Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Асташкин, Ф. А. Сукочев, Независимые функции и геометрия банаховых пространств, *УМН*, 2010, том 65, выпуск 6, 3–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9382>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 17:29:32

УДК 517.5+517.982

Независимые функции и геометрия банаховых пространств

С. В. Асташкин, Ф. А. Сукочев

Основная цель этого обзора – дать представление о современном состоянии тех разделов теории независимых функций, которые связаны с вопросами геометрии функциональных пространств. “Величина” суммы независимых функций оценивается как в терминах классических моментов, так и в терминах норм симметричных пространств. Наибольшее внимание уделяется неравенству Розенталя и различным его обобщениям, границам их распространения на симметричные пространства. Центральная роль при этом принадлежит конструкции оператора Круглова, развитой в последние годы. В обзоре приведен также ряд приложений к геометрии банаховых пространств. В частности, рассматриваются варианты классических неравенств Морэ–Хинчина, изоморфизмы симметричных пространств на отрезке и полуоси, а также описание класса симметричных пространств, в которых любая последовательность симметрично и одинаково распределенных независимых случайных величин порождает гильбертово подпространство.

Библиография: 87 названий.

Ключевые слова: независимые функции, неравенства Хинчина, неравенства Розенталя, свойство Круглова, оператор Круглова, симметричное пространство, пространство Орлича, пространство Марцинкевича, пространство Лоренца, индексы Бойда, К-функционал, вещественный метод интерполяции, интегрально-равномерная норма.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	4
2. Определения, обозначения, предварительные сведения.....	7
3. Оценки L_p -норм сумм независимых функций.....	14
3.1. Неравенства Розенталя.....	15
3.2. Неравенства Хитченко.....	18
3.3. Теорема Латалы.....	23

Первый автор поддержан Австралийским исследовательским советом и РФФИ (грант № 10-01-00077); второй автор поддержан Австралийским исследовательским советом.

4. Оператор Круглова в симметричных пространствах	26
4.1. Неравенства Розенталя и дизъюнктные суммы	26
4.2. Свойство и оператор Круглова: первоначальные сведения	27
4.3. Ограниченность оператора Круглова в симметричных пространствах	31
5. Сравнение сумм независимых и дизъюнктных функций в симметричных пространствах	42
6. Неравенства типа Розенталя для симметричных (квази)норм на последовательностях независимых функций	50
6.1. Нижние оценки	50
6.2. Верхние оценки в симметричных пространствах со свойством Круглова	54
7. Неравенство Хинчина и его обобщения	63
8. Оценки норм полиномов по системам независимых функций в пространствах, “близких” к L_∞	68
9. Изоморфизмы между симметричными пространствами на $[0, 1]$ и $[0, \infty)$	72
10. Гильбертовы подпространства симметричных пространств, порожденные независимыми функциями	77
Список литературы	81

1. Введение

Последовательности независимых функций являются предметом изучения как теории вероятностей, так и теории функций и функционального анализа. Основная цель этого обзора – дать представление о современном состоянии тех разделов их теории, которые связаны с вопросами геометрии функциональных (прежде всего, симметричных) пространств. В центре нашего внимания будут неравенства, так или иначе связанные с описанием подпространств, порожденных последовательностями независимых функций в пространствах измеримых функций. Пионерской в этом отношении явилась работа Х. П. Розенталя [1], где были доказаны замечательные неравенства, позволившие описать изоморфные типы таких подпространств в L_p -пространствах. Хотелось бы также упомянуть две следующие тематически близкие обзорные статьи, опубликованные ранее в “Успехах математических наук”. В первой из них [2], написанной В. Ф. Гапошкиным в 1966 г., в центре внимания находятся теоретико-функциональные свойства последовательностей как независимых, так и слабо зависимых (лакунарных) систем функций (сходимость и абсолютная сходимость, интегрируемость, предельные теоремы, закон повторного логарифма и т. д.). Второй обзор [3], авторы которого – Г. Пешкир и А. Н. Ширяев, написан гораздо позднее и посвящен изучению важнейшей и в то же время наиболее простой из систем независимых функций – системы Радемахера, возможности переноса ее свойств на общие мартингаловые последовательности. Отметим, что изучению этой же системы, но только с точки зрения ее поведения в симметричных функциональных пространствах, посвящена также недавно опубликованная книга [4].

Речь в обзоре будет идти, в основном, о следующей задаче: предположим, что $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ – последовательность независимых случайных величин (с. в.) на некотором вероятностном пространстве. Требуется каким-то образом оценить “величину” сумм $S_n = \sum_{k=1}^n f_k$ ($n = 1, 2, \dots$). В случае, когда последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ состоит из одинаково распределенных с. в. с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией $\sigma^2 > 0$, эта проблема, разумеется, восходит к основаниям теории вероятностей. Давно известно, что при этих условиях пределом вероятностей $P\{S_n/(\sigma\sqrt{n}) > \tau\}$ при $n \rightarrow \infty$ будет стандартное гауссовское распределение. Обобщениям и уточнениям этого фундаментального факта посвящено необозримое количество статей и монографий (см. любой достаточно развернутый курс теории вероятностей). Наш подход иной: нас будут интересовать не асимптотические, а приближенные решения этой задачи. При этом в качестве “меры” $|S_n|$ будет рассматриваться не “хвост” распределения суммы, т. е. величина $P\{|S_n| > \tau\}$ (его оценкам также посвящено большое количество исследований), а норма $\|S_n\|_X$ в том или ином функциональном пространстве X . Прежде всего, конечно, с этой точки зрения важна информация о классических моментах сумм $\|S_n\|_p = (E|S_n|^p)^{1/p}$ ($p > 0$). В этой связи возникает задача найти величину A_n (как можно более простую) такую, что для некоторой константы $C > 0$ выполнено:

$$C^{-1}A_n \leq \|S_n\|_p \leq CA_n \quad (p > 0).$$

Этот вопрос будет в центре нашего внимания в первой части обзора (раздел 3).

Хорошо известно, насколько отличается поведение сумм независимых функций в пространствах L_p при конечных p и в пространстве L_∞ . При этом происходящим явлениям, как правило, нельзя дать объяснение, находясь “внутри” L_p -шкалы. В то же время это можно сделать, выйдя за ее пределы и рассматривая общие симметричные пространства функций. Об этом пойдет речь во второй, главной части обзора (разделы 4–6). Нас, в основном, будут интересовать обобщения неравенства Розенталя (см. п. 3.1), границы его распространения на симметричные пространства. Как мы увидим в дальнейшем, последнее напрямую связано с возможностью сравнения сумм независимых и дизъюнктивных функций. Центральное место занимает здесь конструкция так называемого оператора Круглова, которая была введена авторами обзора и имеет своим истоком одноименное свойство симметричного пространства, принадлежащее М. Ш. Браверману. Этот подход позволил использовать многочисленные преимущества операторного языка, например, применять теорию интерполяции операторов. В третьей и последней части обзора (разделы 7–10) рассматриваются приложения к вопросам геометрии симметричных пространств. Так, в терминах свойств оператора Круглова дана характеристика симметричных пространств, в которых справедлив вариант неравенства Хинчина, найдены наиболее широкие на сегодняшний день достаточные условия, при которых симметричные пространства на $[0, 1]$ и $(0, \infty)$ изоморфны между собой, решен ряд других задач.

Упомянем о еще двух важных направлениях, напрямую относящихся к данному обзору, но не включенных в него в связи с ограниченностью места. Первое направление достаточно полно отражено в работе [5], где устанавливается прямая связь между ограниченностью оператора Круглова и ограниченностью оператора случайных перестановок, естественным образом описывающего хорошо известные неравенства С. Квапеня и К. Шютта [6], [7]. Второе относится к некоммутативной теории вероятностей, когда измеримые независимые функции заменяются соответствующими последовательностями операторов. Мы отсылаем читателя к работе [8], где получены некоммутативные неравенства Розенталя. Библиографии в [5] и [8] дают, на наш взгляд, неплохое представление о развитии указанных направлений.

Изложим здесь же наиболее важные классические результаты, ставшие стимулом для дальнейших исследований. В 1923 г. А. Я. Хинчин в работе “Über dyadische Brüche” [9] доказал свои знаменитые неравенства, которые мы приведем в форме, принятой в теории функций, используя функции Радемахера $r_n(t) = \text{sign} \sin 2^n \pi t$, $0 \leq t \leq 1$ ($n \in \mathbb{N}$).

ТЕОРЕМА 1 (неравенства Хинчина). *Для любого $0 < p < \infty$ существуют такие константы $A_p > 0$ и $B_p > 0$, что для всех $n \in \mathbb{N}$ и произвольных $a = (a_k)_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство*

$$A_p \|a\|_2 \leq \left\| \sum_{k=1}^n a_k r_k \right\|_p \leq B_p \|a\|_2, \quad (1)$$

где, как обычно, $\|f\|_p$ – норма в пространстве $L_p[0, 1]$, $\|a\|_2 = \left(\sum_k |a_k|^2 \right)^{1/2}$. При этом $B_p \leq \sqrt{p}$ ($p \geq 1$) и $B_p \sim \sqrt{p/e}$ при $p \rightarrow \infty$.

Эта теорема показывает, что L_p -нормы полиномов по системе Радемахера эквивалентны нормам последовательностей их коэффициентов в l_2 . С точки зрения геометрии пространств последнее означает, что система Радемахера эквивалентна в $L_p[0, 1]$ ($0 < p < \infty$) каноническому базису в l_2 . Классическое доказательство теоремы 1 можно найти, например, в монографии [10; § 4.5] или в самом начале обзора [3]. Обобщением неравенств Хинчина явились неравенства Марцинкевича–Зигмунда [11], опубликованные в 1937 г. (позднее было доказано, что при выполнении условий следующей теоремы система независимых функций даже эквивалентна системе Радемахера по распределению [4; теорема 8.4 и следствие 8.3]).

ТЕОРЕМА 2 (неравенства Марцинкевича–Зигмунда). *Пусть $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ – система независимых функций на $[0, 1]$, удовлетворяющая условиям:*

$$\|f_k\|_2 = 1, \quad \|f_k\|_\infty \leq M, \quad \int_0^1 f_k(t) dt = 0 \quad (k \in \mathbb{N}). \quad (2)$$

Тогда для каждого $p \geq 1$ существует константа $C_{M,p} > 0$, зависящая лишь от M и p , такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и произвольных $a = (a_k)_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$ выполнено:

$$C_{M,p}^{-1} \|a\|_2 \leq \left\| \sum_{k=1}^n a_k f_k \right\|_p \leq C_{M,p} \|a\|_2. \quad (3)$$

Последняя теорема – простое следствие доказанной в [11] (см. также [12; теорема 2.5]) экспоненциальной оценки для распределения полиномов по системе независимых функций, имеющей свойства (2).

