Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Л. Ершов, На пути от логики к алгебре, *УМН*, 2010, том 65, выпуск 5, 143–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9379>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 18:01:56

УДК 518.5

На пути от логики к алгебре

Ю. Л. Ершов

В работе, которая является стенограммой¹ выступления Ю. Л. Ершова на Международной конференции “Мальцевские чтения 2009” (Новосибирск, 24–28 августа 2009 г.), обсуждается влияние трех работ Анатолия Ивановича Мальцева [1]–[3] на развитие алгебры и математической логики.

Библиография: 75 названий.

Ключевые слова: локальные теоремы, элементарные теории полей.

Название доклада связано с одним известным посвящением. Книга Л. Хенкина, Дж. Д. Монка и А. Тарского [4] о цилиндрических алгебрах содержит это знаменитое посвящение: “Памяти Анатолия Ивановича Мальцева, который указал нам путь из логики в алгебру”. Я считаю, что это удачные слова, и использовал их в названии.

Творчество Анатолия Ивановича очень многогранно, и во многих докладах на этой конференции будут отражены те или иные аспекты работы Анатолия Ивановича. Более того, я должен сказать, что в одном докладе дать серьезный глубокий анализ влияния, которое оказали работы Анатолия Ивановича на развитие математики, очень сложно, и на это не хватит времени. Поэтому я выбрал ограниченную задачу, но она репрезентативна. Я буду обсуждать три работы Анатолия Ивановича: его самую первую опубликованную работу “Об исследованиях в области математической логики” [1] и две работы “Об одном общем методе получения локальных теорем теории групп” [2] и “О неразрешимости элементарных теорий некоторых полей” [3]. Если есть дорога от логики к алгебре, то есть и верстовые столбы. Я полагаю, что эти три работы являются важными вехами на этом великом пути.

Первая опубликованная работа Анатолия Ивановича [1] есть краеугольный камень не просто на пути к алгебре, а, на самом деле, в создании теории моделей. По моему мнению, есть три основных создателя теории моделей. Альфред Тарский инициировал ее возникновение. Более того, в тридцатых годах

¹Автор глубоко признателен доктору физ.-матем. наук М. В. Семёновой (ИМ СО РАН), которая сделала читаемой эту стенограмму.

прошлого века он предложил исходные понятия (понятие модели и понятие истинности формулы на модели). Далее идут работа Анатолия Ивановича и разнобразная деятельность Абрахама Робинсона. Эти три человека – Тарский, Мальцев и А. Робинсон, – безусловно являются основателями теории моделей, теории, которая сама по себе как математическая дисциплина сейчас развивается, и достаточно глубоко. Но, конечно, для нас и для деятельности Мальцева были важны ее связи и возможности использования теории моделей для получения нетривиальных результатов в алгебре и вообще в математике. Потом эта деятельность продолжилась: Абрахам Робинсон был создателем нестандартного анализа, где с помощью методов теории моделей в анализе также были получены нетривиальные результаты.

Посмотрим коротко на историю. Как было отмечено, базисные понятия теории моделей были предложены Тарским, и им же была инициирована деятельность в этой области. Какие основные теоремы были получены? Теорема Гёделя о полноте (1930), которая увязывает понятие истинности и понятие доказуемости. Теорема компактности Мальцева [1], о которой речь пойдет впереди. Статья Анатолия Ивановича [1] была опубликована в 1936 г. Однако в своей статье “К истории алгебры в СССР в первые 25 лет” [5], которая была опубликована в “Алгебре и логике” уже после его смерти, он в явном виде указывает, что эта теорема была доказана им в 1931–32 гг. Также можно указать теорему Левенгейма (1915) о том, что если система аксиом имеет какую-то модель (может быть, громадную), то она, на самом деле, имеет и счетную модель. Это теорема о существовании модели “вниз”, а есть и теоремы, которые говорят о расширении моделей или о существовании моделей очень больших мощностей. Первая теорема такого сорта – это теорема Скулема (1934), который доказал, что аксиоматика арифметики не является категоричной, т. е. существуют нестандартные модели арифметики.² А Мальцев в первой своей работе [1] показал, что это не является специфическим свойством натуральных чисел и любая бесконечная модель имеет сколь угодно большое (элементарное) расширение.

Важным орудием в использовании теории моделей являются интерполяционные теоремы, которые были доказаны Крейгом (1957) и Линдоном (последним была доказана уточненная теорема, где рассматриваются уже позитивные и негативные вхождения переменных, 1959). Важным применением является теорема об опускании типов (Гжегорчик, Мостовский, 1961).

Наряду с теоремами для науки очень важны понятия. Какие же основные понятия были введены? Я уже говорил, что Тарскому принадлежат основные начальные понятия. Скулем ввел скулемовские функции (1920), которые очень важны для применений. Тарский и Вот рассматривали понятия элементарного расширения, цепи элементарных расширений (1954). Важным понятием является понятие неразличимых элементов. Оно появилось в работе Эренфойхта и Мостовского (1957), где была доказана теорема о том, что существуют не

²Как отмечено выше, возможно, А. И. Мальцев был первым, кто это установил.

