Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Аграчев, Инвариантные лагранжевы подмногообразия диссипативных систем, *УМН*, 2010, том 65, выпуск 5, 185–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9372>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 17:23:18

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Инвариантные лагранжевы подмногообразия диссипативных систем

А. А. Аграчѐв

Пусть M — компактное риманово многообразие класса C^k , $k \geq 2$, с римановой структурой $(\xi, \eta) \mapsto \langle I_q^{-1}\xi, \eta \rangle$, $\xi, \eta \in T_q M$, $q \in M$, где $I_q: T_q^* M \rightarrow T_q M$ — самосопряженное линейное отображение, определяющее положительно определенную квадратичную форму $z \mapsto \langle z, I_q z \rangle$, $z \in T_q^* M$.

Пусть $V \in C^k(M)$ и ω — такая замкнутая дифференциальная 1-форма на M класса C^k , что $\nabla \omega = 0$, где $\nabla \omega$ — ковариантная производная формы ω . Рассмотрим гамильтониан $H \in C^k(T^* M)$, заданный формулой

$$H(z) = \frac{1}{2} \langle I_q(z + \omega_q), z + \omega_q \rangle + V(q), \quad z \in T_q^* M.$$

Пусть $\vec{H}$ — гамильтоново векторное поле на $T^* M$, отвечающее гамильтониану H , а ℓ — “вертикальное” эйлерово векторное поле векторного расслоения $T^* M \rightarrow M$. В локальных координатах $z = (p, q)$, $p, q \in \mathbb{R}^n$, $T_q^* M = (\mathbb{R}^n, q)$, эти объекты имеют вид: $H(p, q) = \frac{1}{2} (p + \omega(q))^* I_q (p + \omega(q)) + V(q)$, $\vec{H}(p, q) = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p^i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p^i} \right)$,

$$\ell(p, q) = \sum_i p^i \frac{\partial}{\partial p^i}.$$

Рассмотрим диссипативную систему $\dot{z} = \vec{H}(z) - \alpha \ell(z)$, где α — положительная константа. Нетрудно видеть, что любая ограниченная траектория этой системы лежит в множестве

$$B_H \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ z \in T^* M : H(z - \omega_{\pi(z)}) \leq \max_{q \in M} H(0_q) \right\},$$

где 0_q — начало координат векторного пространства $T_q^* M$ и $\pi: T^* M \rightarrow M$, $\pi(T_q^* M) = q$.

Для всякого $z \in T^* M$ обозначим через $\rho(z)$ максимальное собственное значение симметричного оператора $\xi \mapsto \Re(\xi, I_q z) I_q z + \nabla_\xi(\nabla V)$, $\xi \in T_q M$, где $\Re$ — риманова кривизна. Наконец, положим $r = \max\{\rho(z) : z \in B_H\}$.

Обозначим Ω^α множество всех таких абсолютно непрерывных кривых $\gamma: \mathbb{R}_+ \rightarrow M$, что интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \langle I_{\gamma(t)}^{-1} \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle dt$ сходится. Введем функционал *дисконтного действия*

$$\mathfrak{I}_\alpha(\gamma) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \left(\frac{1}{2} \langle I_{\gamma(t)}^{-1} \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle - V(\gamma(t)) + \langle \omega_{\gamma(t)}, \dot{\gamma}(t) \rangle \right) dt, \quad \gamma \in \Omega_\alpha.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $u(q) = -\inf\{\mathfrak{I}_\alpha(\gamma) : \gamma \in \Omega_\alpha, \gamma(0) = q\}$, $q \in M$. Если $r \leq 0$ или $0 < r < \alpha^2/4$ и $k < 2/(1 - 2\sqrt{r}/\alpha)$, то:

1) $u \in C^k(M)$ и отображение $(H, \alpha) \mapsto u$ непрерывно в топологии C^2 ;

2) функция u удовлетворяет модифицированному уравнению Гамильтона–Якоби $H(du) + \alpha u = 0$, а $\{d_q u : q \in M\} \subset T^*M$ – инвариантное подмногообразие системы $\dot{z} = \tilde{H}(z) - \alpha \ell(z)$;

3) существует такая содержащая 0 окрестность $\mathcal{O}$ функции u в $C^2(M)$, что для любого $v_0 \in \mathcal{O}$ классическое решение v_t задачи Коши

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} + H(du_t) + \alpha u_t = 0, \quad u_0 = v_0,$$

определено для всех $t \geq 0$ и $\|dv_t - du\|_{C^1} \rightarrow 0$ с экспоненциальной скоростью при $t \rightarrow +\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 1 справедлива для гамильтонианов на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ вида $H(p, q) = |p + a|^2/2 + V(q)$, где $a \in \mathbb{R}^n$ – постоянный вектор и V – гладкий периодический потенциал. Здесь r – максимум собственных чисел матриц d^2V/dq^2 , $q \in \mathbb{R}^n$. Если $r < \alpha^2/4$, то уравнение

$$\frac{1}{2} \left| \frac{du}{dq} + a \right|^2 + V(q) + \alpha u = 0$$

имеет периодическое решение u класса C^k , где k – максимальное целое число, строго меньшее, чем $2/(1 - \sqrt{1 - 4r/\alpha^2})$. При этом $\{(du/dq, q) : q \in \mathbb{R}^n\}$ – инвариантное подмногообразие системы

$$\dot{q} = p + a, \quad \dot{p} = -\frac{dV}{dq} - \alpha p.$$

Доказательство теоремы 1 основано на результатах работ [1] и [2]. В самом деле, теорема 1 есть некоторое усиление результатов работы [1]. А именно, рассматривается более широкий класс гамильтонианов (допускаются ненулевые формы ω), улучшается гладкость функции u и формулируются свойства устойчивости полученного решения. В действительности, форма ω не влияет на каноническую связность и операторы кривизны, так что рассмотрение более общих гамильтонианов не требует существенного изменения доказательства.

Улучшение гладкости и устойчивость опираются на работу [2]. В самом деле, предложение 1 из [1] влечет, что $\{d_q u : q \in M\}$ – нормально гиперболическое инвариантное подмногообразие (см. определение в [2]) потока, порожденного векторным полем $\tilde{H}(z) - \alpha \ell(z)$. Более того, это нормально гиперболическое инвариантное подмногообразие имеет нулевое неустойчивое подрасслоение и, в действительности, может быть названо “нормально устойчивым” инвариантным подмногообразием. Теорема 4.1 из [2] содержит оценки степени гладкости нормально гиперболического инвариантного подмногообразия в терминах показателей Ляпунова, а анализ доказательства предложения 1 из [1] дает явные оценки показателей Ляпунова через константы r и α .

Список литературы

- [1] А. А. Аграчев, *Дифференциальные уравнения и топология. I*, Тр. МИАН, **268**, МАИК, М., 2010, 24–39; англ. пер.: А. А. Agrachev, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **268** (2010), 17–31.
 [2] M. W. Hirsch, C. C. Pugh, M. Shub, *Invariant manifolds*, Lecture Notes in Math., **583**, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

А. А. Аграчёв (А. А. Agrachev)
 Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;
 International School for Advanced Studies (SISSA)
 E-mail: agrachev@mi.ras.ru, agrachev@sissa.it

Представлено В. М. Закалюкиным
 Принято редколлегией
 08.07.2010