Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Смирнов, Описание стабильных гомотопических групп сфер на языке A_∞ -алгебр, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 1, 171–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm938>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 18:27:51

ОПИСАНИЕ СТАБИЛЬНЫХ ГОМОТОПИЧЕСКИХ ГРУПП СФЕР НА ЯЗЫКЕ A_∞ -АЛГЕБР

В. А. Смирнов

Мы будем рассматривать не сами стабильные гомотопические группы сфер, а $\mathbb{Z}/2$ -присоединенный модуль σ_* к этим группам, т.е. член E^∞ спектральной последовательности Адамса [1].

В работе [2] было показано, что на коалгебре Милнора (двойственной алгебре Стиррода) можно задать структуру A_∞ -алгебры (в смысле Стасеффа [3]) таким образом, что для соответствующей ко- B -конструкции FK будет иметь место изоморфизм $\sigma_* \cong H_*(FK)$. Из этого, в частности, следует, что на σ_* имеется структура A_∞ -алгебры. Эту структуру мы и будем использовать для описания A_∞ -алгебры σ_* .

Пусть A — градуированная A_∞ -алгебра. Это означает, что заданы операции $\pi_{n-2}: A^{\otimes n} \rightarrow A$ размерности $n-2$, удовлетворяющие соотношениям

$$\sum \pi_i(1 \otimes \cdots \otimes \pi_{n-i} \otimes \cdots \otimes 1) = 0, \quad n \geq 0,$$

где сумма берется по всем i от 1 до n и по всем местам, на которых может стоять π_{n-i} [3].

Последовательность $(x^2, \dots, x^n)$ элементов $x^i \in A^{\otimes i}$ будем называть последовательностью Масси [4], если выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} (\pi_0 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 + \cdots + 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \pi_0)(x^n) &= 0, \\ (\pi_1 \otimes \cdots \otimes 1 + \cdots + 1 \otimes \cdots \otimes \pi_1)(x^n) &= (\pi_0 \otimes \cdots \otimes 1 + \cdots + 1 \otimes \cdots \otimes \pi_0)(x^{n-1}), \\ (\pi_{n-3} \otimes 1 + 1 \otimes \pi_{n-3})(x^n) &= (\pi_{n-4} \otimes 1 + 1 \otimes \pi_{n-4})(x^{n-1}) + \cdots + (\pi_0 \otimes 1 + 1 \otimes \pi_0)(x^3). \end{aligned}$$

Для последовательности Масси $(x^2, \dots, x^n)$ определим произведение Масси $\mu(x^2, \dots, x^n)$, положив

$$\mu(x^2, \dots, x^n) = \pi_0(x^2) + \cdots + \pi_{n-2}(x^n).$$

Элемент $x \in A$ будем называть разложимым, если он является образом произведения Масси, т.е. существует последовательность Масси $(x^2, \dots, x^n)$, для которой выполняется равенство $\mu(x^2, \dots, x^n) = x$. Фактормодуль A_∞ -алгебры A по разложимым элементам будем называть модулем неразложимых элементов.

Двойственным образом, для A_∞ -коалгебры K определяется понятие примитивных элементов.

Известно [5], что неразложимыми элементами в стабильных гомотопических группах сфер являются элементы Хопфа h_0, h_1, h_2, h_3 , и все остальные элементы разложимы, т.е. являются образами итерированных произведений Масси от этих элементов. Поэтому для описания σ_* требуется найти соотношения между произведениями Масси от элементов $h_i, 0 \leq i \leq 3$.

Пусть K — A_∞ -коалгебра, X — градуированный модуль, $\varphi: K \rightarrow X$ — гомоморфизм, понижающий размерность на единицу. Рассмотрим свободную градуированную A_∞ -алгебру $A_\infty X$, порожденную X . Имеет место вложение $X \subset A_\infty X$. Композицию φ с этим вложением также обозначим через $\varphi: K \rightarrow A_\infty X$. Определим в $A_\infty X$ соотношения так, чтобы для фактор A_∞ -алгебры $\tilde{A}_\infty X$ по этим соотношениям гомоморфизм φ индуцировал скрещивающую коцепь $\varphi: K \rightarrow \tilde{A}_\infty X$. Требуемые соотношения вытекают из условия скрещивающей коцепи и имеют вид

$$(*) \quad \sum \pi'_n(\varphi \otimes \cdots \otimes \varphi) \tau''_n(x) = 0, \quad x \in K,$$

где $\nabla: A_\infty \rightarrow A_\infty \otimes A_\infty$ — коумножение в операнде A_∞ , $\nabla(\pi_n) = \sum \pi'_n \otimes \tau''_n$.