просто большие модели, а существуют модели с большой группой автоморфизмов. Очень важны понятие насыщенной модели (Вот), понятие модельной полноты, которое было введено Робинсоном, и связанные с этим понятия модельного пополнения и модельного компаньона. Я считаю важным понятие экзистенциальной замкнутости (или $\exists$ -замкнутости), хотя не знаю, кто первый ввел это понятие. Это общее понятие хорошо улавливает многие свойства, например, такое хорошо известное базовое свойство, как алгебраическая замкнутость полей. Это не специфическое свойство: на самом деле, оно может быть определено в более широком контексте. Важной является конструкция ультрапроизведений, которые в неявном виде появились уже и в работе Скулема, и в работе Мальцева. А Лось доказал важную теорему об элементарных свойствах ультрапроизведений.

С работ Морли, где было введено понятие ранга, которое становилось все более важным, началась некоторая новая ступень в развитии теории моделей. Наконец, появились понятия стабильных и суперстабильных теорий (Шелах). Когда эти понятия появились впервые, они казались очень абстрактными и было трудно представить возможности их применения к реальной математике. Однако, как показало развитие, эти понятия оказались очень важными. Зильбер инициировал так называемую геометрическую теорию стабильности. Далее Зильбер и Хрушовский ввели понятие геометрии Зариского. Это тоже очень абстрактное понятие, которое, однако, оказалось весьма полезным. Исследование одного конкретного вопроса, который я буду дальше обсуждать, привело к введению понятия o -минимальных структур, которое в дальнейшем оказалось также очень важным.

Я приведу некоторый (неполный) список книг, в которых в разное время канонизировались те понятия и результаты теории моделей, которые были введены. Важной для нашего обсуждения связи логики и алгебры является книга Абрахама Робинсона “Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры” [6], где уже появились элементы нестандартного анализа. Базисной является книга Чанга и Кейслера “Теория моделей” [7], которую, я думаю, изучало большинство присутствующих. Более полный и современный вариант – это книга Вилфрида Ходжеса “Теория моделей” [8]. Наконец, очень толстая, очень абстрактная, казавшаяся не имеющей никаких применений книга Шелаха “Теория классификации и число неизоморфных моделей” [9]. Эта книга оказалась важным дальнейшим шагом в развитии теории моделей и нахождении возможностей ее нетривиальных применений. Более ориентированными на приложения к алгебре являются книги Б. Пуаза [10] и Дж. Сакса [11]. Изложение понятия геометрии Зариского содержится в обзорной статье Хрушовского и Зильбера [12], вышедшей в журнале Американского математического общества. Важная книга, где описывается одно из самых современных направлений, – это книга Ван ден Дриса “Хорошая топология и o -минимальные структуры” [13].

Если первая часть касалась роли первой работы Мальцева [1] в создании и развитии теории моделей, то вторая работа Мальцева “Об одном общем мето-

де получения локальных теорем теории групп” [2], на мой взгляд, представляет собой пример открытия. В математике как обычно происходит дело? Развивается теория, накапливаются проблемы, к этим проблемам постепенно подбираются. Происходит некоторая эволюция, а потом время от времени случается качественный скачок, когда эти проблемы решаются, и теория движется дальше. Но, по крайней мере, само направление исследований понятно. А иногда бывают такие скачки, которые я бы назвал трансцендентными. Сейчас принято говорить, что очень естественно было применить локальную теорему из теории моделей для получения локальных теорем в теории групп. Это совсем не так. Это совсем не было естественным, и работа Мальцева [2] произвела на меня (и не только на меня) сильнейшее впечатление какого-то необычного прорыва как бы ниоткуда. Но тем не менее это был первый пример применения локальной теоремы, которая была доказана в теории моделей, для получения нетривиальных теорем, т. е. теорем, которые не были известны в теории групп. Локальные теоремы в теории групп – это довольно традиционная тематика. И оказалось, что можно эти теоремы получить совсем с другой точки зрения. Это означает, что причины того, что теорема верна, совсем другие, а не те специфические свойства, которые использовались ранее. Я об этом упомяну чуть позже.

Эта работа Анатолия Ивановича [2] была опубликована, к сожалению, в неподходящее время и в неподходящем журнале. Время было неподходящим с исторической точки зрения: 1941 год – начало Великой Отечественной войны. А журнал, где была опубликована статья, – “Ученые записки Ивановского педагогического института” – и в самой России не так уж был известен. Поэтому эта работа имела сложную судьбу. За рубежом она оставалась неизвестной довольно значительное время. Но тем не менее, в своем докладе на Международном конгрессе по логике, методологии и философии науки, который проходил в 1960 г. в Стэнфорде, А. Робинсон [14] приводит ссылку на эту работу Мальцева, и видно, что он восхищен ею. Сам Робинсон многое сделал для применения логики к алгебре и к анализу.

Нужно сказать, что в техническом отношении эта работа Мальцева (конкретно, применение локальной теоремы) не получила такого уж большого развития. Но тем не менее, в развитие этой техники сам Анатолий Иванович написал две статьи [15], [16]. В одной из них [15] он показал, как можно расширить это и как, скажем, можно получить теорему Стоуна о представлении булевых алгебр таким же способом. Хотя Анатолий Иванович с помощью логических методов доказал новые локальные теоремы в теории групп, трудно сказать, что это получило немедленное признание со стороны коллег (в том числе специалистов по алгебре). Скажем, во втором издании книги Куроша “Теория групп” локальные теоремы доказываются, но доказываются они старыми методами. Я думаю, что впервые в алгебраической литературе в книге Каргаполова и Мерзлякова [17], наконец, был приведен метод доказательства локальных теорем с использованием логики. Но это является нетипичным. Я расскажу другую историю, более современную.