ТЕОРЕМА 3. *Если система независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям (2), то для любых $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$ и $\tau > 0$ справедливо неравенство*

$$\lambda \left\{ t \in [0, 1] : \left| \sum_{k=1}^n a_k f_k(t) \right| > \tau \|a\|_2 \right\} \leq 2e^{-\tau^2/(4M^2)}. \quad (4)$$

Заметим, что значительно раньше, в 1929 г., оценки распределений сумм независимых функций, подобные (4), были доказаны А. Н. Колмогоровым [13]. При этом в отличие от предыдущих результатов они справедливы не только для систем равномерно ограниченных функций.

ТЕОРЕМА 4 (неравенства Колмогорова). *Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ – система ограниченных независимых с. в. таких, что $E f_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots$). Обозначим*

$$m_k = \|f_k\|_{\infty}, \quad M_n = \max_{k=1, \dots, n} m_k, \quad b_k = E f_k^2, \quad B_n = \sum_{k=1}^n b_k.$$

Тогда для любых $n \in \mathbb{N}$ и $\tau > 0$

$$\lambda \left\{ t \in [0, 1] : \sum_{k=1}^n f_k(t) > \tau \right\} \leq e^{-\tau^2/(4B_n)}, \quad \text{если } \tau \geq \frac{B_n}{M_n},$$

и

$$\lambda \left\{ t \in [0, 1] : \sum_{k=1}^n f_k(t) > \tau \right\} \leq e^{-\tau^2/(4B_n)}, \quad \text{если } \tau \leq \frac{B_n}{M_n}.$$

Позднее, в 1959 г., Ю. В. Прохоров [14] доказал следующее замечательное усиление этих неравенств.

ТЕОРЕМА 5 (неравенство Прохорова). *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы. Тогда в тех же обозначениях справедливо неравенство*

$$\lambda \left\{ \sum_{k=1}^n f_k > t \right\} \leq \exp \left(-\frac{t}{2M_n} \operatorname{arcsch} \frac{tM_n}{2B_n} \right).$$

2. Определения, обозначения, предварительные сведения

Пусть (T, Σ, μ) – пространство с σ -конечной мерой μ , заданной на σ -алгебре Σ подмножеств множества T . Совокупность всех почти всюду (п. в.) конечных измеримых вещественнозначных функций (классов эквивалентности) на T с естественными алгебраическими операциями и топологией сходимости по мере μ на множествах конечной меры является линейным топологическим пространством, которое мы будем обозначать через $S(T, \Sigma, \mu)$. Как обычно, функции, совпадающие почти всюду, отождествляются, а запись $x \leq y$ ($x, y \in S(T, \Sigma, \mu)$) означает, что $x(t) \leq y(t)$ при почти всех $t \in T$. Далее нас будут

интересовать, главным образом, случаи, когда T – это отрезок $[0, 1]$ с мерой Лебега λ , n -мерный $[0, 1]^n$ ($n \in \mathbb{N}$) или бесконечномерный $[0, 1]^\infty$ куб с мерой $\prod_{k=1}^n \lambda_k$ или $\prod_{k=1}^\infty \lambda_k$ соответственно (λ_k – мера Лебега на $[0, 1]$), а также полуось $(0, \infty)$ с мерой Лебега. Во всех случаях, кроме последнего, мы получаем вероятностные пространства, изоморфные между собой. Так, например, в случае $[0, 1]$ и $[0, 1]^n$ это означает, что существует сохраняющее меру отображение δ , действующее из $[0, 1]$ на $[0, 1]^n$. Пространство $S(T, \Sigma, \mu)$ в этих случаях будет обозначаться через $S(0, 1)$, $S([0, 1]^n)$, $S([0, 1]^\infty)$ и $S(0, \infty)$ соответственно. Всюду в дальнейшем $\chi_B(t)$ обозначает характеристическую функцию множества B , т. е. $\chi_B(t) = 1$, если $t \in B$, и $\chi_B(t) = 0$, если $t \notin B$.

Основной объект обзора – последовательности независимых функций, а “арена”, на которой они рассматриваются – симметричные (перестановочно инвариантные) пространства на $[0, 1]$ и $(0, \infty)$. Далее нам понадобятся лишь самые элементарные факты из теории вероятностей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Набор случайных величин (с. в.) $\{f_k\}_{k=1}^n$, определенных на вероятностном пространстве (Ω, Σ, P) , называется *независимым*, если для любых интервалов I_k на прямой $\mathbb{R}$ справедливо равенство

$$P\{\omega \in \Omega : f_k(\omega) \in I_k, k = 1, \dots, n\} = \prod_{k=1}^n P\{\omega \in \Omega : f_k(\omega) \in I_k\}.$$

Последовательность с. в. $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ называют *независимой*, если для каждого $n \in \mathbb{N}$ набор $\{f_k\}_{k=1}^n$ независим.

Напомним также, что с. в. f называется *симметрично распределенной*, если величины f и $-f$ одинаково распределены. Через $\mathcal{F}_f(x)$ в дальнейшем будет обозначаться (традиционная для теории вероятностей) функция распределения, а через $\theta_f(t)$ – характеристическая функция с. в. f , т. е. $\theta_f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\mathcal{F}_f(x)$.

Пусть (Ω, Σ, P) – вероятностное пространство, f – интегрируемая с. в., определенная на нем. Если $\mathfrak{R}$ – σ -подалгебра σ -алгебры Σ , то существует и единственна (с точностью до меры ноль) $\mathfrak{R}$ -измеримая интегрируемая с. в. $E_{\mathfrak{R}}f$, которая для всех $B \in \mathfrak{R}$ удовлетворяет равенству

$$\int_B f(\omega) dP(\omega) = \int_B E_{\mathfrak{R}}f(\omega) dP(\omega) \quad (5)$$

[15; теорема 1.1]. Случайную величину $E_{\mathfrak{R}}f$ называют *условным математическим ожиданием* f относительно σ -алгебры $\mathfrak{R}$. Кроме того, как обычно, $Ef = \int_{\Omega} f(\omega) dP(\omega)$.

Понятия и результаты из теории симметричных пространств будут использоваться гораздо интенсивнее. Поэтому мы уделим ей большее внимание, ограничившись, в основном, пространствами функций, определенных на $[0, 1]$ (подробнее см. монографии [16]–[18]).

Пусть $J = [0, 1]$ или $(0, \infty)$. Для функции $x = x(t) \in S(J)$, $x \geq 0$, введем функцию распределения, принятую в теории функций: $n_x(\tau) := \lambda\{t \in J : x(t) > \tau\}$ ($\tau > 0$). Она неотрицательна, не возрастает и непрерывна справа. Две неотрицательные функции $x, y \in S(J)$ называются *равноизмеримыми*, если $n_x(\tau) = n_y(\tau)$ ($\tau > 0$). В частности, любая функция $x \in S(J)$, $x \geq 0$, равноизмерима со своей невозрастающей непрерывной слева *перестановкой*

$$x^*(t) := \inf\{\tau \geq 0 : n_x(\tau) < t\} \quad (t \in J).$$

Для произвольной $x(t) \in S(J)$ через $x^*(t)$ обозначается перестановка функции $|x(t)|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Банахово функциональное пространство $X \subset S(J)$ называется *симметричным*, если: 1) из того, что $x \in X$, $y \in S(J)$ и $|y(t)| \leq |x(t)|$ п.в., следует, что $y \in X$ и $\|y\|_X \leq \|x\|_X$; 2) из того, что $x \in X$, $y \in S(J)$ и функции $|x(t)|$ и $|y(t)|$ равноизмеримы, следует, что $y \in X$ и $\|y\|_X = \|x\|_X$.

Любое симметричное пространство X на J линейно и непрерывно вложено в отделимое линейное топологическое пространство $S(J)$ [19; теорема 4.3.1]. Это означает, в частности, что из сходимости $\|x_n - x\|_X \rightarrow 0$ ($x_n, x \in X$) следует сходимость $x_n \rightarrow x$ по мере λ на множествах конечной меры из J . Если X и Y – банаховы пространства, то запись $X \subset Y$ всюду в дальнейшем означает, что X линейно и непрерывно вложено в Y ; тогда, в частности, для некоторой константы $C > 0$ и всех $x \in X$ выполнено неравенство $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$. Не ограничивая общности, будем всегда предполагать, что $\|\chi_{[0,1]}\|_X = 1$. Тогда, как нетрудно проверить [16; теорема 2.4.1], для произвольного симметричного пространства X на $[0, 1]$ выполнено: $L_\infty \subset X \subset L_1$, причем $\|x\|_X \leq \|x\|_{L_\infty}$ ($x \in L_\infty$) и $\|x\|_{L_1} \leq \|x\|_X$ ($x \in X$). В дальнейшем часто будет использоваться следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [16; следствие 2.4.2]. Пусть X – симметричное пространство на J , $x \in X$, $y \in S(J)$. Если для некоторого $C > 0$ и всех $\tau > 0$ выполнено $n_{|y|}(\tau) \leq Cn_{|x|}(\tau)$, то $y \in X$ и $\|y\|_X \leq \max\{1, C\}\|x\|_X$.

Если X – симметричное пространство на J , то *двойственное* (или *ассоциированное*) пространство $X^\times$ состоит из всех $y \in S(J)$, для которых

$$\|y\|_{X^\times} = \sup\left\{\int_J x(t)y(t) dt : \|x\|_X \leq 1\right\} < \infty.$$

Пространство $X^\times$ также симметрично; оно изометрически вложено в сопряженное X^* ; при этом $X^\times = X^*$ тогда и только тогда, когда X сепарабельно. Любое симметричное пространство X непрерывно вложено в свое второе двойственное, которое будет обозначаться через $X^{\times\times}$. Симметричное пространство X называется *максимальным* (имеет *свойство Фату*), если из того, что $x_n \in X$ ($n = 1, 2, \dots$), $\sup_{n=1,2,\dots} \|x_n\|_X < \infty$, $x \in S(J)$ и $x_n \rightarrow x$ п.в., следует: $x \in X$ и $\|x\|_X \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_X$. Если симметричное пространство X обладает аналогичным свойством при дополнительном условии $x \in X$, то говорят,

что X имеет *порядково полунепрерывную норму*. Последнее эквивалентно тому, что X вложено в $X^{\times \times}$ изометрически [19; теорема 6.1.6]. Пространство X максимально, если и только если его естественное вложение в $X^{\times \times}$ является сюръективной изометрией [19; теорема 6.1.7]. Норма любого максимального или сепарабельного симметричного пространства порядково полунепрерывна.

