Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Карпушкин, Число компонент связности гиперповерхности уровня гармонического полинома, *УМН*, 2010, том 65, выпуск 4, 197–198

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9371>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 13:51:50

Число компонент связности гиперповерхности уровня гармонического полинома

В. Н. Карпушкин

Эта работа есть развитие работ [1], [2] и имеет целью получение более точных оценок для числа компонент связности гиперповерхности уровня гармонического полинома степени m в $\mathbb{R}^{n+1}$ ($n \geq 1$), чем данные в работе [2]. Оценки последней работы имеют вид $2m^n + O(m^{n-1})$, $m \rightarrow \infty$. При их получении используется принцип максимума и алгебраическая геометрия. Оценки настоящей работы имеют вид $2m^n/n! + O(m^{n-1})$. При их получении используется принцип максимума для гармонических полиномов и теорема Куранта о нулях собственных функций дифференциального оператора второго порядка (см. [3], [4]).

Пусть S^n – сфера радиуса 1 с центром в начале координат $O \in \mathbb{R}^{n+1}$. Пусть G – однородный гармонический полином в $\mathbb{R}^{n+1}$ степени m и Q – сужение полинома G на S^n . Предположим, что все критические точки функции Q уровня нуль морсовские. Пусть g – произвольный гармонический полином степени меньше m в $\mathbb{R}^{n+1}$.

ТЕОРЕМА. Число компонент дополнения к множеству уровня полинома $G + g$ не превосходит $C_{n+m-1}^n + C_{n+m-2}^n + 1$.

СЛЕДСТВИЕ. Число компонент связности множества уровня полинома $G + g$ не превосходит $C_{n+m-1}^n + C_{n+m-2}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Пусть Δ – оператор Лапласа на S^n .

ЛЕММА 1 [5]. а) Каждая собственная функция оператора Δ является сужением однородного гармонического полинома в $\mathbb{R}^{n+1}$ некоторой степени m и имеет собственное значение $m(1-m-n)$, что порождает изоморфизм линейных пространств однородных гармонических полиномов степени m и собственных функций с указанным собственным значением.

б) Размерность пространства собственных функций оператора Δ , соответствующих собственному значению $m(1-m-n)$, равна $C_{n+m}^n - C_{n+m-2}^n$.

ТЕОРЕМА КУРАНТА [3], [4]. Пусть M – компактное, ориентируемое, риманово многообразие без края. Пусть $\phi_j: M \rightarrow \mathbb{R}$ – собственная функция оператора Лапласа на M , соответствующая j -му собственному значению. Множество нулей ϕ_j делит M не более, чем на j частей.

Из леммы 1 и теоремы Куранта получим: нули любого однородного гармонического полинома степени m делят S^n не более чем на $C_{n+m-2}^n + C_{n+m-1}^n + 1$ компонент связности.

Докажем, что множество уровня нуль полинома $G + g$ делит $\mathbb{R}^{n+1}$ не более чем на $C_{n+m-1}^n + C_{n+m-2}^n + 1$ компонент связности.

ЛЕММА 2. Пусть Q – собственная функция оператора Δ и a – точка в S^n . Предположим, что a – морсовская критическая точка функции Q . Тогда a – не экстремум функции Q .

Доказательство леммы 2 несложно.

ЛЕММА 3. Пусть f – сужение однородного полинома степени m на S^n . Предположим, что f имеет только морсовские критические точки на уровне нуль и среди них нет экстремумов. Тогда для любого полинома P степени меньше m существует такая константа $r_1 > 0$, что при $r > r_1$ имеем $\text{rk } H_0\{s \in S^n : f(s) \neq 0\} \geq \text{rk } H_0\{s \in S^n : f(s) + P(s, r)/r^m \neq 0\}$.

Лемма 3 следует из локальной устойчивости функции Q в некоторой окрестности каждой особой точки уровня нуль.

Пусть W – множество уровня гармонического полинома в $\mathbb{R}^{n+1}$.

ЛЕММА 4. *Множество $\mathbb{R}^{n+1} \setminus W$ не имеет ограниченных компонент.*

Лемма 4 следует из принципа максимума.

Из лемм 2, 3 следует, что существует r_2 , зависящее от g и G , такое, что для всех $r \geq r_2$ имеем: $\operatorname{rk} H_0\{s \in S^n : Q(s) \neq 0\} \geq \operatorname{rk} H_0\{s \in S^n : Q(s) + g(s, r)/r^m \neq 0\}$. Из леммы 4 следует, что всякая компонента связности дополнения к множеству уровня нуль полинома $G + g$ пересекается со сферой достаточно большого радиуса. Таким образом, существует r_3 , зависящее от g и G , такое, что при $r \geq r_3$ имеем: $\operatorname{rk} H_0\{s \in S^n : Q(s) + g(s, r)/r^m \neq 0\} \geq \operatorname{rk} H_0\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : G(x) + g(x) \neq 0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ. Пусть $\tilde{H}(A, \mathbb{Z}_2)$ – гомологии одноточечной компактификации множества $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ с коэффициентами из $\mathbb{Z}_2$.

ЛЕММА 5. *Множество неособых точек всюду плотно в W – множестве уровня гармонического полинома.*

Лемма 5 следует из работы [6].

В силу двойственности Александера имеем: $\operatorname{rk} H_0(\mathbb{R}^{n+1} \setminus W) = \operatorname{rk} \tilde{H}_n(W, \mathbb{Z}_2) + 1$. Из леммы 5 и работы [7] следует неравенство $\operatorname{rk} H_0(W) \leq \operatorname{rk} \tilde{H}_n(W, \mathbb{Z}_2)$, что и доказывает утверждение.

Автор благодарен А. В. Чернавскому и С. М. Гусейн-Заде за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] В. Н. Карпушкин, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1981, № 4, 3–4.
 [2] В. Н. Карпушкин, *Матем. заметки*, **62:6** (1997), 831–835. [3] Д. Гильберт, Р. Курант, *Методы математической физики*. т. 1, ГИТТЛ, М., Л., 1951, 476 с. [4] A. Pleijel, *Comm. Pure Appl. Math.*, **9:3** (1956), 543–550. [5] М. А. Шубин, *Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория*, Наука, М., 1978, 279 с. [6] V. E. Galafassi, *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, **30:1** (1960), 6–16. [7] A. Borel, A. Haefliger, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **2** (1958), 49–96.

В. Н. Карпушкин (V. N. Karpushkin)
 Институт проблем передачи информации РАН

Представлено С. М. Гусейн-Заде
 Принято редколлегией
 19.01.2010