Дальше я буду упоминать о работах Алекса Вилки [18], [19], очень важных работах по экспоненциальным полям. Есть известная книга Аскольда Хованского “Малочлены” [20] (она сначала появилась на английском языке). В приложении он приводит результаты Вилки в изложении Ван ден Дриса и пишет следующее: “К сожалению, доказательство Вилки использует теорию моделей. Теория моделей, как и нестандартный анализ, сложна для восприятия математиков, не склонных к математической логике. Поэтому представляется актуальной следующая задача: найти геометрическое доказательство теоремы Вилки, не использующее теорию моделей”. То есть нельзя сказать, что к настоящему времени теория моделей стала повседневным орудием математики. Однако благодаря тому, что Сибирская школа алгебры и логики была основана Анатолием Ивановичем, все члены этой школы владеют этим методом очень хорошо. И для нас, скажем, использование локальной теоремы часто заключается не в скрупулезной проверке, а в том, чтобы сказать: “Это выполняется по локальной теореме”. И все понимают, если это правильно; а если неправильно, то не понимают. Но тем не менее, о том, что этот замечательный новый мощный метод доказательства теорем из других областей математики с помощью теории моделей уже общепризнан и стал повседневным орудием, говорить не приходится.

Статья Анатолия Ивановича о модельных соответствиях [16] расширяет применения локальной теоремы на языки не только первого порядка. Я думаю, что английский математик Клив – один из немногих математиков, кто написал работу о развитии техники применения локальной теоремы в теории групп (см. [21]). В своих обзорных докладах на четвертом Всесоюзном математическом съезде в Ленинграде [22] и в своем последнем публичном докладе на Международном математическом конгрессе в 1966 г. в Москве [23] Анатолий Иванович систематически делал обзоры применений локальной теоремы.

Должен сказать, что в двух статьях А. И. Мальцева [24] и [25] я некоторые вещи открыл для себя сам, только готовясь к этому докладу. Одна из замечательных теорем, доказанных в статье “Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами” [24] (1940), – это локальная теорема о представимости. Если каждая конечно порожденная подгруппа имеет точное представление степени n над некоторым полем (у разных подгрупп могут быть разные поля), то и сама группа имеет точное n -мерное матричное представление над некоторым полем. Доказательство этой теоремы очень похоже на доказательство локальной теоремы в логике, хотя там есть своя специфика. Но в этой статье Анатолия Ивановича никаких ссылок на локальную теорему из математической логики нет, а доказывается специальная локальная лемма о том, что если некоторая система конечных дизъюнкций алгебраических уравнений локально удовлетворяется, то и вся система удовлетворяется. То есть в 1940 г. Анатолий Иванович и сам не знал (или, по крайней мере, не заметил), что это является прямым следствием его локальной теоремы. Но он ее доказал впрямую и, более того, эта теорема об изоморфном представлении – одна из наиболее цитируемых. (Она не самая цитируемая. Самая цитируемая работа Анатолия

Ивановича – “Об одном классе однородных пространств” [26].) Но здесь сам Анатолий Иванович свою локальную теорему не использует.

Следующая статья “О представлении бесконечных алгебр” [25] (1943). Здесь тоже похожая теорема, но речь идет не о группах, а об алгебрах. Там есть ссылка на упомянутую локальную лемму из работы [24], но нет никаких указаний на саму локальную теорему. Что это показывает? Это показывает, что, на самом деле, этот переход к использованию теории моделей, логики в алгебре являлся психологически сложным даже для самого автора.

Теперь про третью работу “О неразрешимости элементарных теорий некоторых полей” [3]. Эта статья связана с алгоритмическими вопросами. Существует ли алгоритм, который по любому предложению может эффективно отвечать на вопрос, истинно ли это предложение в заданной теории или нет? Вопрос разрешимости элементарных теорий в некотором смысле является традиционным. Тарскому принадлежат классические результаты о разрешимости элементарных теорий поля комплексных чисел, алгебраически замкнутых полей любой фиксированной характеристики и поля вещественных чисел. Доказывались эти результаты методом элиминации кванторов, который сам по себе также имел нетривиальные математические применения. Зайденберг этот результат Тарского переписал без использования логических понятий, и он после этого стал более известен математикам и стал использоваться. В частности, в теории дифференциальных уравнений теорема Тарского–Зайденберга используется.

Далее классические результаты были получены Джулией Робинсон, которая доказала, что поле рациональных чисел, а также любое поле алгебраических чисел имеет неразрешимую элементарную теорию. Дальше была некоторая пауза.

В работе [3] А. И. Мальцев формулирует два вопроса. Первый: не будет ли неразрешимой элементарная теория любого поля рациональных функций? И второй вопрос: не будет ли элементарная теория поля формальных степенных рядов от одной переменной над любым полем неразрешима? Конечно, он уточнил по крайней мере, не будет ли это так в случае, когда исходное поле имеет неразрешимую теорию. Сам Анатолий Иванович доказал, что поле рациональных функций над вещественными числами имеет неразрешимую теорию и что поле формальных степенных рядов над полем с неразрешимой теорией с некоторыми дополнительными алгебраическими условиями тоже имеет неразрешимую теорию. Эта статья имела, на мой взгляд, поразительный эффект. Она выступила катализатором огромной нетривиальной деятельности, которая продолжается и до настоящего времени и которая привела к совершенно нетривиальным приложениям не только к алгебре, но и к теории чисел. В частности, реакция главных действующих лиц на тот момент, Тарского, Джулии Робинсон и Рафаэля Робинсона, была практически немедленной. У Мальцева [3] была доказана неразрешимость элементарной теории поля рациональных функций над любым вещественно замкнутым полем. Тарский заметил, что в доказательстве Мальцева в одном месте неявно использовалась архимедовость поля.

