Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Зорич, Асимптотика допустимого роста коэффициента квазиконформности в бесконечности и обратимость контактных погружений группы Гейзенберга, *УМН*, 2010, том 65, выпуск 3, 191–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9365>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 15:01:21

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

**Асимптотика допустимого роста
коэффициента квазиконформности в бесконечности
и обратимость контактных погружений группы Гейзенберга**

В. А. Зорич

1. Введение. *Локально обратимое квазиконформное отображение $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ при $n > 2$ обратимо глобально.* Это утверждение было сформулировано М. А. Лаврентьевым [1] для $n = 3$ и позднее доказано в работе [2].

Затем оно было развито в нескольких направлениях (см. обзор [3]) и, в частности, в [4] была указана в определенном смысле точная асимптотика допустимого роста коэффициента квазиконформности на бесконечности, при которой еще можно гарантировать глобальную обратимость произвольного погружения $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Здесь мы рассматриваем аналогичный вопрос применительно к контактным отображениям в модельной ситуации погружения группы Гейзенберга в себя.

2. Формулировка основного результата. Найдена точная асимптотика допустимого роста коэффициента квазиконформности на бесконечности, при котором контактное погружение группы Гейзенберга в себя обратимо глобально.

Ниже мы даем точную формулировку соответствующей теоремы. Говоря о коэффициенте квазиконформности отображения в какой-то области, мы имеем в виду верхнюю грань линейных искажений по всем точкам этой области. Линейное искажение в точке измеряется отношением наибольшего растяжения к наименьшему. Мы не останавливаемся на подробной формулировке этого стандартного определения в терминах верхнего и нижнего пределов, заметим только, что оно пригодно и для негладкого отображения метрических пространств.

Группа Гейзенберга, которую мы здесь рассматриваем, локально является таким же каноническим представителем многообразий, наделенных контактной структурой, как и евклидово пространство по отношению к римановым многообразиям.

Будем считать, что группа Гейзенберга $\mathbb{H}_n$ топологической размерности $2n + 1$ наделена стандартной контактной структурой и согласованной с ней инвариантной метрикой Карно–Каратеодори.

Саму группу Гейзенберга можно интерпретировать в модели голоморфных автоморфизмов сферы $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ с фиксированной точкой. Контактная структура на $\mathbb{S}^{2n+1}$ при этом задается распределением комплексных касательных.

Другая возможность, которую мы будем здесь подразумевать и использовать, состоит в моделировании $\mathbb{H}_n$ в виде $\mathbb{R}^{2n+1}$ со специальным (соответствующим $\mathbb{H}_n$)

умножением элементов (точек). Контактная структура в $\mathbb{R}^{2n+1}$ возникает разнесением касательной гиперплоскости в нейтральном элементе группы (в начале координат $\mathbb{R}^{2n+1}$) по всей группе. Метрика Карно–Каратеодори определяется евклидовой длиной кратчайшей кривой, соединяющей точки и допустимой (контактной) для указанного контактного распределения в $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Теперь сформулируем основное утверждение.

ТЕОРЕМА. Пусть $\mathbb{H}_n$ – группа Гейзенберга топологической размерности $2n + 1$, наделенная стандартной контактной структурой и согласованной с ней инвариантной относительно действия группы метрикой Карно–Каратеодори. Пусть $f: \mathbb{H}_n \rightarrow \mathbb{H}_n$ – контактное погружение, а $k(r)$ – коэффициент квазиконформности отображения f в шаре радиуса r с центром в нейтральном элементе группы.

Если погружение f таково, что $\int_0^\infty \frac{dr}{rk(r)} = \infty$, то f – биекция. Указанная асимптотика допустимого роста $k(r)$ точна в том смысле, что если соответствующий интеграл сходится, то можно построить пример вложения $f: \mathbb{H}_n \rightarrow \mathbb{H}_n$, имеющего $k(r)$ своим коэффициентом квазиконформности и такого, что $f(\mathbb{H}_n)$ – ограниченная часть $\mathbb{H}_n$.

3. Схема доказательства. В принципе здесь можно ограничиться коротким указанием: следуем идее работы [4], используя при этом формулу конформной емкости сферического конденсатора на группе Гейзенберга [5] и, разумеется, модифицированные к метрике Карно–Каратеодори определение конформной емкости и неравенства Грёча.

Список литературы

- [1] М. А. Лаврентьев, ДАН СССР, **20** (1938), 241–242. [2] В. А. Зорич, Матем. сб., **74**:3 (1967), 417–433. [3] В. А. Зорич, УМН, **57**:3 (2002), 3–28. [4] В. А. Зорич, Докл. АН СССР, **181**:3 (1968), 530–533. [5] A. Korányi, H. M. Reimann, Bull. Sci. Math. (2), **111**:1 (1987), 3–21.

В. А. Зорич (V. A. Zorich)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: vzor@mccme.ru

Представлено Д. В. Аносовым
Принято редколлегией
12.05.2010