Приведем примеры симметричных пространств. Во-первых, это пространства L_p ($1 \leq p \leq \infty$):

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0,1]} |x(t)|, & p = \infty, \end{cases}$$

а также их обобщение – семейство пространств $L_{p,q}$ ($1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$):

$$\|x\|_{p,q} = \begin{cases} \left[\frac{q}{p} \int_0^1 (t^{1/p} x^*(t))^q \frac{dt}{t} \right]^{1/q}, & 1 \leq q < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0,1]} (t^{1/p} x^*(t)), & q = \infty, \end{cases}$$

играющих важную роль в теории интерполяции операторов. Хотя функционал $\|x\|_{p,q}$ не субаддитивен, он эквивалентен норме $\|x\|'_{p,q} = \|x^{**}\|_{p,q}$, где $x^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t x^*(s) ds$. Нетрудно проверить [16; лемма 2.6.5], что $L_{p,q_1} \subset L_{p,q_2}$ ($1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \infty$) и $L_{p,p} = L_p$.

Другим естественным обобщением L_p -пространств являются пространства Орлича [20]. Если $M(u)$ – функция Орлича, т.е. возрастающая выпуклая функция на $[0, \infty)$, $M(0) = 0$, то *пространство Орлича* L_M состоит из всех таких $x \in S(0,1)$, что существует $u > 0$, при котором $\int_0^1 M(|x(t)|/u) dt \leq 1$. В дальнейшем в качестве нормы в этом пространстве мы будем использовать *норму Люксембурга* $\|x\|_{L_M} = \inf u$, где точная нижняя грань берется по всем u , для которых выполнено последнее неравенство. Особый интерес для нас будут представлять так называемые экспоненциальные пространства Орлича. Как легко проверить, каждая из функций

$$N_p(t) := e^{t^p} - \sum_{k=0}^{[1/p]} \frac{t^{kp}}{k!} \quad (0 < p < 1) \quad \text{и} \quad N_p(t) := e^{t^p} - 1 \quad (p \geq 1)$$

является функцией Орлича на $[0, \infty)$ (всюду далее $[z]$ – целая часть числа z). Соответствующее пространство Орлича L_{N_p} часто обозначается через $\exp L_p$. Кроме того, положим: $\exp L_\infty := L_\infty$.

Напомним, что неотрицательная функция $\varphi(t)$, определенная на $[0, 1]$, называется *квазивогнутой*, если $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t)$ возрастает, а $\varphi(t)/t$ убывает. В частности, всякая неотрицательная возрастающая вогнутая на $[0, 1]$ функция $\psi(t)$, $\psi(0) = 0$, квазивогнута [16; гл. 2, § 1, с. 67]. С другой стороны, всякая квазивогнутая функция $\varphi(t)$ эквивалентна своей наименьшей вогнутой мажоранте $\bar{\varphi}(t)$ [16; теорема 2.1.1], точнее, $\bar{\varphi}(t)/2 \leq \varphi(t) \leq \bar{\varphi}(t)$ ($0 \leq t \leq 1$).

Важную роль в дальнейшем играет класс Ψ , состоящий из всех квазивогнутых на $[0, 1]$ функций $\psi(t)$, удовлетворяющих условиям: $\psi(0) = \psi(+0) = 0$ и $\psi(1) = 1$. Если $\psi \in \Psi$, то пространства Лоренца Λ_ψ и Марцинкевича M_ψ состоят из всех измеримых на $[0, 1]$ функций $x(t)$, для которых соответственно

$$\|x\|_{\Lambda_\psi} := \int_0^1 x^*(t) d\bar{\psi}(t) < \infty \quad \text{и} \quad \|x\|_{M_\psi} := \sup_{0 < t \leq 1} \frac{1}{\psi(t)} \int_0^t x^*(s) ds < \infty.$$

Через $X_\circ$ мы будем обозначать *сепарабельную часть* симметричного пространства X , т.е. замыкание L_∞ в X . Заметим, что $X_\circ$ само является симметричным пространством, которое сепарабельно, если только $X \neq L_\infty$ [16; лемма 2.4.4]. В частности, пространство $(M_\psi)_\circ$ может быть охарактеризовано как множество всех таких функций $x \in M_\psi$, что $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{\psi(t)} \int_0^t x^*(s) ds = 0$. Нетрудно показать, что для каждого симметричного пространства X имеет место равенство $(X^{\times \times})_\circ = X_\circ$.

Пространство Λ_ψ сепарабельно и максимально, $(M_\psi)_\circ$ сепарабельно, но не максимально, напротив, M_ψ максимально, но не сепарабельно. Справедливы также следующие соотношения двойственности: $(\Lambda_\psi)^\times = M_\psi$ и $(M_\psi)^\times = ((M_\psi)_\circ)^\times = \Lambda_\psi$ [16; теоремы 2.5.2 и 2.5.4].

Важной характеристикой симметричного пространства X является его *фундаментальная функция* $\phi_X(s) := \|\chi_{(0,s)}\|_X$ ($0 \leq s \leq 1$). В частности,

$$\begin{aligned} \phi_{L_{p,q}}(s) &= s^{1/p} \quad (1 \leq q \leq \infty), \\ \phi_{\Lambda_\varphi}(s) &= \bar{\varphi}(s) \quad \text{и} \quad \phi_{M_\varphi}(s) = \tilde{\varphi}(s), \quad \text{где} \quad \tilde{\varphi}(s) = \frac{s}{\varphi(s)}. \end{aligned}$$

Для любого симметричного пространства X функция ϕ_X квазивогнута на $[0, 1]$ (см. [16; теорема 2.4.7]), и если ϕ – фундаментальная функция симметричного пространства X , то $\Lambda_\phi \subset X \subset M_{\tilde{\phi}}$ [16; теоремы 2.5.5 и 2.5.7].

В каждом симметричном пространстве X на $[0, 1]$ непрерывен *оператор растяжения*

$$\sigma_\tau x(t) := x\left(\frac{t}{\tau}\right) \chi_{[0, \min\{1, \tau\}]}(t) \quad (\tau > 0)$$

и $\|\sigma_\tau\|_{X \rightarrow X} \leq \max\{1, \tau\}$ [16; теорема 2.4.5]. С его помощью определяются *нижний и верхний индексы Бойда* пространства X :

$$\alpha_X := \lim_{\tau \rightarrow 0+} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{X \rightarrow X}}{\ln \tau} \quad \text{и} \quad \beta_X := \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{X \rightarrow X}}{\ln \tau}.$$

Из приведенной оценки нормы оператора растяжения следует, что всегда выполнены неравенства $0 \leq \alpha_X \leq \beta_X \leq 1$. В частности, $\alpha_{L_{p,q}} = \beta_{L_{p,q}} = 1/p$, а индексы Бойда пространств Лоренца и Марцинкевича совпадают с соответствующими показателями растяжения их фундаментальной функции [16; гл. 2, § 4, с. 138].

Далее нам понадобится понятие симметричного пространства случайных величин, определенных на вероятностном пространстве (Ω, Σ, P) . А именно, если X – симметричное пространство на $[0, 1]$, то соответствующее пространство

$X(\Omega) := X(\Omega, \Sigma, \mathbf{P})$ состоит из таких с. в. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, что $f^* \in X$, и $\|f\|_{X(\Omega)} := \|f^*\|_X$. Здесь, как и ранее,

$$f^*(t) = \inf\{\tau \geq 0 : \mathbf{P}\{\omega \in \Omega : |f(\omega)| > \tau\} < t\} \quad (0 < t \leq 1).$$

Если пространство $(\Omega, \Sigma, \mathbf{P})$ изоморфно отрезку $[0, 1]$, рассматриваемому с мерой Лебега, то симметричные пространства $X(\Omega)$ и X мы можем (и будем) отождествлять.

Важную роль в дальнейшем будут играть понятия и методы теории интерполяции операторов. Совокупность $\vec{X} = (X_0, X_1)$ двух банаховых пространств X_0 и X_1 называют *банаховой парой*, если они оба линейно и непрерывно вложены в одно и то же отделимое линейное топологическое пространство. Для банаховой пары (X_0, X_1) можно определить *пересечение* $X_0 \cap X_1$ и *сумму* $X_0 + X_1$ как банаховы пространства с нормами

$$\|x\|_{X_0 \cap X_1} = \max\{\|x\|_{X_0}, \|x\|_{X_1}\}$$

и

$$\|x\|_{X_0 + X_1} = \inf\{\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1, x_i \in X_i, i = 0, 1\}$$

соответственно. Банахову пару образуют, например, любые два симметричных пространства X_0 и X_1 на J , где $J = [0, 1]$ или $J = (0, \infty)$, так как $X_i \subset S(J)$ ($i = 0, 1$).

Говорят, что банахово пространство X *интерполяционно* относительно банаховой пары (X_0, X_1) ($X \in \text{Int}(X_0, X_1)$), если $X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1$ и для любого линейного оператора T , ограниченного в X_0 и в X_1 , имеем: $T: X \rightarrow X$. В этом случае по теореме о замкнутом графике найдется такое $C > 0$, что для любого $T: X_i \rightarrow X_i$ ($i = 0, 1$) выполнено: $\|T\|_{X \rightarrow X} \leq C \max_{i=0,1} \|T\|_{X_i \rightarrow X_i}$. Если в последнем неравенстве можно взять $C = 1$, то пространство X будем называть *интерполяционным с константой 1*. В частности, согласно классической теореме Рисса–Торина [21; теорема 1.1.1] пространство L_p интерполяционно с константой 1 относительно пары (L_{p_0}, L_{p_1}) для любых $1 \leq p_0 \leq p \leq p_1 \leq \infty$.

Один из наиболее важных и в теории, и в приложениях способ построения интерполяционных пространств связан с использованием $\mathcal{K}$ -функционала Петре, определенного на банаховой паре (X_0, X_1) следующим образом:

$$\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1) = \inf\{\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1, x_i \in X_i\},$$

где $x \in X_0 + X_1$, а $t > 0$. Нетрудно показать, что если (X_0, X_1) – банахова пара и $x \in X_0 + X_1$ фиксировано, то $\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1)$ – непрерывная неотрицательная возрастающая вогнутая функция относительно переменной $t > 0$ [21; лемма 3.1.1]. Если $X_0 \subset X_1$ и $\|x\|_{X_1} \leq \|x\|_{X_0}$ ($x \in X_0$) (соответственно $X_1 \subset X_0$ и $\|x\|_{X_0} \leq \|x\|_{X_1}$ ($x \in X_1$)), то $\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1) = t\|x\|_{X_1}$ при $0 \leq t \leq 1$ (соответственно $\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1) = \|x\|_{X_0}$ при $t \geq 1$).