Тарский исправил это в [27] (потом оказалось, что это можно и по-другому было исправить).

На Международном симпозиуме по теории моделей в Беркли в 1963 г. Джулия Робинсон сделала обзор [28] того, что было известно к тому времени об элементарных теориях полей. А Рафаэль Робинсон в 1964 г. [29] доказал, что поле рациональных функций от одной переменной над любым формальным вещественным полем имеет неразрешимую теорию. В 1964 г. были получены следующие результаты, связанные с этими вопросами, которые оказались очень важными. Но опубликованы они были в 1965 г. В моей работе [30] и в работе Акса [31] была доказана гипотеза Мальцева о том, что поле формальных степенных рядов над полем с неразрешимой теорией всегда имеет неразрешимую теорию. В моей работе [30] было доказано больше. Там было доказано, что поле рациональных функций от одной переменной над любым конечным полем характеристики, отличной от 2, имеет неразрешимую теорию.

Тем не менее, я возвращаюсь к 1964 г. Эти результаты мной и Аксом были получены в 1964 г. И после того, как гипотеза Мальцева о степенных рядах была доказана, естественно возник вопрос, что будет, скажем, с полем формальных степенных рядов над полем комплексных чисел. В декабре 1964 г. я доказал, что эта теория разрешима. Думаю, что и Акс это тоже знал. Но эти результаты показали, что пора решать известную проблему Тарского о разрешимости теории поля p -адических чисел. И в 1965 г. это удалось сделать. Независимо Аксом и Коченом [32], [33] и мной [34], [35] было доказано, что поле p -адических чисел для любого p имеет разрешимую теорию. Эти результаты получили большой резонанс. А сама проблематика разрешимости элементарных теорий полей стала привлекать внимание, и там пошел довольно большой прогресс. В частности, мне удалось доказать [36], что сепарабельно замкнутые поля тоже имеют разрешимую теорию. Об этом я рассказывал на Международном конгрессе математиков [37]. Была дана элементарная классификация.

В двух статьях [35] и [38] появилось одно важное понятие, которое потом сыграло большую роль. После того как проблема разрешимости элементарной теории поля p -адических чисел была решена, внимание естественно переключилось на теорию конечных полей. Теория каждого конечного поля, конечно, разрешима. А что будет в целом? Для того чтобы разобраться с этой теорией, нужно было хорошо понимать, как устроены бесконечные поля, которые не отличимы от конечных (т.е. бесконечные модели теории конечных полей), как они выглядят. В 1967 году мной [39] и Аксом [40] было замечено важное свойство этих полей, которое в дальнейшем нашло выражение в названии полей “*pseudo-algebraically closed fields*” или “*регулярно замкнутые поля*”. Это свойство интересно и с чисто алгебраической точки зрения. Это такие поля, над которыми любое алгебраическое многообразие имеет простую рациональную точку. Для алгебраически замкнутых полей это свойство выполняется, но, оказывается, есть и нетривиальные поля с таким свойством. Этот ингредиент плюс еще один, которого я не знал, – это теорема Чеботарёва о плотности –

оказались достаточными для Акса [41], чтобы доказать в 1968 г. разрешимость элементарной теории конечных полей.

Сама разрешимость теории p -адических чисел привлекла внимание очень разных авторов. В частности, Пол Коэн – математик, знаменитый своим решением континуум-гипотезы, – написал работу [42] о разрешимости этой теории с помощью элиминации кванторов. В то же время два ныне известных математика, которые потом стали играть очень важную роль, – Агнус Макинтайр и Мартин Циглер – в своих диссертациях тоже расширяли упомянутые работы, мои и Акса и Кочена, для локальных полей и для конечных расширений полей p -адических чисел, в частности.

Дальше этот интерес расширился на оснащенные поля, т. е. на поля, на которых есть дополнительная структура. Один из вопросов Тарского был о том, не будет ли разрешима теория поля вещественных чисел с порядком и с функцией экспоненты. Можно рассматривать и поля с дифференцированием. Там есть соответствующее понятие дифференциально замкнутых полей. Теоретико-модельное исследование таких полей было проведено Блум [43], и это оказалось полезным. В 1978 г. Ван ден Дрис написал диссертацию [44], где рассматривал поля, наделенные конечным числом линейных порядков. Наконец, в 1980 г. свойство регулярной замкнутости поля привлекло мое внимание [45], а также внимание Черлина, Ван ден Дриса и Макинтайра, которые сделали очень хорошую работу и написали препринт [46], который долгие годы ходил, но так и не был опубликован. Сам этот препринт был очень важен.

Интересно появление еще одного имени, имени Румли. Он написал работу “Неразрешимость и определимость теории глобальных полей” [47]. В этой статье он прямо указывает, что одним из источников его обращения к этим вопросам была моя статья о полях рациональных функций над конечными полями [30]. Почему это важно? Сам Румли потом доказал замечательную теорему, в которой нашел локально-глобальный принцип для кольца всех целых алгебраических чисел (об этом я буду говорить дальше).