Скрещивающая коцепь φ индуцирует цепное отображение $F(\varphi): FK \rightarrow \tilde{A}_\infty X$ и отображение гомологий $F(\varphi)_*: H_*(FK) \rightarrow \tilde{A}_\infty X$.

ТЕОРЕМА 1. Если отображение $\varphi: K \rightarrow X$ инъективно на примитивных элементах A_∞ -коалгебры K , то отображение $F(\varphi)_*: H_*(FK) \rightarrow \tilde{A}_\infty X$ является вложением.

Пусть теперь K — A_∞ -коалгебра Милнора, X — модуль, порожденный элементами h_i , $i \geq 0$, размерности $2^i - 1$, и $\varphi: K \rightarrow X$ — гомоморфизм, заданный формулами: $\varphi(\xi_1^{2'}) = h_i$ и $\varphi(x) = 0$ в остальных случаях. Примитивными элементами в K являются элементы ξ_1 , ξ_1^2 , ξ_1^4 , ξ_1^8 . Ясно, что φ инъективно на примитивных элементах и, следовательно, имеет место вложение $\sigma_* = H_*(FK) \subset \tilde{A}_\infty \{h_i\}$. Таким образом, для нахождения соотношений в σ_* нужно найти соотношения в $A_\infty \{h_i\}$, которые вытекают из условия скрещивающей коцепи.

Возьмем в качестве элементов x элементы $\xi_i \in K$, когда из соотношений $(*)$, примененных к этим элементам, получаем соотношения

$$\pi_{i-2}(h_{i-1} \otimes \cdots \otimes h_0) = 0.$$

Будем называть эти соотношения базисными.

Для нахождения других соотношений определим произведения $\cup_1$, положив $h_i \cup_1 h_i = h_{i+1}$ и $h_i \cup_1 h_j = 0$ в остальных случаях. Аналогично, положим

$$h_i \cup_1 h_i \cup_1 h_{i+1} = h_i \cup_1 h_{i+1} \cup_1 h_i = h_{i+1} \cup_1 h_i \cup_1 h_i = h_{i+2}$$

и $h_i \cup_1 h_j \cup_1 h_k = 0$ в остальных случаях. И так далее.

Используя эти произведения, определим произведения элементов вида

$$\pi_{n-2}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n),$$

положив

$$\begin{aligned} & \pi_{n-2}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \cup_1 \pi_{m-2}(x_{n+1} \otimes \cdots \otimes x_{n+m}) \\ &= \sum \pi_{n+m-2}(x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_{n+m}}) \\ &+ \sum \pi_{n+m-3}(x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_k} \cup_1 x_{j_l} \otimes \cdots \otimes x_{i_{n+m}}) + \cdots, \end{aligned}$$

где суммы берутся по всем (n, m) перетасовкам набора $(1, \dots, n+m)$ и $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots \leq n$, $n+1 \leq j_1 < j_2 < \cdots \leq n+m$.

Аналогично определяются произведения

$$\pi_{n-2}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \cup_1 \pi_{m-2}(x_{n+1} \otimes \cdots \otimes x_{n+m}) \cup_1 \pi_{k-2}(x_{n+m+1} \otimes \cdots \otimes x_{n+m+k})$$

и так далее.

Перемножая базисные соотношения, можно получать новые соотношения в $A_\infty \{h_i\}$. Кроме всех таких соотношений имеются еще только соотношения вида $h_0 h_{i-1}^2 = 0$, появляющиеся применением формулы $(*)$ к элементам $\xi_1^{2'} \in K$.

ТЕОРЕМА 2. Базисные соотношения, их произведения, а также соотношения вида $h_0 h_{i-1}^2 = 0$ представляют собой все соотношения в A_∞ -алгебре $\tilde{A}_\infty \{h_i\}$. Образом вложения $\sigma_* \subset \tilde{A}_\infty \{h_i\}$ являются утерированные произведения Масси элементов h_i , $0 \leq i \leq 3$.

Эта теорема дает искомое описание σ_* как A_∞ -алгебры через образующие и соотношения.

Отметим, что аналогичным образом получается описание $\mathbb{Z}/p$ -присоединенного модуля к стабильным гомотопическим группам сфер.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Adams J. F. // Comm. Math. Helv. 1958. V. 32. P. 180–214. [2] Смирнов В. А. // ДАН РФ. 1993. Т. 330. № 4. С. 441–443. [3] Stasheff J. D. // Trans. A. M. S. 1963. V. 108. P. 275–312. [4] Massey W. S. // Ann. Math. 1954. V. 59. P. 558–569. [5] Cohen J. // Ann. Math. 1968. V. 87. P. 305–320.