Две неотрицательные функции $f(t)$ и $g(t)$ далее будем называть эквивалентными на множестве T (пишем: $f \asymp g$ ($t \in T$)), если для некоторой константы $C > 0$ и всех $t \in T$ выполнено: $C^{-1}f(t) \leq g(t) \leq Cf(t)$.

В ряде случаев для $\mathcal{K}$ -функционала удается найти достаточно простое эквивалентное выражение. В частности, для произвольного пространства с σ -конечной мерой и любого $p \geq 1$

$$\mathcal{K}(t, x; L_p, L_\infty) \asymp \left(\int_0^{t^p} (x^*(s))^p ds \right)^{1/p} \quad (t > 0),$$

где константы эквивалентности не зависят от $x \in L_p + L_\infty$ и $t > 0$ (при $p = 1$ эквивалентность можно заменить равенством).

Далее, если F – банахова решетка двусторонних числовых последовательностей, то через $F(u_k)$, $u_k > 0$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), будем обозначать *вещное пространство*, состоящее из всех последовательностей $a = (a_k)_{k=-\infty}^\infty$, для которых конечна норма $\|a\|_{F(u_k)} = \|(a_k u_k)\|_F$. Предположим, что $F \supset \ell_\infty \cap \ell_\infty(2^{-k})$. Если (X_0, X_1) – произвольная банахова пара, то *пространство вещественного $\mathcal{K}$ -метода* $(X_0, X_1)_F^{\mathcal{K}}$ состоит из всех таких $x \in X_0 + X_1$, что $(\mathcal{K}(2^k, x; X_0, X_1))_k \in F$, с нормой $\|x\| = \|(\mathcal{K}(2^k, x; X_0, X_1))_k\|_F$. Нетрудно проверить, что $(X_0, X_1)_F^{\mathcal{K}}$ интерполяционно относительно пары (X_0, X_1) с константой 1 [22]. В частном случае $F = \ell_p(2^{-k\theta})$ ($0 < \theta < 1$, $1 \leq p \leq \infty$) получаем классические пространства $(X_0, X_1)_{\theta, p}$, свойства которых подробно изложены в монографии [21].

Важность вещественного метода интерполяции связана, в частности, с тем, что для достаточно обширного класса банаховых пар за счет него получаются все интерполяционные пространства. Банахова пара $\vec{X} = (X_0, X_1)$ называется *$\mathcal{K}$ -монотонной* (или *парой Кальдерона–Митягина*), если выполнение неравенства

$$\mathcal{K}(t, y; X_0, X_1) \leq \mathcal{K}(t, x; X_0, X_1) \quad (t > 0)$$

для некоторых $x \in X_0 + X_1$ и $y \in X_0 + X_1$ влечет существование оператора U , ограниченного в X_0 и в X_1 , такого, что $y = Ux$. Ввиду теоремы Брудного–Кругляка, одного из центральных результатов в теории интерполяции [22; теорема 15.1], любое пространство X , интерполяционное относительно $\mathcal{K}$ -монотонной пары (X_0, X_1) , представимо в виде $X = (X_0, X_1)_F^{\mathcal{K}}$ для некоторой банаховой решетки F .

Второе название $\mathcal{K}$ -монотонной пары объясняется тем, что исторически первым результатом в этом направлении явилась теорема о $\mathcal{K}$ -монотонности банаховой пары (L_1, L_∞) , доказанная независимо и почти одновременно А. П. Кальдероном [23] и Б. С. Митягиным [24]. В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что симметричное пространство X на $[0, 1]$ интерполяционно относительно этой пары с константой 1. Ввиду теоремы Кальдерона–Митягина это эквивалентно выполнению следующего условия: если $x \in X$, $y \in L_1$ и $y \prec x$, то $y \in X$ и $\|y\|_X \leq \|x\|_X$, где через $y \prec x$ обозначается полуупорядоченность Харди–Литтлвуда, означающая, что $\int_0^t y^*(s) ds \leq \int_0^t x^*(s) ds$ при всех $0 \leq t \leq 1$. Класс таких пространств весьма широк, он содержит все максимальные и сепарабельные пространства, в частности, все пространства Орлича, Лоренца и Марцинкевича. Ввиду [17; теорема 2.а.4] оператор условного математического ожидания $E_{\mathcal{B}}$, соответствующий σ -подалгебре $\mathcal{B}$ некоторого

вероятностного пространства, ограничен в L_1 и в L_∞ с константой 1. Поэтому справедливо следующее утверждение, которое далее будем часто использовать.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Всякий оператор условного математического ожидания $E_{\mathcal{E}}$ ограничен в любом симметричном пространстве и имеет норму 1.*

Наконец, для нас будет полезна следующая интерполяционная конструкция, введенная А. П. Кальдероном [25]. Пусть X_0 и X_1 – банаховы решетки измеримых функций, определенных на одном и том же пространстве с мерой $(\mathcal{M}, m)$. Для каждого $\theta \in (0, 1)$ пространство $X_0^{1-\theta} X_1^\theta$ состоит из всех таких измеримых функций f на $(\mathcal{M}, m)$, что при некоторых $\lambda > 0$ и $f_i \in X_i$, $\|f_i\|_{X_i} \leq 1$ ($i = 0, 1$), справедливо неравенство

$$|f(x)| \leq \lambda |f_0(x)|^{1-\theta} |f_1(x)|^\theta, \quad x \in \mathcal{M}.$$

Это пространство снабжается нормой, равной точной нижней грани чисел λ , для которых выполнено предыдущее соотношение. Несмотря на то что эта конструкция не является интерполяционным функтором на множестве всех пар банаховых решеток [26], она очень полезна в теории интерполяции. В частности, если (X_0, X_1) и (Y_0, Y_1) – две пары банаховых решеток измеримых функций на пространствах с мерой $(\mathcal{M}, m)$ и $(\mathcal{M}', m')$ соответственно, то любой *положительный* оператор A из $S(\mathcal{M}, m)$ в $S(\mathcal{M}', m')$, который ограничен из X_0 в Y_0 и из X_1 в Y_1 , ограничен также из пространства $X_0^{1-\theta} X_1^\theta$ в пространство $Y_0^{1-\theta} Y_1^\theta$ и $\|A\|_{X_0^{1-\theta} X_1^\theta \rightarrow Y_0^{1-\theta} Y_1^\theta} \leq \|A\|_{X_0 \rightarrow Y_0}^{1-\theta} \|A\|_{X_1 \rightarrow Y_1}^\theta$ для всех $\theta \in (0, 1)$ (см., например, [17; предложение 1.d.2(i), с. 43]).

Детальное изложение как приведенных здесь, так и многих других результатов и фактов теории интерполяции можно найти в монографиях [16], [18], [21], [22].

В разделах 6 и 7 мы будем говорить о (квази)банаховых симметричных пространствах последовательностей. Если $\xi = (\xi_n)_{n=1}^\infty$ – ограниченная последовательность вещественных чисел, то $\xi^* = (\xi_n^*)_{n=1}^\infty$ – ее невозрастающая перестановка, т. е. $\xi_n^* = \inf_{\text{card } A=n-1} \sup_{k \in \mathbb{N} \setminus A} |\xi_k|$. Квазибанахово пространство последовательностей E называется *симметричным*, если из условий $a \in E$ и $b^* \leq a^*$ следует, что $b \in E$ и $\|b\|_E \leq \|a\|_E$. В таком пространстве квазинорма $\|\cdot\|_E$ удовлетворяет обобщенному неравенству треугольника

$$\|a + b\|_E \leq L(\|a\|_E + \|b\|_E), \quad a, b \in E,$$

где $L \geq 1$. Если последнее неравенство выполнено в случае $L = 1$, то E называется (банаховым) *симметричным пространством последовательностей*. Без ограничения общности всюду будем предполагать, что $\|e_k\|_E = 1$ ($k = 1, 2, \dots$), где e_k – элементы стандартного базиса в пространствах последовательностей.

3. Оценки L_p -норм сумм независимых функций

В этом разделе мы рассмотрим оценки L_p -норм сумм независимых функций, обобщающие и уточняющие классические неравенства Хинчина и Марцинкевича–Зигмунда. Здесь можно выделить два основных направления. Первое

связано с тем, что вместо равномерно ограниченных рассматриваются произвольные системы неотрицательных или симметрично распределенных функций. Суть второго состоит в замене нормы последовательности коэффициентов в пространстве ℓ_2 (или более общо: суммы дисперсий слагаемых) некоторой более “гибкой” величиной, используя которую, можно получить двусторонние оценки с константой, не зависящей от p .

3.1. Неравенства Розенталя. В 1970 г. при изучении дополняемых подпространств пространства $L_p = L_p[0, 1]$ Х. П. Розенталь [1] доказал следующие замечательные соотношения, второе из которых можно рассматривать как далеко идущее обобщение неравенств Хинчина. Они показывают, что с точностью до эквивалентности L_p -норма суммы независимых функций определяется L_q -нормами слагаемых. Как мы увидим далее, аналогичное явление, выраженное в терминах “дизъюнктификации”, наблюдается также и в общих симметричных пространствах.

ТЕОРЕМА 6 (неравенства Розенталя).

(i) Если $1 < p < \infty$, то для произвольной последовательности $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset L_p$ неотрицательных независимых функций и каждого $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\max \left\{ \left(\sum_{k=1}^n \|f_k\|_p^p \right)^{1/p}, \sum_{k=1}^n \|f_k\|_1 \right\} \leq \left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_p \leq 2^p \max \left\{ \left(\sum_{k=1}^n \|f_k\|_p^p \right)^{1/p}, \sum_{k=1}^n \|f_k\|_1 \right\}. \quad (6)$$

(ii) Если $p > 2$, то существует такая константа $K_p > 0$, что для произвольной последовательности $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset L_p$ независимых функций со свойством $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$ ($k = 1, 2, \dots$) и каждого $n \in \mathbb{N}$ выполнено:

$$\frac{1}{2} \max \left\{ \left(\sum_{k=1}^n \|f_k\|_p^p \right)^{1/p}, \left(\sum_{k=1}^n \|f_k\|_2^2 \right)^{1/2} \right\} \leq \left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_p \leq K_p \max \left\{ \left(\sum_{k=1}^n \|f_k\|_p^p \right)^{1/p}, \left(\sum_{k=1}^n \|f_k\|_2^2 \right)^{1/2} \right\}. \quad (7)$$

Для доказательства нам потребуются две леммы.