В 1981 г. появились статьи, в которых многие вопросы, связанные с разрешимостью элементарной теории регулярно замкнутых полей, были полностью решены. Доказано, что в целом теория неразрешима. Найдены разрешимые классы таких полей. Это было сделано в моих работах [48], [49] и в работе Черлина, Ван ден Дриса и Макинтайра [50]. В тот же год появилась важная работа Престеля [51] о псевдо-вещественно замкнутых полях. Я не буду давать определения, но это некоторый аналог регулярно замкнутых полей, но с условием, связанным с порядками. Дальше в [52], [53] я попробовал сделать то, что сделал Ван ден Дрис для полей с конечным числом порядков, для полей с конечным числом колец нормирования. Затем была моя работа [54], связанная с понятием псевдо-вещественно замкнутого поля.

Наконец, в 1984 г. появилась очень важная для нашей темы работа Денефа “Рациональность рядов Пуанкаре, ассоциированных с p -адическими точками многообразия” [55]. Была гипотеза Шафаревича, опубликованная в его знаменитом учебнике по теории чисел, о том, что ряд Пуанкаре, связанный с числом

решений рациональных точек по модулю p^n , является рациональным. Эта гипотеза была доказана Игусой [56], но Денеф, используя работу Макинтайра [57], где тот описал определимые подмножества множества p -адических чисел, дал очень простое и элегантное доказательство этой гипотезы, т. е. доказал очень нетривиальный теоретико-числовой результат.

В работах Акса и Кочена [32], [33], [58] был получен важный результат о гипотезе Артина о представимости нулей над полями p -адических чисел. Это гипотеза о том, что над такими полями любая форма от n переменных степени больше, чем n^2 , имеет нетривиальное представление нулями. Оказалось, что эта гипотеза имеет условно положительное решение. А именно, для каждого n (за исключением конечного числа простых чисел) это справедливо. А в моей работе [34] было применение к гипотезе Лэнга о представимости нулей в так называемых C_i -полях: если поле является C_i -полем и мы берем поле степенных рядов от одной переменной, то это будет C_{i+1} -поле.

В 1986 г. был получен замечательный результат Румли [59] о локально-глобальном принципе, а в 1988 г. уже Ван ден Дрис [60], используя результат Румли, доказал теорему о разрешимости теории кольца всех алгебраических чисел с помощью элиминации кванторов. В диссертации Камиллы Гроб [61], выполненной в Констанце под руководством Престеля, был введен p -адический аналог псевдо-вещественно замкнутых полей.

Наконец, новый прорыв: в 1996 г. Хрушовский [62] доказал гипотезу Морделла–Лэнга о полях функций. Я не буду говорить, о чем тут идет речь. Важным является то, что впервые был получен совершенно нетривиальный результат, для которого не было и нет до настоящего времени никакого другого доказательства, кроме использования теории моделей. Затем появились замечательные работы Вилки [18], [19], посвященные проблеме Тарского об экспоненциальных полях. (Я уже упоминал об этих результатах, где Хованский призывал найти другое доказательство.) Работа Макинтайра и Вилки [63] замечательна следующим. Сам вопрос Тарского имеет положительное решение, если предположить истинность некоторой известной теоретико-числовой гипотезы. Если эта гипотеза (гипотеза Шануэля) справедлива, то экспоненциальные поля имеют разрешимую теорию.

Я уже говорил ранее о том, как использовались дифференциальные поля Хрушовским. И дальше появились разностные поля, поля с автоморфизмами. Макинтайром [64] (и Хрушовским) были описаны генерические автоморфизмы таких полей. Наконец, в 1998 г. появилось достаточно связанное изложение результата Хрушовского [65], где изложены те необходимые элементы теории моделей, которые нужны для доказательства, а также само доказательство. Теория разностных полей [66] была потом использована Хрушовским [67] для решения гипотезы Манина–Мамфорда.

Дальше деятельность по изучению оснащенных полей – полей, у которых есть много порядков, много колец нормирования, – продолжалась [68], [69]. В моей монографии [70] дано систематическое изложение теории моделей полей с булевыми (почти булевыми) семействами колец нормирования. Некоторый

обзор исследований проблемы разрешимости этих полей дан в [71]. Я привожу некоторый (неполный) список тех понятий, которые возникли в этих исследованиях, но которые, на мой взгляд, являются важными в самой теории чисел и в алгебраической геометрии. Однако само их возникновение связано с исследованием теоретико-модельных свойств.

(1) *Алгебраически полные нормирования.* При исследовании поля p -адических чисел важную роль играла гензелевость. На самом деле более правильным понятием является алгебраическая полнота. Это понятие имеет важные алгебраические применения. В моей статье “О рациональных точках над гензелевыми полями” [72] это понятие демонстрируется. Эта статья, на мой взгляд, очень важная с точки зрения применений, где алгебраическая полнота демонстрирует свою важность в полной мере. Здесь же появляется понятие *обильных*, или *больших*, полей.

(2) *Регулярно замкнутые поля.*

(3) *Обильные, или большие, поля.*

(4) Важными являются понятия *булевых* и *почти булевых семейств нормирований*.

(5) *Генерические автоморфизмы поля.*

(6) *σ -минимальные расширения.*

(7) Для понимания теории моделей полей с многими нормированиями важным является понятие *непрерывности локальных элементарных свойств*.

