamma$, мероморфна на $\Gamma \setminus (\infty_1 \cup \infty_2)$, имеет простые полюсы в точках $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_g$ и асимптотики около ∞_j :

$$\Psi = e^{k_1 x + k_1^2 t} (1 + u k_1^{-1} + O(k_1^{-2})), \quad \Psi = c e^{k_2 y + k_2^2 t} (1 + v k_2^{-1} + O(k_2^{-2})). \quad (2)$$

Функция Ψ удовлетворяет уравнению $L\Psi = 0$ и уравнениям (1), с параметрами (c, u) . Вещественная редукция (1) такова: имеется антиголоморфная инволюция σ такая, что $\sigma(P_j) = P_j$, $\sigma^*(k_j) = -k_j$, $\sigma(D) = D$.

ТЕОРЕМА 1. Возьмем риманову поверхность $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$ (приводимую), где $\Gamma' \cap \Gamma'' = Q_0 \cup \dots \cup Q_k$, $\infty_1 \in \Gamma'$, $\infty_2 \in \Gamma''$, g' – род Γ' , g'' – род Γ'' . Фиксируем дивизор полюсов первого порядка $\mathcal{D}' \cup \mathcal{D}''$, $|\mathcal{D}'| = g' + k$, $|\mathcal{D}''| = g''$, $\mathcal{D}' \in \Gamma'$, $\mathcal{D}'' \in \Gamma''$; пусть все точки ∞_j , $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}''$, Q различны. Строим функцию Ψ вида: $\Psi = \Psi''$ на Γ'' – обычная одноточечная функция Бейкера–Ахиезера с дивизором $\mathcal{D}''$, $\Psi'' = e^{k_2 y + k_2^2 t} \times (1 + u k_2^{-1} + \dots)$; $\Psi = \Psi'$ на Γ' , $\Psi' = c e^{k_1 x + k_1^2 t} (1 + v k_1^{-1} + \dots)$ с дивизором $\mathcal{D}'$ степени $g' + k$ и условиями $\Psi'|_{Q_l} = \Psi''|_{Q_l}$, $l = 0, \dots, k$. Тогда $L\Psi = 0$, $(\hat{L} - [H, L])\Psi = 0$, где $S = 0$ (*m.e.* $u_y = 0$).

Возникающую иерархию систем с высшими временами при условии $S = 0$ мы называем “2D-иерархией Бюргерса” B_2 . Имеются два случая: 1) $x, y \in \mathbb{R}$ (B_2 -I); 2) $x \rightarrow z$, $y \rightarrow \bar{z}$, $\partial_x \rightarrow \partial_z$, $\partial_y \rightarrow \partial_{\bar{z}}$ (B_2 -II).

ТЕОРЕМА 2. Для переменных $z, \bar{z}$ редукция системы GKMMN к классу самосопряженных операторов $L = \partial_z \partial_{\bar{z}} + G \partial_{\bar{z}} + S$, $2G_{\bar{z}} = F_z \in \mathbb{R}$, $S \in \mathbb{R}$, совместна с динамикой по времени it :

$$[(c_t - 4c_{xy})c^{-1}]_z = 8u_{xy}, \quad (u_t + 4u_{xy})_{\bar{z}} = 2i^{-1}\{(u_{\bar{z}}c_z c^{-1})_z - (u_{\bar{z}}c_{\bar{z}} c^{-1})_{\bar{z}}\}. \quad (3)$$

Здесь $S = u_{\bar{z}} \in \mathbb{R}$, $c = e^{2\Phi}$, $\Phi \in \mathbb{R}$, $\partial_z = \partial_x - i\partial_y$, $\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$,

$$c_t - 4c_{xy} = 8a_y c = -4\operatorname{Im}(u_z)c, \quad S_t + 4S_{xy} = 8\{S\Phi_{xy} - S_x \Phi_y - S_y \Phi_x\}, \quad (4)$$

$S = a_x - b_y$, $a_y + b_x = 0$, $u = a + ib$.

Условие $S = 0$ дает уравнение B_2 -II:

$$c_t - 4c_{xy} = T(x, y, t)c, \quad \Delta T = 0, \quad T \in \mathbb{R}, \quad T = 8a_y. \quad (5)$$

Для самосопряженного факторизованного оператора L , у которого $S = 0$, кривые Γ' , Γ'' из теоремы 1 переставляются антиинволюцией $\sigma: \Gamma' \rightarrow \Gamma''$, $\Gamma'' \rightarrow \Gamma'$, $\sigma^2 = 1$. Теория основного состояния таких операторов развивается в [5]. Это – теория чисто магнитного нерелятивистского оператора Паули для частицы со спином $1/2$.

Список литературы

- [1] С. В. Манаков, УМН, **31**:5 (1976), 245–246. [2] Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков, Докл. АН СССР, **229**:1 (1976), 15–18. [3] А. П. Веселов, С. П. Новиков, Докл. АН СССР, **279**:4 (1984), 784–788. [4] B. G. Konopelchenko, Inverse Problems, **4**:1 (1988), 151–163. [5] P. G. Grinevich, A. E. Mironov, S. P. Novikov, arXiv: 1004.1157.

П. Г. Гриневич (P. G. Grinevich)
Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией

А. Е. Миронов (A. E. Mironov)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

04.05.2010

С. П. Новиков (S. P. Novikov)
Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН
E-mail: novikov@ipst.umd.edu (University of Maryland)