ЛЕММА 1. Пусть $1 < p < \infty$. Если $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset L_p$ – произвольная последовательность независимых функций, то для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_p \leq 2^p \max \left\{ \left(\sum_{k=1}^n \|f_k\|_p^p \right)^{1/p}, \sum_{k=1}^n \|f_k\|_1 \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем (и будем) предполагать, что $f_k \geq 0$ для всех $k = 1, 2, \dots$. Введем обозначение:

$$N_p := \left(\sum_{k=1}^n \|f_k\|_p^p \right)^{1/p}.$$

Ввиду независимости функций f_1 и $f_2 + \dots + f_n$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f_1 + \dots + f_n)^{p-1} f_1 dt &\leq 2^{p-1} \int_0^1 (f_1^{p-1} + (f_2 + \dots + f_n)^{p-1}) f_1 dt \\ &= 2^{p-1} \left(\int_0^1 f_1^p dt + \int_0^1 (f_2 + \dots + f_n)^{p-1} dt \int_0^1 f_1 dt \right) \\ &\leq 2^{p-1} \left(\int_0^1 f_1^p dt + \int_0^1 (f_1 + \dots + f_n)^{p-1} dt \int_0^1 f_1 dt \right). \end{aligned}$$

Точно так же

$$\int_0^1 (f_1 + \dots + f_n)^{p-1} f_k dt \leq 2^{p-1} \left(\int_0^1 f_k^p dt + \left\| \sum_{i=1}^n f_i \right\|_{p-1}^{p-1} \int_0^1 f_k dt \right)$$

для всех $k = 1, \dots, n$. Суммируя последние неравенства по k , получим

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_p^p \leq 2^{p-1} \left(N_p^p + \left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_p^{p-1} N_1 \right) \leq 2^p \max \left\{ N_p^p, \left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_p^{p-1} N_1 \right\},$$

откуда

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_p \leq \max \{ 2N_p, 2^p N_1 \} \leq 2^p \max \{ N_p, N_1 \}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $1 \leq p < \infty$ и $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset L_p$ – произвольная последовательность независимых функций такая, что $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$ ($k = 1, 2, \dots$).

Тогда:

(а) если $\theta_k = \pm 1$ ($k = 1, 2, \dots$), то для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$\left\| \sum_{k=1}^n \theta_k f_k \right\|_p \leq 2 \left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_p;$$

(б) для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_p \leq 2 \left(\sum_{k=1}^n \|f_k\|_p^p \right)^{1/p}, \quad \text{если } p \leq 2,$$

и

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_p \geq \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \|f_k\|_p^p \right)^{1/p}, \quad \text{если } p > 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что функции f и g независимы и, кроме того, $Ef = 0$. Тогда, если E_g – оператор условного математического ожидания относительно σ -алгебры, порожденной функцией g , то выполнены неравенства $\|E_g\|_{L_p \rightarrow L_p} \leq 1$ ($1 \leq p \leq \infty$) (см. предложение 2). Кроме того, так как для

любого g -измеримого множества B функции f и χ_B независимы, то ввиду равенства (5)

$$\int_B \mathbb{E}_g f \, du = \int_B f \, du = \int_0^1 f \chi_B \, du = \mathbb{E} f \cdot \lambda(B) = 0.$$

Поэтому $\mathbb{E}_g f = 0$ и

$$\|g\|_p = \|\mathbb{E}_g g\|_p = \|\mathbb{E}_g(f + g)\|_p \leq \|f + g\|_p.$$

Для данных $\theta_k = \pm 1$ ($k = 1, \dots, n$) определим

$$f = \sum_{k:\theta_k=1} f_k \quad \text{и} \quad g = \sum_{k:\theta_k=-1} f_k.$$

Тогда

$$f + g = \sum_{k=1}^n f_k \quad \text{и} \quad f - g = \sum_{k=1}^n \theta_k f_k.$$

По условию f и g независимы и $\int_0^1 f(t) \, dt = \int_0^1 g(t) \, dt = 0$. Следовательно, ввиду сделанного ранее наблюдения, $\|f\|_p \leq \|f + g\|_p$ и $\|g\|_p \leq \|f + g\|_p$. Тем самым, $\|f - g\|_p \leq 2\|f + g\|_p$, и (а) доказано.

Переходя к доказательству утверждения (b), предположим сначала, что функции f_k ($k = 1, 2, \dots$) симметрично распределены. Тогда функции $f_1 - f_2$ и $f_1 + f_2$ одинаково распределены и, значит, $\|f_1 + f_2\|_p^p = (\|f_1 + f_2\|_p^p + \|f_1 - f_2\|_p^p)/2$. Если $1 \leq p \leq 2$, то $|a + b|^p + |a - b|^p \leq 2(|a|^p + |b|^p)$, и поэтому

$$\|f_1 + f_2\|_p^p \leq \|f_1\|_p^p + \|f_2\|_p^p.$$

В случае, когда $p > 2$, справедливы противоположные неравенства:

$$|a + b|^p + |a - b|^p \geq 2(|a|^p + |b|^p) \quad \text{и} \quad \|f_1 + f_2\|_p^p \geq \|f_1\|_p^p + \|f_2\|_p^p.$$

Тем самым, если функции f_k независимы и симметрично распределены, то для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_p \leq \left(\sum_{k=1}^n \|f_k\|_p^p \right)^{1/p}, \quad \text{если } p \leq 2,$$

и

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_p \geq \left(\sum_{k=1}^n \|f_k\|_p^p \right)^{1/p}, \quad \text{если } p > 2.$$

В общем случае, применяя симметризацию, рассмотрим разности $f_i - f'_i$, где f'_i – независимые копии f_i ($i = 1, 2, \dots$). Они независимы и симметрично распределены. Поэтому, если, например, $1 \leq p \leq 2$, то с помощью рассуждений из начала доказательства, а также неравенства Минковского получаем:

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_p \leq \left\| \sum_{k=1}^n (f_k - f'_k) \right\|_p \leq \left(\sum_{k=1}^n \|f_k - f'_k\|_p^p \right)^{1/p} \leq 2 \left(\sum_{k=1}^n \|f_k\|_p^p \right)^{1/p}.$$

Случай $p > 2$ рассматривается аналогично. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Чтобы получить утверждение (i), достаточно применить лемму 1, а также элементарное неравенство $\|(b_k)\|_p \leq \|(b_k)\|_1$ ($p \geq 1$, $b_k \in \mathbb{R}$).

При доказательстве (ii) будет использоваться обозначение, введенное в доказательстве леммы 1. Так как f_k независимы, то $\int_0^1 f_i f_j dt = \int_0^1 f_i dt \int_0^1 f_j dt = 0$ ($i \neq j$), т. е. система $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ ортогональна. Поэтому

$$N_2 = \left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_2,$$

и тогда оценка снизу в (7) следует из леммы 2(b), а также того, что

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_2 \leq \left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_p.$$

Докажем оценку сверху в (7). По лемме 2(a) для каждого $u \in [0, 1]$ мы имеем

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_p^p \leq 2^p \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n r_k(u) f_k(t) \right|^p dt,$$

где $r_k(u)$ – функции Радемахера. Интегрируя последнее неравенство по u , меняя порядок интегрирования и применяя неравенства Хинчина (1), получим

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_p^p \leq 2^p B_p^p \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n f_k(t)^2 \right)^{p/2} dt.$$

По условию f_k^2 – неотрицательные независимые функции из $L_{p/2}$. Так как $p/2 > 1$, то по лемме 1

$$\left(\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n f_k(t)^2 \right)^{p/2} dt \right)^{2/p} \leq 2^{p/2} \max\{N_p^2, N_2^2\}.$$

В итоге оценка сверху в (7) с $K_p = 2^{p/4+1} B_p$ вытекает из двух последних соотношений. Теорема доказана.

3.2. Неравенства Хитченко. Неравенства Хинчина (1) для L_p -норм полиномов Радемахера содержат константы A_p и B_p , зависящие от p , и поэтому, скажем, на основе правой оценки можно лишь утверждать, что с некоторой константой $C = C(a)$

$$\left\| \sum_{k=1}^\infty a_k r_k \right\|_p \leq C \sqrt{p} \quad (p \geq 1), \quad \text{если } a = (a_k) \in \ell_2.$$

В 1993 г. П. Хитченко доказал более точное утверждение, которое позволяет в принципе для каждой последовательности коэффициентов $(a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_2$ определить порядок нормы $\left\| \sum_{k=1}^\infty a_k r_k \right\|_p$ при $p \rightarrow \infty$ [27]. Центральная роль при этом принадлежит $\mathcal{K}$ -функционалу Петре $\kappa_a(t) := \mathcal{K}(t, a; \ell_1, \ell_2)$, соответствующему банаховой паре (ℓ_1, ℓ_2) (см. раздел 2).

ТЕОРЕМА 7. Существует такая универсальная константа $\gamma > 0$, что для всех $t \geq 1$ и $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_2$ выполнены неравенства

$$\gamma \kappa_a(\sqrt{t}) \leq \left\| \sum_{k=1}^\infty a_k r_k \right\|_t \leq \kappa_a(\sqrt{t}). \quad (8)$$

Для доказательства нам потребуются некоторые эквивалентные выражения для функционала $\kappa_a(t)$. Прежде всего, мы докажем один из вариантов известного неравенства Хольмстедта (см. [28] или [21; упражнение 5.7.3]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для любых $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_2$ и $t > 0$ выполнены неравенства

$$\frac{1}{4} \left\{ \sum_{i=1}^{[t^2]} a_i^* + t \left(\sum_{i=[t^2]+1}^\infty (a_i^*)^2 \right)^{1/2} \right\} \leq \kappa_a(t) \leq \sum_{i=1}^{[t^2]} a_i^* + t \left(\sum_{i=[t^2]+1}^\infty (a_i^*)^2 \right)^{1/2}, \quad (9)$$

где $(a_i^*)_{i=1}^\infty$ – невозрастающая перестановка последовательности $(|a_n|)_{n=1}^\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала функциональный аналог (9): для произвольной функции $f \in L_1(0, \infty) + L_2(0, \infty)$ и любых $t > 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left\{ \int_0^{t^2} f^*(s) ds + t \left(\int_{t^2}^\infty f^*(s)^2 ds \right)^{1/2} \right\} &\leq \mathcal{K}(t, f; L_1, L_2) \\ &\leq \int_0^{t^2} f^*(s) ds + t \left(\int_{t^2}^\infty f^*(s)^2 ds \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $f = f^*$. Для каждого $t > 0$ определим $f_0 = f \chi_{(0, t^2)}$ и $f_1 = f \chi_{(t^2, \infty)}$. Так как

$$\|f_0\|_{L_1} + t \|f_1\|_{L_2} = \int_0^{t^2} f^*(s) ds + t \left(\int_{t^2}^\infty f^*(s)^2 ds \right)^{1/2},$$

то правое неравенство в (10) вытекает из определения $\mathcal{K}$ -функционала.