(8) *Удивительные расширения колец алгебраических чисел.* Я уже говорил, что для нормированных полей понятие гензелевости очень важно. А есть ли для такого классического объекта, как кольцо целых чисел в поле рациональных чисел, аналог понятия гензелизации? Есть ли нечто, что ведет себя так же хорошо, как минимальное расширение, которое является гензелевым? Оказывается, что, по крайней мере для случая полей алгебраических чисел и кольца целых алгебраических чисел, есть такое понятие, которое может заменять гензелевость. Это понятие *удивительного расширения* [73]. У меня нет времени давать определение, но важно следующее. Эти удивительные расширения имеют разрешимую элементарную теорию. Более того, в двух статьях [74], [75] показано, что эти понятия могут использоваться в таких уже сугубо внутренних делах теории чисел, как глобальная теория полей и классов. А где такие расширения есть? Самая последняя статья [75] показывает, что эти удивительные расширения живут не где-то, а в классическом кольце аделей. С помощью теории моделей можно найти эти экзистенциально замкнутые счетные модели в классе подполей кольца аделей.

В заключение стоит отметить две интригующие открытые проблемы из программы статьи А. И. Мальцева [3].

(1) Будет ли неразрешимой элементарная теория поля $\mathbb{C}(x)$ рациональных функций от одной переменной над полем комплексных чисел?

(2) Будет ли разрешимой элементарная теория поля $F\langle\langle t \rangle\rangle$ формальных степенных рядов от одной переменной над любым конечным полем F ?

Список литературы

- [1] A. Malcev, “Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik”, *Матем. сб.*, **1**:3 (1936), 323–335.
- [2] А. И. Мальцев, “Об одном общем методе получения локальных теорем теории групп”, *Ученые записки Ивановского пед. ин-та*, **1**:1 (1941), 3–9.
- [3] А. И. Мальцев, “О неразрешимости элементарных теорий некоторых полей”, *Сиб. матем. журн.*, **1**:1 (1960), 71–77.
- [4] L. Henkin, J. D. Monk, A. Tarski, *Cylindric algebras. Part I. With an introductory chapter: General theory of algebras*, Stud. Logic Found. Math., **64**, North-Holland, Amsterdam–London, 1971, 508 pp.
- [5] А. И. Мальцев, “К истории алгебры в СССР в первые 25 лет”, *Алгебра и логика*, **10**:1 (1971), 103–118; англ. пер.: A. I. Mal'tsev, “On the history of algebra in the USSR during the first 25 years”, *Algebra Logic*, **10** (1971), 68–75.
- [6] A. Robinson, *Introduction to model theory and the metamathematics of algebra*, North Holland, Amsterdam, 1963, 284 pp.
- [7] C. C. Chang, J. Keisler, *Model theory*, Stud. Logic Found. Math., **73**, North-Holland, Amsterdam–London; American Elsevier, New York, 1973, 550 pp.
- [8] W. Hodges, *Model theory*, Encyclopedia Math. Appl., **42**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993, ISBN: 0-521-30442-3, 772 pp.
- [9] S. Shelah, *Classification theory and the number of nonisomorphic models*, Stud. Logic Found. Math., **92**, North-Holland, Amsterdam, 1990, ISBN: 0-444-70260-1, 705 pp.
- [10] B. Poizat, *A course in model theory. An introduction to contemporary mathematical logic*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2000, ISBN: 0-387-98655-3, 443 pp.
- [11] G. E. Sacks, *Saturated model theory*, Mathematics Lecture Note Series, W. A. Benjamin, Reading, MA, 1972, 335 pp.
- [12] E. Hrushovski, B. Zilber, “Zariski geometries”, *J. Amer. Math. Soc.*, **9**:1 (1996), 1–56.
- [13] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **248**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998, ISBN: 0-521-59838-9, 180 pp.
- [14] A. Robinson, “Recent developments in model theory”, *Logic, Methodology and Philosophy of Science* (Proc. 1960 Internat. Congr.), Stanford Univ. Press, Stanford, CA, 1962, 60–79.
- [15] А. И. Мальцев, “О представлении моделей”, *Докл. АН СССР*, **108**:1 (1956), 27–29.
- [16] А. И. Мальцев, “Модельные соответствия”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **23**:3 (1959), 313–336.
- [17] М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, *Основы теории групп*, Наука, М., 1972, 240 с.
- [18] A. J. Wilkie, “Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted Pfaffian functions and the exponential function”, *J. Amer. Math. Soc.*, **9**:4 (1996), 1051–1094.
- [19] A. J. Wilkie, “A theorem on the complement and some new o-minimal structures”, *Selecta Math. (N. S.)*, **5**:4 (1999), 397–421.
- [20] А. Г. Хованский, *Малочлены*, Библиотека математика, **2**, ФАЗИС, М., 1997, ISBN: 5-7036-0023-5, 217 с.
- [21] J. P. Cleave, “Local properties of systems”, *J. London Math. Soc.*, **44**:1 (1969), 121–130.
- [22] А. И. Мальцев, “Некоторые вопросы теории моделей”, *Труды IV Всесоюзного математического съезда* (Ленинград, 1961), т. 1, Изд-во АН СССР, Л., 1963, 169–198.

