Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Скубачевский, О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных уравнений, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 1, 169–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm937>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 13:32:41

**О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ
ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

А. Л. СКУБАЧЕВСКИЙ

В заметке рассматривается квазилинейное параболическое функционально-дифференциальное уравнение, возникающее в нелинейной оптике [1]. Результаты данной работы о стационарных решениях этого уравнения дают необходимые условия существования бифуркаций. Один из подходов к исследованию бифуркаций основан на спектральных свойствах линеаризованного эллиптического функционально-дифференциального оператора. Получены необходимые и достаточные условия существования ортонормированного базиса, состоящего из собственных функций этого оператора.

Рассмотрим квазилинейное параболическое уравнение

$$(1) \quad u_t = D\Delta u - u + K(1 + \gamma \cos u_g) \quad (x \in Q, t > 0).$$

Здесь $Q \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$; $D, \gamma > 0$, $K \neq 0$ – вещественные числа; D – коэффициент диффузии, γ – видность интерференционной картины, K – коэффициент, пропорциональный интенсивности входного поля; $u = u(x, t)$ – фаза световой волны, $u_g = u(g(x), t)$; g – невырожденное преобразование класса C^3 , отображающее ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ($\bar{Q} \subset \Omega$) на $g(\Omega)$ так, что $g(Q) \cap Q \neq \emptyset$, $g(x) \neq x$.

Краевое условие имеет вид

$$(2) \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \tilde{\nu}} \right|_{\partial Q \times (0, \infty)} = 0,$$

где $\tilde{\nu}$ – единичный вектор внешней нормали к ∂Q в точке x , $\tilde{\nu} = (\nu, 0)$.

Поскольку в функционально-дифференциальном уравнении (1), вообще говоря, $g(Q) \setminus Q \neq \emptyset$, задается дополнительно следующее условие:

$$(3) \quad u(g(x), t) = 0 \quad (x \in Q : g(x) \notin Q; t > 0).$$

Очевидно, если $g(Q) \subset Q$, условие (3) не задается.

Стационарным решением задачи (1)–(3) мы назовем решение, не зависящее от x и t в цилиндре $Q \times (0, \infty)$. Очевидно, такие решения должны удовлетворять следующим условиям:

$$(4) \quad w(x) = K[1 + \gamma \cos w(g(x))] \quad (x \in Q),$$

$$(5) \quad w(g(x)) = 0 \quad (x \in Q : g(x) \notin Q),$$

$$(6) \quad w(x) = \text{const} \quad (x \in Q).$$

Из определения стационарного решения легко получить следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $g(Q) \setminus Q \neq \emptyset$.

Тогда условие $K(1 + \gamma) = 2\pi n$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) является необходимым и достаточным для разрешимости задачи (4)–(6). Если $K(1 + \gamma) = 2\pi n$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$), задача (4)–(6) имеет единственное решение $w(x) = K(1 + \gamma)$.

Обозначим через $\hat{w}$ некоторое решение задачи (4)–(6) при $K = \hat{K}$. Положим $u(x, t) = \hat{w} + v(x, t)$. Тогда

$$(7) \quad v_t = Lv + N(v),$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-01-00247).

где $Lv = D\Delta v - v - \hat{K}\gamma \sin \hat{w} v_g$, $N(v) = \hat{K}\gamma \{\cos(\hat{w} + v_g) - \cos \hat{w} + v_g \sin \hat{w}\}$.

Рассмотрим линеаризованный оператор $L: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ с областью определения $D(L) = \left\{ v \in W_2^2(Q) : \frac{\partial v}{\partial \nu} \Big|_{\partial Q} = 0 \right\}$, действующий по формуле $Lv = D\Delta v - v - \hat{K}\gamma \sin \hat{w} v_g$. Здесь $W_2^k(Q)$ – пространство Соболева функций из $L_2(Q)$, имеющих все обобщенные производные до порядка k включительно из $L_2(Q)$.

Как известно, существование бифуркаций связано с наличием пары простых комплексно сопряженных чисто мнимых собственных значений оператора L и непрерывным изменением стационарного решения при непрерывном изменении параметра K . В случае $g(Q) \setminus Q \neq \emptyset$ стационарные решения существуют лишь при изолированных значениях коэффициента $\hat{K} = 2\pi n(1 + \gamma)^{-1}$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$), а линеаризованный оператор $L = D\Delta v - v$ является самосопряженным. Следовательно, при $g(Q) \setminus Q \neq \emptyset$ задача (1)–(3) не имеет бифуркационного семейства периодических решений. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что $g(Q) \subset Q$. Обозначим $G = \{x \in Q : g^2(x) \neq x\}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $g(Q) \subset Q$, $\hat{w} \neq \pi n$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) и пусть $G \neq \emptyset$.

При этих предположениях собственные функции оператора L составляют ортонормированный базис в $L_2(Q)$ тогда и только тогда, когда $g(Q) = Q$ и $g(x) = Ax + b$ ($x \in Q$), где $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, $0 < \theta < 2\pi$, $\theta \neq \pi$, $b \in \mathbb{R}^2$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $g(Q) \subset Q$, $\hat{w} \neq \pi n$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) и пусть $G = \emptyset$.

При этих предположениях собственные функции оператора L составляют ортонормированный базис в $L_2(Q)$ тогда и только тогда, когда $g(Q) = Q$ и $|J_g(x)| \equiv 1$ ($x \in Q$), где $J_g(x) = \begin{vmatrix} g_{1x_1}(x) & g_{1x_2}(x) \\ g_{2x_1}(x) & g_{2x_2}(x) \end{vmatrix}$, $g(x) = (g_1(x), g_2(x))$.

В заключение отметим, что существование бифуркационного семейства решений задачи (1), (2) спектральные свойства оператора L рассматривались в работе [2] в случае, когда $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$, а для $g(x)$ – преобразование поворота на угол $0 < \theta < 2\pi$. Некоторые вопросы спектральной теории для эллиптических функционально-дифференциальных операторов изучались в [3], [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Воронцов М. А., Думаревский Ю. Д., Приудзе Д. В., Шмальгаузен В. И. // Изв. АН СССР. Физика. 1988. Т. 52. № 2. С. 374–376. [2] Razgulin A. V. // Chaos in Optics / ed. Rajarshi Roy. Proceedings SPIE 2039, 1993. P. 342–352. [3] Skubachevskii A. L. // J. Differential Equations. 1986. V. 63. № 3. P. 332–361. [4] Скубачевский А. Л., Цветков Е. Л. // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 9. С. 1766–1776.

Принято редколлегией
10.10.1995