Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Д. Казанцев, Монотонное упрощение книжных представлений некоторых сателлитных узлов, *УМН*, 2010, том 65, выпуск 4, 195–196

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9370>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 03:24:09

Монотонное упрощение книжных представлений некоторых сателлитных узлов

А. Д. Казанцев

В недавней работе [1] И. Дынникова было показано, что прямоугольную диаграмму тривиального узла можно привести к тривиальному виду с помощью монотонного упрощения. В той же работе показывается, что с помощью монотонного упрощения можно решить и задачу разложения узла или зацепления на простые неприводимые слагаемые. В настоящей работе изучается аналогичный вопрос: в некоторой специальной серии случаев прямоугольную диаграмму сателлитного узла можно монотонно упростить до такого вида, где структура несжимаемого тора (компаньона) из дополнения к этому узлу будет явно видна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Сателлитным узлом* в пространстве S^3 (или $\mathbb{R}^3$) называют узел K , в дополнении к которому содержится несжимаемый тор, не изотопный границе окрестности данного узла в пространстве $S^3 \setminus K$ (соответственно $\mathbb{R}^3 \setminus K$). По отношению к этому узлу K тор или сердцевину тора мы будем называть *компаньонами* в зависимости от контекста.

В работе [1] явно описано, как по прямоугольной диаграмме узла получать соответствующее ей книжное представление узла и наоборот – как по книжному представлению получить прямоугольную диаграмму. Поэтому мы будем пользоваться эквивалентными в этом смысле языками прямоугольных диаграмм и книжных представлений, выбирая тот, который в данный момент удобнее.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть K_b – книжное представление какого-то узла. Через K_r обозначим прямоугольную диаграмму, соответствующую этому книжному представлению. Будем говорить, что на прямоугольной диаграмме K_r *непосредственно обнаружима структура компаньона*, если все вертикальные и горизонтальные отрезки K_r находятся внутри замкнутой полосы, являющейся окрестностью другой прямоугольной диаграммы r . При этом книжное представление r должно быть сердцевиной тора-компаньона, лежащего в пространстве $S^3 \setminus K_b$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что структура тора-компаньона *обнаружима с помощью монотонного упрощения* на прямоугольной диаграмме K_r узла, если существует такая последовательность элементарных преобразований прямоугольных диаграмм узла, не увеличивающих сложность, что на итоговой диаграмме непосредственно обнаружима структура компаньона.

Упрощение до шахматной структуры. Всегда ли структура тора-компаньона обнаружима на прямоугольной диаграмме узла с помощью монотонного упрощения? Подобная задача, в которой узлы представлялись замкнутыми косами, а не прямоугольными диаграммами, изучалась ранее в работах Дж. Бирман и В. Менэско [2], [3]. Переноса рассуждения в этих работах на случай прямоугольных диаграмм, мы получаем, что любой несжимаемый тор, лежащий в дополнении к книжному представлению узла, может быть преобразован к виду, в котором слоение, высекаемое на нем страницами книжного представления, имеет шахматную структуру.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что слоение, высекаемое страницами $\mathcal{D}_t = t \times S_\phi^1 \times I$, где t – фиксировано, на поверхности, вложенной в $S^3 = S_\phi^1 * S_\theta^1$, *имеет шахматную структуру*, если выполняются условия:

- 1) отсутствуют замкнутые слои (особыми точками могут быть только седла);
- 2) поверхность может быть разбита на четырехугольники с вершинами в вершинах слоения (точки пересечения поверхности с окружностью S_ϕ^1) и сторонами, идущими по слоям; в каждой вершине слоения сходятся ровно четыре четырехугольника;
- 3) каждый такой четырехугольник содержит ровно одну седловую точку;

4) любые два седла, лежащие в соседних четырехугольниках, имеют разную ориентацию (подробнее см. [1]).

Как показала К. Нг [4], тор с шахматной структурой может быть устроен сложнее, чем первоначально утверждалось в работе [2], и потому неочевидно, что структура такого тора может быть видна на прямоугольной диаграмме узла.

Опишем серию торов, предложенную К. Нг. Поскольку книжное представление узла определено в пространстве S^3 , являющемся джойном $S^1_\phi * S^1_\theta$, то для того, чтобы задать вложение поверхности P в S^3 , достаточно для каждого $t \in S^1_\theta$ задать ее пересечение со страницей $\mathcal{D}_t$. Такое вложение можно представлять себе как циклический поток картинок (параметризованный точками окружности S^1_θ), являющихся пересечениями страниц с поверхностью. Для задания комбинаторного типа вложения достаточно указать пересечения поверхности с критическими страницами и по одному пересечению с некритическими страницами между ними.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Продавленной трубкой* мы будем называть образ цилиндра $S^1 \times I$ при вложении в сферу $S^3 = S^1 * S^1$, заданном последовательностью перестроек:

(Первая картинка в серии соответствует пересечению цилиндра со страницей $\mathcal{D}_{t_i}$, а последняя – со страницей $\mathcal{D}_{t_j}$. Здесь (t_i, t_j) – некоторый отрезок окружности S^1_θ .)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Продавленным тором* мы будем называть образ двумерного тора $T^2 = S^1 \times S^1$ при вложении в 3-сферу: $\rho: T^2 \hookrightarrow S^3 = S^1 * S^1$, если выполнены следующие условия: 1) тор T^2 склеен из цилиндров: $T^2 = C_1 \cup \dots \cup C_n$ (цилиндры склеиваются в тор по своим основаниям); 2) образ каждого цилиндра $\rho(C_i)$ является продавленной трубкой.

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Продавленный тор обладает шахматной структурой.*

ТЕОРЕМА. Пусть K_b – книжное представление некоторого сателлитного узла, K_r – прямоугольная диаграмма этого узла, соответствующая представлению K_b , и T – продавленный тор в дополнении к узлу ($T \hookrightarrow S^3/K_b$), являющийся компаньоном. Тогда структура тора T обнаружима на прямоугольной диаграмме узла с помощью монотонного упрощения.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогичное утверждение для зацеплений неверно. Например, необнаружимые продавленные торы существуют на неупрощаемой прямоугольной диаграмме торического зацепления $(4, 4)$.

Список литературы

- [1] I. A. Dynnikov, *Fund. Math.*, **190** (2006), 29–76. [2] J. S. Birman, W. W. Menasco, *Topology*, **33**:3 (1994), 525–556. [3] J. S. Birman, W. W. Menasco, *Topology*, **37**:1 (1998), 225. [4] K. Y. Ng, *J. Knot Theory Ramifications*, **7**:2 (1998), 205–216.

А. Д. Казанцев (A. D. Kazantsev)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: kaza57@gmail.com

Представлено И. А. Дынниковым
Принято редколлегией
24.05.2010