Для доказательства левого неравенства рассмотрим произвольное представление $f = g + h$, где $g \in L_1$, $h \in L_2$. Тогда, ввиду элементарного неравенства для перестановок [16; соотношение (2.23) на с. 93],

$$f(u) \leq g^*\left(\frac{u}{2}\right) + h^*\left(\frac{u}{2}\right), \quad u > 0. \quad (11)$$

Поэтому, применяя неравенство Коши–Буняковского, получим

$$\begin{aligned} \|g\|_{L_1} + t \|h\|_{L_2} &\geq \frac{1}{2} \left(\int_0^{t^2} g^*\left(\frac{u}{2}\right) du + t \left(\int_0^{t^2} \left(h^*\left(\frac{u}{2}\right) \right)^2 du \right)^{1/2} \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\int_0^{t^2} g^*\left(\frac{u}{2}\right) du + \int_0^{t^2} h^*\left(\frac{u}{2}\right) du \right) \geq \frac{1}{2} \int_0^{t^2} f^*(u) du. \end{aligned} \quad (12)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} t^2 \int_{t^2}^{\infty} \left(g^* \left(\frac{u}{2} \right) \right)^2 du &\leq \int_0^{t^2} g^* \left(\frac{u}{2} \right) du \int_{t^2}^{\infty} g^* \left(\frac{u}{2} \right) du \\ &\leq \left(\int_0^{\infty} g^* \left(\frac{u}{2} \right) du \right)^2 = 4 \|g\|_{L_1}^2, \end{aligned}$$

и, значит, ввиду (11)

$$\begin{aligned} \|g\|_{L_1} + t \|h\|_{L_2} &\geq \frac{t}{2} \left(\int_{t^2}^{\infty} \left(g^* \left(\frac{u}{2} \right) \right)^2 du \right)^{1/2} + \frac{t}{2} \left(\int_{t^2}^{\infty} \left(h^* \left(\frac{u}{2} \right) \right)^2 du \right)^{1/2} \\ &\geq \frac{t}{2} \left(\int_{t^2}^{\infty} (f^*(u))^2 du \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (12) по определению $\mathcal{K}$ -функционала получаем левое неравенство в (10).

Далее, для произвольной последовательности $a = (a_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$ определим ступенчатую функцию

$$f_a(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{(k-1, k]}(t) \quad (t > 0). \quad (13)$$

Стандартные рассуждения показывают, что для любых $a = (a_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$ и $t > 0$ справедливо равенство

$$\mathcal{K}(t, f_a; L_1, L_2) = \kappa_a(t). \quad (14)$$

Перейдем теперь непосредственно к доказательству неравенства (9). Прежде всего, если $0 < t < 1$, то ввиду неравенства $\|a\|_2 \leq \|a\|_1$ имеем: $\kappa_a(t) = t \|a\|_2$, и (9) очевидно.

Пусть $t \geq 1$. Так как пространства ℓ_1 и ℓ_2 симметричны, то можно считать, что $a_k = a_k^*$. Обозначим $b^t = (b_k^t)$, где $b_k^t = a_k$, если $k \leq [t^2]$, и $b_k^t = 0$, если $k > [t^2]$. Кроме того, пусть $c^t = a - b^t$. Тогда $\kappa_a(t) \leq \|b^t\|_1 + t \|c^t\|_2$, и тем самым правое неравенство в (9) – прямое следствие определения $\mathcal{K}$ -функционала. Что же касается левого, то оно вытекает из соотношений (14) и (10). Действительно, если f_a определяется равенством (13), то

$$\begin{aligned} \kappa_a(t) &\geq \kappa_a(\sqrt{[t^2]}) = \mathcal{K}(\sqrt{[t^2]}, f_a; L_1, L_2) \\ &\geq \frac{1}{4} \left\{ \int_0^{[t^2]} f_a^*(s) ds + t \left(\int_{[t^2]}^{\infty} f_a^*(s)^2 ds \right)^{1/2} \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \sum_{i=1}^{[t^2]} a_i^* + t \left(\sum_{i=[t^2]+1}^{\infty} (a_i^*)^2 \right)^{1/2} \right\}. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Далее нам потребуется еще одна аппроксимация функционала $\kappa_a(t)$, полученная в работе [29]. Для произвольных $a = (a_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$ и $t \in \mathbb{N}$ определим

норму

$$\|a\|_{Q(t)} = \sup \left\{ \sum_{j=1}^t \left(\sum_{n \in A_j} a_n^2 \right)^{1/2} \right\}, \quad (15)$$

где верхняя грань берется по всем разбиениям $\{A_j\}_{j=1}^t$ натурального ряда $\mathbb{N}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_2$ и $t^2 \in \mathbb{N}$, то

$$\|a\|_{Q(t^2)} \leq \kappa_a(t) \leq \sqrt{2} \|a\|_{Q(t^2)}. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, из определения $\|\cdot\|_{Q(t)}$ следует, что

$$\|a\|_{Q(t^2)} \leq \|a\|_1 \quad \text{и} \quad \|a\|_{Q(t^2)} \leq t \|a\|_2.$$

Действительно, первое неравенство очевидно, а для доказательства второго достаточно заметить, что ввиду неравенства Коши–Буняковского для произвольного разбиения $\{A_j\}_{j=1}^{t^2}$ множества натуральных чисел выполнено

$$\sum_{j=1}^{t^2} \left(\sum_{n \in A_j} a_n^2 \right)^{1/2} \leq t \left(\sum_{j=1}^{t^2} \sum_{n \in A_j} a_n^2 \right)^{1/2} = t \|a\|_2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \kappa_a(t) &= \inf \{ \|b\|_1 + t \|c\|_2 : b + c = a, \ b \in \ell_1, \ c \in \ell_2 \} \\ &\geq \inf \{ \|b\|_{Q(t^2)} + \|c\|_{Q(t^2)} : b + c = a, \ b \in \ell_1, \ c \in \ell_2 \} \geq \|a\|_{Q(t^2)}, \end{aligned}$$

и левое неравенство в (16) доказано.

Докажем противоположное неравенство. С помощью стандартных рассуждений нетрудно показать, что для каждого $t > 0$ сопряженным к пространству $\ell_1 + \ell_2$ с нормой $\kappa_a(t)$ будет пространство $\ell_2 \cap \ell_\infty$ с нормой $\max\{\|a\|_\infty, t^{-1}\|a\|_2\}$. Тем самым по теореме Хана–Банаха

$$\kappa_a(t) = \max \left\{ \sum_{k=1}^\infty a_k b_k : b = (b_k)_{k=1}^\infty \in \ell_2, \ \max\{\|b\|_\infty, t^{-1}\|b\|_2\} \leq 1 \right\}. \quad (17)$$

Поэтому существует такая последовательность $b \in \ell_2$, что

$$\kappa_a(t) = \sum_{k=1}^\infty a_k b_k \quad \text{и} \quad \max\{\|b\|_\infty, t^{-1}\|b\|_2\} = 1.$$

Выберем $n_0, n_1, n_2, \dots, n_{t^2} \in \{0, 1, \dots, \infty\}$ по индукции следующим образом: если $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_m$ уже найдены, то

$$n_{m+1} = 1 + \max \left\{ k : \sum_{n=n_m+1}^k b_n^2 \leq 1 \right\}.$$

Так как $\|b\|_\infty \leq 1$, то $\sum_{n=n_m+1}^{n_m+1} b_n^2 \leq 2$. Из того, что $\|b\|_2 \leq t$, следует: $n_{t^2} = \infty$. Таким образом,

$$\kappa_a(t) = \sum_{k=1}^\infty a_k b_k \leq \sum_{m=1}^{t^2} \left(\sum_{n=n_{m-1}+1}^{n_m} b_n^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=n_{m-1}+1}^{n_m} a_n^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{2} \|a\|_{Q(t^2)},$$

и утверждение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. Правое неравенство в (8) – непосредственное следствие определения $\mathcal{H}$ -функционала и неравенств Хинчина. Действительно, для произвольного $\varepsilon > 0$ найдем $b \in \ell_1$ и $c \in \ell_2$ такие, что $\|b\|_1 + \sqrt{t}\|c\|_2 \leq \kappa_a(\sqrt{t}) + \varepsilon$. Тогда, применяя (1) (с учетом оценки для константы), получим

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_t &\leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} b_k r_k \right\|_t + \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k r_k \right\|_t \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| + \sqrt{t} \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \right)^{1/2} \leq \kappa_a(\sqrt{t}) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Левое неравенство докажем сначала в случае, когда $t \in \mathbb{N}$. По определению $Q(t)$ выберем попарно дизъюнктные множества $A_1, \dots, A_t$ в множестве натуральных чисел такие, что

$$\|a\|_{Q(t)} \leq \frac{3}{2} \left\{ \sum_{j=1}^t \left(\sum_{k \in A_j} a_k^2 \right)^{1/2} \right\}. \quad (18)$$

Обозначим $\xi_j = \sum_{k \in A_j} a_k r_k$ ($j = 1, \dots, t$). Очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k = \sum_{j=1}^t \xi_j.$$

Введем множества $B_j = \{t : \xi_j(t) \geq \|\xi_j\|_2/2\}$. Так как $\sum_{j=1}^t \xi_j \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^t \|\xi_j\|_2$ на множестве $B = \bigcap_{j=1}^t B_j$, то

$$\left\| \sum_{j=1}^t \xi_j \right\|_t \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^t \|\xi_j\|_2 \lambda(B)^{1/t}. \quad (19)$$

Ввиду независимости и симметричности распределения функций ξ_j , а также неравенства Пэли–Зигмунда в случае функций Радемахера (см., например, [30])

$$\lambda(B) = \prod_{j=1}^t \lambda(B_j) = 2^{-t} \prod_{j=1}^t \lambda \left\{ t : \xi_j(t)^2 \geq \frac{\|\xi_j\|_2^2}{4} \right\} \geq 32^{-t}.$$

Поэтому, учитывая неравенства (18) и (19), а также предложение 4, получаем:

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_t = \left\| \sum_{j=1}^t \xi_j \right\|_t \geq \frac{1}{64} \sum_{j=1}^t \|\xi_j\|_2 \geq \frac{1}{96} \|a\|_{Q(t)} \geq \frac{1}{96\sqrt{2}} \kappa_a(\sqrt{t}).$$

Если $t \geq 1$ произвольно, то ввиду вогнутости $\mathcal{H}$ -функционала, а также элементарного неравенства $\sqrt{t} \leq 2\sqrt{[t]}$ находим, что

$$\frac{1}{192\sqrt{2}} \kappa_a(\sqrt{t}) \leq \frac{1}{96\sqrt{2}} \kappa_a(\sqrt{[t]}) \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_{[t]} \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_t,$$

и теорема 7 доказана.

