Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, Общий род Кричевера, *УМН*, 2010, том 65, выпуск 5, 187–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9380>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 11:43:43

Общий род Кричевера

В. М. Бухштабер

В работе на основе общей модели Вейерштрасса эллиптической кривой

$$V = \{(x : y : z) \in \mathbb{C}P^2 : y^2 z + \mu_1 x y z + \mu_3 y z^2 = x^3 + \mu_2 x^2 z + \mu_4 x z^2 + \mu_6 z^3\} \quad (1)$$

вводится *общий эллиптический род Хирцебруха* и *общий род Кричевера*.

Рассмотрим функцию

$$\xi(u) = \xi(u; v, w) = -\frac{1}{2} \frac{\wp'(u) + \wp'(w)}{\wp(u) - \wp(v)}, \quad (2)$$

где $\wp(u) = \wp(u; g_2, g_3)$ – стандартная $\wp$ -функция Вейерштрасса. Функция $(\xi(u) - 1/u)$ является регулярной в окрестности $u = 0$. Введем функцию $\Phi(u) = \Phi(u; v, w) = 1/u + (\text{регулярная функция})$ как решение уравнения $\Phi'(u) + \xi(u) \Phi(u) = 0$.

ЛЕММА 1. Функция $\Phi(u)$ удовлетворяет уравнению

$$\Phi''(u) - (2\wp(u) - U(u))\Phi(u) = \wp(v)\Phi(u), \quad (3)$$

где $U(u) = U(u; v, w) = \xi(v; u, w)\xi(v; u, -w)$.

При $v = w$ уравнение (3) переходит в классическое уравнение Ламе и его решением является функция Бейкера–Ахиезера

$$\Phi(u; v, v) = \frac{\sigma(v - u)}{\sigma(v)\sigma(u)} \exp(\zeta(v)u). \quad (4)$$

Пусть $A = \sum A_{-2k}$ – градуированное коммутативное ассоциативное кольцо без кручения и $f(u) = u + \sum_{k \geq 1} f_k u^{k+1}$, где $f_k \in A_{-2k} \otimes \mathbb{Q}$. Ряд $\prod_{i=1}^N \frac{u_i}{f(u_i)}$ можно переписать в виде $L_f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, \dots)$, где σ_k – k -я элементарная симметрическая функция от $u_1, \dots, u_N$. Род Хирцебруха L_f стабильно комплексного многообразия M^{2n} с касательными классами Чженя $c_i = c_i(\tau(M^{2n}))$ и фундаментальным циклом $\langle M^{2n} \rangle$ задается формулой

$$L_f(M^{2n}) = (L_f(c_1, \dots, c_n), \langle M^{2n} \rangle) \in A_{-2n} \otimes \mathbb{Q}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Род L_f называется *A-целочисленным*, если $L_f(M^{2n}) \in A$ для любого стабильно комплексного многообразия M^{2n} .

Пусть $F(t_1, t_2)$ – некоторая формальная группа над A . Тогда однозначно определен ряд $f(u) \in A \otimes \mathbb{Q}[[u]]$ такой, что $F(t_1, t_2) = f(g(t_1) + g(t_2))$, где $f(g(t)) = t$. Ряд $f(u)$ называется *экспонентой* группы $F(t_1, t_2)$, а ряд $g(t)$ – ее *логарифмом*.

Над кольцом кобордизмов $\Omega_U = \mathbb{Z}[a_1, \dots, a_n, \dots]$, $\deg a_n = -2n$, определена *формальная группа* $\mathcal{F}(t_1, t_2) = t_1 + t_2 + \sum a_{ij} t_1^i t_2^j$, $\deg a_{ij} = -2(i+j-1)$, *геометрических кобордизмов* [1], которая является *универсальной формальной группой* [2].

Каждый род Хирцебруха L_f задает кольцевой гомоморфизм $L_f: \Omega_U \rightarrow A \otimes \mathbb{Q}$. Отображение, сопоставляющее формальной группе $F(t_1, t_2) = t_1 + t_2 + \sum \alpha_{ij} t_1^i t_2^j$, $\deg \alpha_{ij} = -2(i+j-1)$, над A род Хирцебруха L_f , где $f(u)$ – экспонента этой группы, устанавливает взаимно однозначное соответствие между A -целочисленными родами и формальными группами $F(t_1, t_2)$ над A такое, что $F(t_1, t_2) = t_1 + t_2 + \sum L_f(a_{ij}) t_1^i t_2^j$ (см. [3]–[5]).

Для кривой (1) положим $\deg x = -4$, $\deg y = -6$, $\deg z = 0$. Тогда условие однородности дает $\deg \mu_k = -2k$, $k = 1, 2, 3, 4, 6$.