- [23] А. И. Мальцев, “О некоторых пограничных вопросах алгебры и математической логики”, *Труды Международного конгресса математиков* (Москва, 1966), Мир, М., 1968, 217–231.
- [24] А. И. Мальцев, “Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами”, *Матем. сб.*, **8**:3 (1940), 405–422; англ. пер.: A. I. Mal'tsev, “On the faithful representation of infinite groups by matrices”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **45** (1965), 1–18.
- [25] А. И. Мальцев, “О представлении бесконечных алгебр”, *Матем. сб.*, **13**:2–3 (1943), 263–285.
- [26] А. И. Мальцев, “Об одном классе однородных пространств”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **13**:1 (1949), 9–32; англ. пер.: A. I. Mal'tsev, “On a class of homogeneous spaces”, *Amer. Math. Soc. Transl.*, **39** (1951), 33 pp.
- [27] A. Tarski, “The elementary undecidability of pure transcendental extensions of real closed fields”, *Notices Amer. Math. Soc.*, **10** (1963), 355.
- [28] J. Robinson, “The decision problem for fields”, *Theory of Models* (Proc. 1963 Internat. Sympos. Berkeley), North-Holland, Amsterdam, 1965, 299–311.
- [29] R. M. Robinson, “The undecidability of pure transcendental extensions of real fields”, *Z. Math. Logik Grundlagen Math.*, **10**:18 (1964), 275–282.
- [30] Ю. Л. Ершов, “Неразрешимость некоторых полей”, *Докл. АН СССР*, **161**:1 (1965), 27–29; англ. пер.: Yu. L. Ershov, “The undecidability of certain fields”, *Soviet Math. Dokl.*, **6** (1965), 349–352.
- [31] J. Ax, “The undecidability of power series”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16**:4 (1965), 846.
- [32] J. Ax, S. Kochen, “Diophantine problems over local fields. I”, *Amer. J. Math.*, **87**:3 (1965), 605–630.
- [33] J. Ax, S. Kochen, “Diophantine problems over local fields. II. A complete set of axioms for p -adic number theory”, *Amer. J. Math.*, **87**:3 (1965), 631–648.
- [34] Ю. Л. Ершов, “Об элементарной теории максимальных нормированных полей”, *Докл. АН СССР*, **165**:1 (1965), 21–23; англ. пер.: Yu. L. Ershov, “On the elementary theory of maximal normed fields”, *Soviet Math. Dokl.*, **6** (1965), 1390–1393.
- [35] Ю. Л. Ершов, “Об элементарной теории максимальных нормированных полей”, *Алгебра и логика*, **4**:3 (1965), 31–70.
- [36] Ю. Л. Ершов, “Об элементарных теориях локальных полей”, *Алгебра и логика*, **4**:2 (1965), 5–30.
- [37] Ю. Л. Ершов, “Элементарные теории полей”, *Международный конгресс математиков. Тезисы докладов по приглашению* (Москва, 1966), 143–145.
- [38] Ю. Л. Ершов, “Об элементарной теории максимальных нормированных полей. II”, *Алгебра и логика*, **5**:1 (1966), 5–40.
- [39] Ю. Л. Ершов, “О полях с разрешимой теорией”, *Докл. АН СССР*, **174**:1 (1967), 19–20; англ. пер.: Yu. L. Ershov, “Fields with a solvable theory”, *Soviet Math. Dokl.*, **8** (1967), 575–576.
- [40] J. Ax, “Solving Diophantine problems modulo every prime”, *Ann. of Math. (2)*, **85**:2 (1967), 161–183.
- [41] J. Ax, “The elementary theory of finite fields”, *Ann. of Math. (2)*, **88**:2 (1968), 239–271.
- [42] P. J. Cohen, “Decision procedures for real and p -adic fields”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **22** (1969), 131–151.
- [43] L. Blum, “Differentially closed fields: a model-theoretic tour”, *Contributions to algebra* (collection of papers dedicated to Ellis Kolchin), Academic Press, New York, 1977, 37–61.
- [44] L. van den Dries, *Model theory of fields*, PhD Thesis, Utrecht, 1978.