ПРИМЕР 1. Применяя неравенства (9) и (8), нетрудно показать, например, что

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k}{k} \right\|_t \asymp \ln(1+t) \quad \text{и} \quad \left\| \sum_{k=1}^n r_k \right\|_t \asymp \sqrt{n \min(n, t)} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Из теоремы 7 и предложения 3 вытекает следующее соотношение, существенно уточняющее неравенства Хинчина (1).

СЛЕДСТВИЕ 1. Существует такая универсальная константа $\gamma' > 0$, что для всех $p \geq 1$ и $a = (a_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$ имеют место неравенства

$$\gamma' \left\{ \sum_{i \leq p} a_i^* + \sqrt{p} \left(\sum_{i > p} (a_i^*)^2 \right)^{1/2} \right\} \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_p \leq \sum_{i \leq p} a_i^* + \sqrt{p} \left(\sum_{i > p} (a_i^*)^2 \right)^{1/2}, \quad (20)$$

где $(a_i^*)_{i=1}^{\infty}$ – невозрастающая перестановка последовательности $(|a_n|)_{n=1}^{\infty}$.

3.3. Теорема Латалы. Оказывается, аналог неравенств Хитченко справедлив и для общих систем независимых функций; только в этом случае $\mathcal{H}$ -функционал в паре (ℓ_1, ℓ_2) должен быть заменен на некоторый специальный функционал Орлича. Для точной формулировки этого интересного общего результата, доказанного Р. Латалой [31] в 1997 г., нам понадобятся некоторые определения.

Если $p > 0$, то $\phi_p(t) = |1 + t|^p$ ($t \in \mathbb{R}$) и $\Phi_p(f) = \mathbb{E} \phi_p(f)$ для произвольной с. в. f . Кроме того, если $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность неотрицательных (или симметрично распределенных) с. в., то

$$\|(f_k)\|_p := \inf \left\{ t > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} \ln \Phi_p \left(\frac{f_k}{t} \right) \leq p \right\}.$$

ТЕОРЕМА 8. (а) Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность независимых неотрицательных с. в. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{e-1}{2e^2} \|(f_k)\|_p \leq \left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_p \leq e \|(f_k)\|_p, \quad \text{если } p \geq 1, \quad (21)$$

и

$$\frac{(e^p - 1)^{1/p}}{2e^2} \|(f_k)\|_p \leq \left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_p \leq e \|(f_k)\|_p, \quad \text{если } 0 < p \leq 1. \quad (22)$$

(б) Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность независимых симметрично распределенных с. в. Тогда, если $p \geq 2$, то для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{e-1}{2e^2} \|(f_k)\|_p \leq \left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_p \leq e \|(f_k)\|_p. \quad (23)$$

Мы докажем первые два неравенства этой теоремы, относящиеся к случаю неотрицательных с. в. Доказательство неравенства (23) совершенно аналогично, отличаясь лишь чуть большей технической сложностью (см. [31]). Начнем с простых лемм.

ЛЕММА 3. Если с. в. $f_1, \dots, f_n$ неотрицательны и независимы, то

$$\Phi_p(f_1 + \dots + f_n) \leq \Phi_p(f_1) \cdots \Phi_p(f_n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что утверждение достаточно доказать для $n = 2$. Но в этом случае оно вытекает из неравенства $\phi_p(u+v) \leq \phi_p(u)\phi_p(v)$ ($u, v \geq 0$).

ЛЕММА 4. Если с. в. f и g неотрицательны и независимы, то

$$\Phi_p(2f + \Phi_p(f)^{2/p}g) \geq \Phi_p(f)\Phi_p(g).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, легко показать (возводя в степень $1/p$), что $\phi_p(uv) \geq u^{p/2}\phi_p(v)$, если $u \geq 1$, $v \geq 1$. Поэтому, учитывая неотрицательность f , получим:

$$\mathbb{E} \phi_p(2f + \Phi_p(f)^{2/p}g) \chi_{\{g \geq 1\}} \geq \mathbb{E} \phi_p(\Phi_p(f)^{2/p}g) \chi_{\{g \geq 1\}} \geq \Phi_p(f) \mathbb{E} \phi_p(g) \chi_{\{g \geq 1\}}.$$

В то же время, так как $\Phi_p(f) \geq 1$, то в случае $0 \leq u < 1$, $v \geq 0$

$$\phi_p(2v + \Phi_p(f)^{2/p}u) \geq \phi_p((1+u)v + u) = \phi_p(u)\phi_p(v).$$

Следовательно,

$$\mathbb{E} \phi_p(2f + \Phi_p(f)^{2/p}g) \chi_{\{g < 1\}} \geq \Phi_p(f) \mathbb{E} \phi_p(g) \chi_{\{g < 1\}},$$

и утверждение леммы вытекает из полученных соотношений.

В заключение докажем утверждение, в определенном смысле обратное к утверждению леммы 3.

ЛЕММА 5. Пусть $f_1, \dots, f_n$ — неотрицательные независимые с. в., удовлетворяющие условию: $\Phi_p(f_1) \cdots \Phi_p(f_n) \leq e^p$. Тогда

$$\Phi_p(2e^2(f_1 + \dots + f_n)) \geq \Phi_p(f_1) \cdots \Phi_p(f_n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $g_k := 2(\Phi_p(f_1) \cdots \Phi_p(f_k))^{2/p}(f_1 + \dots + f_k)$. Так как функционал Φ_p — монотонно возрастающий, то ввиду условия леммы достаточно показать, что для всех $k = 1, 2, \dots$ выполнено:

$$\Phi_p(g_k) \geq \Phi_p(f_1) \cdots \Phi_p(f_k).$$

Доказательство проведем по индукции. Справедливость неравенства при $k = 1$ следует из очевидной оценки $\Phi_p(2\Phi_p(f_1)^{2/p}f_1) \geq \Phi_p(f_1)$. Предположим, что оно выполнено для некоторого k . Тогда опять ввиду монотонности Φ_p , а также по предыдущей лемме

$$\begin{aligned} \Phi_p(g_{k+1}) &\geq \Phi_p\{2(\Phi_p(f_1) \cdots \Phi_p(f_{k+1}))^{2/p}(f_1 + \dots + f_k) \\ &\quad + 2(\Phi_p(f_1) \cdots \Phi_p(f_k))^{2/p}f_{k+1}\} \\ &\geq \Phi_p(2f_{k+1} + \Phi_p(f_{k+1})^{2/p}g_k) \\ &\geq \Phi_p(f_{k+1})\Phi_p(g_k) \geq \Phi_p(f_1) \cdots \Phi_p(f_{k+1}). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8. Предположим, что $\sum_{k=1}^{\infty} \ln \Phi_p(f_k/t) = p$ или, эквивалентно, $\Phi_p(f_1/t) \cdots \Phi_p(f_n/t) = e^p$. Тогда, с одной стороны, по лемме 3

$$\Phi_p\left(\frac{f_1 + \cdots + f_n}{t}\right) \leq e^p.$$

Так как $\phi_p(u) \geq u^p$, если $u \geq 0$, то для произвольной неотрицательной с.в. h выполнено неравенство $\Phi_p(h) \geq \|h\|_p^p$. Следовательно, из предыдущего неравенства получаем: $\|f_1 + \cdots + f_n\|_p \leq et$, и оценка сверху в (21) и (22) доказана.

С другой стороны, по лемме 5

$$\Phi_p\left(\frac{2e^2(f_1 + \cdots + f_n)}{t}\right) \geq e^p. \quad (24)$$

Кроме того, если $p \geq 1$, то $\Phi_p(h) \leq (1 + \|h\|_p)^p$; если же $p \leq 1$, то $\phi_p(u) \leq 1 + |u|^p$, и, значит, $\Phi_p(h) \leq 1 + \|h\|_p^p$. Из последних соотношений, а также из (24) вытекают оценки снизу как в (21), так и в (22). Тем самым в случае неотрицательных с.в. теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Применяя стандартную рандомизацию относительно независимой последовательности функций Радемахера, нетрудно показать (подробнее см. [31; замечание 2]), что неравенство (23) выполнено также для произвольной последовательности $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ независимых с.в. с нулевым математическим ожиданием.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Соотношения (21), (22) и (23) можно рассматривать как определенный итог предыдущих исследований, связанных с оценками моментов сумм независимых с.в. Прежде всего, в случае $f_k = a_k r_k$, где r_k — функции Радемахера на $[0, 1]$, а $a_k \in \mathbb{R}$ ($k = 1, 2, \dots$), соотношение (23) приводит к неравенствам (20) (правда, с худшими константами).

Рассмотрим теперь более общий случай. Пусть f_k — симметрично распределенная с.в., “хвост” распределения которой логарифмически вогнут, т.е. $P\{|f_k| \geq \tau\} = e^{-N_k(\tau)}$ ($\tau \geq 0$), где функция $N_k: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ выпукла. Обозначим $N_k^*(t) = \sup\{ts - N_k(s) : s > 0\}$. Тогда из соотношения (23) (детали см. в [31]) нетрудно получить следующее обобщение основного результата работы [32]:

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k \right\|_p \asymp \inf \left\{ t > 0 : \sum_{i \leq p} N_i^* \left(\frac{pa_i^*}{t} \right) \leq p \right\} + \sqrt{p} \left(\sum_{i > p} (a_i^*)^2 \right)^{1/2},$$

где $p \geq 2$, а последовательность независимых и симметрично распределенных с.в. $\{f_k\}$ нормирована таким образом, что $\inf\{\tau : P\{|f_k| \geq \tau\} \leq e^{-1}\} = 1$.

В заключение рассмотрим в определенном смысле противоположную ситуацию. Пусть f_k — симметрично распределенная с.в., “хвост” распределения которой является логарифмически выпуклым, т.е. $P\{|f_k| \geq \tau\} = e^{-M_k(\tau)}$ ($\tau \geq 0$), где функция $M_k: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ вогнута. Тогда, применяя (23) (см. [31]), получаем следующее соотношение, ранее доказанное в работе [33]:

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|_p \asymp \left(\sum_{k=1}^{\infty} E|f_k|^p \right)^{1/p} + \sqrt{p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} E f_k^2 \right)^{1/2} \quad (p \geq 2).$$

4. Оператор Круглова в симметричных пространствах

4.1. Неравенства Розенталя и дизъюнктивные суммы. Вернемся к неравенствам Розенталя (6) и (7). Выражения, с которыми в них сравнивается

$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_p$, могут быть представлены несколько иначе. Для каждой последовательности $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ функций, заданных на $[0, 1]$, через $\{\mathbf{f}_k\}_{k=1}^\infty$ обозначим произвольную последовательность дизъюнктивных функций, заданных уже на полуоси $[0, \infty)$ и таких, что для каждого $k = 1, 2, \dots$ функции $\mathbf{f}_k$ и f_k одинаково распределены. Например, можно положить $\mathbf{f}_k(t) = f_k(t - k + 1)\chi_{[k-1, k)}(t)$ ($t > 0$).