Пусть $U_y = \{(x : y : z) \in \mathbb{CP}^2, y \neq 0\}$. Образом кривой (1) при координатном отображении $U_y \rightarrow \mathbb{C}^2: (x : y : z) \rightarrow (t = -x/y, s = -z/y)$, является плоская кривая

$$V = \{(t, s) \in \mathbb{C}^2: s = t^3 + \mu_1 ts + \mu_2 t^2 s + \mu_3 s^2 + \mu_4 ts^2 + \mu_6 s^3\}. \quad (5)$$

Из уравнения (5) следует, что $s = s(t) \in A[[t]]$. Здесь и далее $A = \mathbb{Z}[\mu_1, \dots, \mu_6]$. В координатах $(t, s(t))$ групповая структура на эллиптической кривой (5) задает (см. [6]) формальную группу $F(t_1, t_2) \in A[[t_1, t_2]]$, которую мы будем называть *общей эллиптической формальной группой* $F_{\text{El}}(t_1, t_2)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Род Хирцебруха L_{El} , задаваемый экспонентой $f_{\text{El}}(u)$ формальной группы $F_{\text{El}}(t_1, t_2)$, будем называть *общим эллиптическим родом Хирцебруха*.

И. М. Кричевер [7] ввел род Хирцебруха, обладающий фундаментальным свойством жесткости на унитарных SU -многообразиях. В доказательстве результатов работы [7] важную роль играют методы теории абелевых функций и идеи теории интегрируемых систем. Свойства формальной группы, соответствующей роду Кричевера, описаны в [8].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Общим родом Кричевера* L_{Kr} будем называть род Хирцебруха $L_{f_{\text{Kr}}}$, где $f_{\text{Kr}}(u) \cdot \Phi(u; v, w) = \exp(\mu_1 u/2)$.

Из формулы (3) следует, что род, введенный в [7], отвечает случаю $v = w$.

Группа $F_{\text{El}}(t_1, t_2)$ и соответствующий ей род Хирцебруха детально изучены в [9]. Следующий результат получен совместно с Е. Ю. Буньковой.

Положим $b_2 = \mu_1^2 + 4\mu_2$, $b_4 = \mu_1\mu_3 + 2\mu_4$, $b_6 = \mu_3^2 + 4\mu_6$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\xi(u)$ — функция вида (2) при $g_2 = b_2^2/12 - 2b_4$, $g_3 = b_2b_4/6 - b_2^3/(18 \cdot 12) - b_6$, $\wp(v) = b_2/12$, $\wp'(w) = -\mu_3$. Тогда:

- 1) $f_{\text{El}}(u)(\mu_1/2 + \xi(u)) = 1$, т. е. $(\ln f_{\text{Kr}}(u))' = 1/f_{\text{El}}(u)$;
- 2) для $\alpha = \wp'(w)/\wp'(v) = -\mu_3/\sqrt{\mu_3^2 + 4\mu_6}$ имеет место формула

$$f_{\text{Kr}}(u) = \frac{\sigma(u)\sigma(v)}{\sigma(v+u)^{(1-\alpha)/2}\sigma(v-u)^{(1+\alpha)/2}} \exp\left(\frac{\mu_1}{2} - \alpha\zeta(v)\right)u; \quad (6)$$

- 3) $f_{\text{Kr}}(u) \in A \otimes \mathbb{Q}[[u]]$.

Отметим, что общий род Кричевера не является A -целочисленным.

ПРИМЕР 6. В случае $\mu_1 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_6 = 0$ род $L_{\text{El}}(M^{2n})$ равен сигнатуре многообразия. Ему соответствует формальная группа $F_{\text{El}}(t_1, t_2) = (t_1 + t_2)/(1 + \mu_2 t_1 t_2)$ с экспонентой $f_{\text{El}}(u) = \mu_2^{-1/2} \tanh \sqrt{\mu_2} u$, и род L_{Kr} задается рядом $\mu_2^{-1/2} \sinh \sqrt{\mu_2} u$, который является экспонентой группы $F(t_1, t_2) = t_1 \sqrt{1 + \mu_2 t_2^2} + t_2 \sqrt{1 + \mu_2 t_1^2}$.

Список литературы

- [1] С. П. Новиков, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **31**:4 (1967), 855–951. [2] D. Quillen, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **75** (1969), 1293–1298. [3] С. П. Новиков, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **32**:6 (1968), 1245–1263. [4] В. М. Бухштабер, *Матем. сб.*, **83**:4 (1970), 575–595. [5] В. М. Бухштабер, С. П. Новиков, *Матем. сб.*, **84**:1 (1971), 81–118. [6] J. T. Tate, *Invent. Math.*, **23** (1974), 179–206. [7] И. М. Кричевер, *Матем. заметки*, **47**:2 (1990), 34–45. [8] В. М. Бухштабер, *УМН*, **45**:3 (1990), 185–186. [9] V. M. Buchstaber, E. Yu. Bunkova, *Elliptic formal group laws, integral Hirzebruch genera and Krichever genera*, arXiv: 1010.0944.