- [45] Ю.Л. Ершов, “Регулярно замкнутые поля”, *Докл. АН СССР*, **251**:4 (1980), 783–785; англ. пер.: Yu. L. Ershov, “Regularly closed fields”, *Soviet Math. Dokl.*, **21**:2 (1980), 510–512.
- [46] G. Cherlin, L. van den Dries, A. Macintyre, *The elementary theory of regularly closed fields*, Preprint, 1980.
- [47] R. S. Rumely, “Undecidability and definability for the theory of global fields”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **262**:1 (1980), 195–217.
- [48] Ю.Л. Ершов, “Неразрешимость регулярно замкнутых полей”, *Алгебра и логика*, **20**:1 (1981), 389–394; англ. пер.: Yu. L. Ershov, “Undecidability of regularly closed fields”, *Algebra Logic*, **20**:4 (1981), 257–260.
- [49] Ю.Л. Ершов, “Об элементарной теории регулярно замкнутых полей”, *Докл. АН СССР*, **257**:2 (1981), 271–274; англ. пер.: Yu. L. Ershov, “On the elementary theories of regularly closed fields”, *Soviet. Math. Dokl.*, **23**:2 (1981), 259–262.
- [50] G. Cherlin, L. van den Dries, A. Macintyre, “Decidability and undecidability theorems for PAC-fields”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)*, **4**:1 (1981), 101–104.
- [51] A. Prestel, “Pseudo real closed fields”, *Set theory and model theory* (Bonn, 1979), Lecture Notes in Math., **872**, Springer, Berlin–New York, 1981, 127–156.
- [52] Ю.Л. Ершов, “Кратно нормированные поля”, *УМН*, **37**:3 (1982), 55–93; англ. пер.: Yu. L. Ershov, “Multiply valued fields”, *Russian Math. Surveys*, **37**:3 (1982), 63–107.
- [53] Ю.Л. Ершов, “Регулярно r -замкнутые поля”, *Докл. АН СССР*, **266**:3 (1982), 538–540; англ. пер.: Yu. L. Ershov, “Regularly r -closed fields”, *Soviet Math. Dokl.*, **26**:2 (1982), 363–366.
- [54] Yu. L. Ershov, “Two theorems on regularly r -closed fields”, *J. Reine Angew. Math.*, **347** (1984), 154–167.
- [55] J. Denef, “The rationality of the Poincaré series associated to the p -adic points on a variety”, *Invent. Math.*, **71**:1 (1984), 1–23.
- [56] J.-I. Igusa, “Some observations on higher degree characters”, *Amer. J. Math.*, **99**:2 (1977), 393–417.
- [57] A. Macintyre, “On definable subsets of p -adic fields”, *J. Symbolic Logic*, **41**:3 (1976), 605–610.
- [58] J. Ax, S. Kochen, “Diophantine problems over local fields. III. Decidable fields”, *Ann. of Math. (2)*, **83**:3 (1966), 437–456.
- [59] R. S. Rumely, “Arithmetic over the ring of all algebraic integers”, *J. Reine Angew. Math.*, **368** (1986), 127–133.
- [60] L. van den Dries, “Elimination theory for the ring of algebraic integers”, *J. Reine Angew. Math.*, **388** (1988), 189–205.
- [61] C. Grob, *Die Entscheidbarkeit der Theorie der maximalen pseudo- p -adisch abgeschlossenen Körper*, PhD Thesis, Konstanz, 1988.
- [62] E. Hrushovski, “The Mordell–Lang conjecture for function fields”, *J. Amer. Math. Soc.*, **9**:3 (1996), 667–690.
- [63] A. Macintyre, A. J. Wilkie, “On the decidability of the real exponential field”, *Kreisliana*, AK Peters, Wellesley, MA, 1996, 441–467.
- [64] A. Macintyre, “Generic automorphisms of fields”, *Joint AILA-KGS Model Theory Meeting* (Florence, 1995), *Ann. Pure Appl. Logic*, **88**, 1997, 165–180.
- [65] E. Bouscaren (ed.), *Model theory and algebraic geometry. An introduction to E. Hrushovski’s proof of geometric Mordell–Lang conjecture*, Lecture Notes in Math., **1696**, Springer-Verlag, Berlin, 1998, ISBN: 3-540-64863-1, 211 pp.
- [66] Z. Chatzidakis, E. Hrushovski, “Model theory for difference fields”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **351**:8 (1999), 2997–3071.

- [67] E. Hrushovski, “Manin–Mumford conjecture and the model theory of difference fields”, *Ann. Pure Appl. Logic*, **112**:1 (2001), 43–115.
- [68] L. van den Dries, A. Macintyre, “The logic of Rumely’s local-global principle”, *J. Reine Angew. Math.*, **407** (1990), 33–56.
- [69] B. Green, F. Pop, P. Roguette, “On Rumely’s local-global principle”, *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.*, **97**:2 (1995), 43–74.
- [70] Ю. Л. Ершов, *Кратно нормированные поля*, Научная книга, Новосибирск, 2000, ISBN: 5-88119-028-9, 330 с.; англ. пер.: Yu. L. Ershov, *Multivalued fields*, Siberian School of Algebra and Logic, Kluwer, New York, NY, 2001, ISBN: 0-306-11068-7/hbk, 270 pp.
- [71] L. Darnière, “Decidability and local-global principles”, *Hilbert’s tenth problem: relations with arithmetic and algebraic geometry* (Ghent, 1999), Contemp. Math., **270**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, 139–167.
- [72] Ю. Л. Ершов, “О рациональных точках над гензелевыми полями”, *Алгебра и логика*, **6**:3 (1967), 39–49.
- [73] Ю. Л. Ершов, “Об удивительных расширениях поля рациональных чисел”, *Докл. РАН*, **373**:1 (2000), 15–16; англ. пер.: Yu. L. Ershov, “On amazing extensions of the field of rational numbers”, *Dokl. Math.*, **62**:1 (2000), 8–9.
- [74] Ю. Л. Ершов, “Хорошие расширения и глобальная теория полей классов”, *Докл. РАН*, **388**:2 (2003), 155–158; англ. пер.: Yu. L. Ershov, “Good extensions and global class field theory”, *Dokl. Math.*, **67**:1 (2003), 21–23.
- [75] Ю. Л. Ершов, “Подполя кольца аделей”, *Алгебра и логика*, **48**:6 (2009), 741–753; англ. пер.: Yu. L. Ershov, “Subfields of the adèle ring”, *Algebra Logic*, **48**:6 (2009), 418–425.

Ю. Л. Ершов (Yu. L. Ershov)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

E-mail: ershov@math.nsc.ru

Поступила в редакцию

24.09.2009