Тогда функция $\mathbf{f} = \sum_{k=1}^\infty \mathbf{f}_k$, которую будем называть *дизъюнктивной суммой* функций f_k ($k = 1, 2, \dots$), очевидно, обладает следующим свойством:

$$\lambda\{t > 0 : \mathbf{f}(t) > \tau\} = \sum_{k=1}^n \lambda\{t \in [0, 1] : f_k(t) > \tau\} \quad (\tau > 0), \quad (25)$$

где λ – мера Лебега. Таким образом, неравенства (6) и (7) соответственно означают, что норма $\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_p$ эквивалентна норме $\|\mathbf{f}\|_{L_p \cap L_1[0, \infty)}$, если f_k независимы и неотрицательны, и норме $\|\mathbf{f}\|_{L_p \cap L_2[0, \infty)}$, если эти функции независимы и имеют нулевое математическое ожидание. Здесь, как обычно,

$$\|g\|_{L_p \cap L_q[0, \infty)} = \max\{\|g\|_{L_p[0, \infty)}, \|g\|_{L_q[0, \infty)}\}.$$

Иначе говоря, с константами, зависящими лишь от p , последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ в $L_p[0, 1]$ эквивалентна последовательности $\{\mathbf{f}_k\}_{k=1}^\infty$ либо в пространстве $L_p \cap L_1[0, \infty)$, либо в пространстве $L_p \cap L_2[0, \infty)$ в зависимости от условий, которым удовлетворяют функции f_k .

Приведенная переформулировка неравенств Розенталя приводит к следующему естественному вопросу: для каких функциональных пространств, кроме L_p , справедливы аналогичные неравенства? В 80-е годы прошлого века был опубликован ряд работ, посвященных проблеме сравнения сумм независимых и дизъюнктивных функций в различных пространствах, а также применению этих соотношений к изучению геометрии этих пространств. Так, в 1988 г. Н. Каротерс и С. Дилворс [34] перенесли неравенства (7) на пространства Лоренца $L_{p,q}$ ($1 \leq p < \infty$, $0 < q \leq \infty$) (их определение см. в разделе 2). Заметим, что ввиду равенства (25) именно симметричные пространства являются наиболее вероятными кандидатами на выполнение в них обобщенных неравенств Розенталя.

Вскоре У. Джонсон и Г. Шехтман [35], используя неравенство Хоффмана–Йоргенсона [36], распространили оба неравенства (6) и (7) на случай общих симметричных пространств (заметим в скобках, что еще раньше интересное соотношение типа (6) было доказано для пространств $L_{p,\infty}$ М. Маркусом и Ж. Пизье [37]). Для того чтобы сформулировать их теорему, введем следующую полезную конструкцию (см. [38] или [17; 2.f]). Если X – симметричное

пространство на $[0, 1]$ и $1 \leq p \leq \infty$, то множество Z_X^p состоит из всех измеримых на $(0, \infty)$ функций f , для которых

$$\|f\|_{Z_X^p} := \|f^* \chi_{[0,1]}\|_X + \|f^* \chi_{[1,\infty)}\|_{L_p[1,\infty)} < \infty.$$

Функционал $\|\cdot\|_{Z_X^p}$ является лишь квазинормой (неравенство треугольника выполняется с константой). Тем не менее, для любого симметричного пространства X он эквивалентен подходящей симметричной норме. Действительно, так как $X \subset L_1[0, 1]$, то ввиду известного соотношения (см., например, [28] или [21; упражнение 5.7.3], а также, в случае $p = 2$, неравенства (10) при $t = 1$)

$$\|f\|_{(L_1+L_p)(0,\infty)} \asymp \int_0^1 f^*(x) dx + \left(\int_1^\infty (f^*(x))^p dx \right)^{1/p}, \quad f \in (L_1 + L_p)(0, \infty),$$

функционал $\|f\|_{Z_X^p}$ эквивалентен норме $\|f\|'_{Z_X^p} := \|f^* \chi_{[0,1]}\|_X + \|f\|_{(L_1+L_p)(0,\infty)}$. Тем самым Z_X^p – симметричное пространство на полуоси $[0, \infty)$.

ТЕОРЕМА 9 (Джонсон–Шехтман, [35]). *Пусть X – произвольное симметричное пространство на $[0, 1]$. Тогда существует такое $C > 0$, что для любой последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$, $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$ ($k = 1, 2, \dots$), и любой последовательности неотрицательных независимых функций $\{g_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ выполнено:*

$$\|\mathbf{f}\|_{Z_X^2} \leq C \left\| \sum_{k=1}^\infty f_k \right\|_X \quad \text{и} \quad \|\mathbf{g}\|_{Z_X^1} \leq C \left\| \sum_{k=1}^\infty g_k \right\|_X, \quad (26)$$

где $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ – дизъюнктные суммы, соответствующие последовательностям $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ соответственно.

Если, кроме того, $X \supset L_p$ при некотором $p < \infty$, то существует такое $C_1 = C_1(p) > 0$, что для последовательностей с такими же свойствами имеют место противоположные неравенства:

$$\left\| \sum_{k=1}^\infty f_k \right\|_X \leq C_1 \|\mathbf{f}\|_{Z_X^2}, \quad (27)$$

$$\left\| \sum_{k=1}^\infty g_k \right\|_X \leq C_1 \|\mathbf{g}\|_{Z_X^1}. \quad (28)$$

Как мы увидим, условие “удаленности” X от пространства L_∞ из второй части последней теоремы ($X \supset L_p$ при некотором $p < \infty$) не является необходимым для выполнения неравенств (27) и (28). Они справедливы также для некоторых симметричных пространств, расположенных по “другую сторону” от пространств L_p ($p < \infty$). Это удалось выяснить, используя иной подход, основанный на применении так называемого свойства Круглова.

4.2. Свойство и оператор Круглова: первоначальные сведения.

Свойство Круглова было введено М. Ш. Браверманом [39] при изучении сравнения сумм независимых и дизъюнктных функций в симметричных пространствах. Название объясняется тем, что оно было инспирировано некоторыми

вероятностными конструкциями В. М. Круглова [40], связанными с изучением безгранично делимых распределений и, в частности, с анализом классической формулы Леви–Хинчина. Пусть f – измеримая функция (случайная величина)

на $[0, 1]$. Через $\pi(f)$ обозначим с. в. $\sum_{i=1}^N f_i$, где f_i – независимые копии f , а N –

с. в., независимая относительно последовательности $\{f_i\}$, имеющая распределение Пуассона с параметром 1. Иначе говоря, $\pi(f)$ – смесь дискретного распределения вероятностей $p_m = 1/(em!)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, и семейства m -кратных свертков $\mathcal{F}_f^{*m}(x)$ функции распределения $\mathcal{F}_f(x)$ данной с. в. f . В теории вероятностей такое распределение обычно называют *сложным распределением Пуассона* [41; гл. 12]. Непосредственные вычисления показывают, что функция распределения и характеристическая функция с. в. $\pi(f)$ определяются равенствами:

$$\mathcal{F}_{\pi(f)}(x) = \frac{1}{e} \left(\chi_{(0, \infty)}(x) + \mathcal{F}_f(x) + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{l!} \mathcal{F}_f^{*l}(x) \right) \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (29)$$

и

$$\theta_{\pi(f)}(t) = \exp \left(\int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1) d\mathcal{F}_f(x) \right) = \exp(\theta_f(t) - 1) \quad (t \in \mathbb{R}), \quad (30)$$

где $\mathcal{F}_f$ и θ_f – соответственно функция распределения и характеристическая функция с. в. f .

В [40] было доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 10 (Круглов). Пусть функция $\Phi(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, $\Phi(x) \geq 0$, $\Phi(0) = 0$, а также удовлетворяет одному из следующих условий:

$$(a) \quad \Phi(x+y) \leq B\Phi(x)\Phi(y) \quad \text{или} \quad (b) \quad \Phi(x+y) \leq B(\Phi(x) + \Phi(y))$$

для некоторого $B > 0$ и всех $x, y \in \mathbb{R}$. Тогда для произвольной с. в. f соотношения $E\Phi(f) < \infty$ и $E\Phi(\pi(f)) < \infty$ эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, например, что выполнено условие (a).

Пусть $E\Phi(f) = \int_0^1 \Phi(f(x)) dx := A < \infty$, а $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность независимых функций, одинаково распределенных с f . Тогда по условию для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$E\Phi\left(\sum_{k=1}^n f_k\right) \leq BE\left(\Phi\left(\sum_{k=1}^{n-1} f_k\right)\Phi(f_n)\right) = BAE\Phi\left(\sum_{k=1}^{n-1} f_k\right) \leq \dots \leq B^{n-1}A^n.$$

По определению $\pi(f)$ принимает значения, равные $\sum_{k=1}^n f_k$ на дизъюнктивных множествах E_n , $\lambda(E_n) = 1/(en!)$ ($n = 1, 2, \dots$), причем наборы $\{f_1, \dots, f_n, \chi_{E_n}\}$ состоят из независимых функций. Поэтому

$$\begin{aligned} E\Phi(\pi(f)) &= \sum_{n=1}^{\infty} E\Phi\left(\sum_{k=1}^n f_k \chi_{E_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E\Phi\left(\sum_{k=1}^n f_k\right) \lambda(E_n) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} B^{n-1}A^n \lambda(E_n) = \frac{1}{e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B^{n-1}A^n}{n!} = \frac{e^{BA} - 1}{eB} < \infty. \end{aligned}$$

Наоборот, из первого равенства в предыдущей цепочке соотношений следует, что

$$\mathbf{E}\Phi(\pi(f)) \geq \mathbf{E}\Phi(f_1\chi_{E_1}) = e^{-1}\mathbf{E}\Phi(f_1),$$

откуда ввиду одинаковой распределенности функций f_1 и f получаем неравенство $\mathbf{E}\Phi(f) \leq e\mathbf{E}\Phi(\pi(f))$. Теорема доказана.

В частности, если дополнительно Φ – четная выпуклая функция, то мы можем определить пространство Орлича L_Φ на $[0, 1]$ (см. раздел 2) и тогда из теоремы 10 следует, что с.в. f и $\pi(f)$ принадлежат или не принадлежат пространству L_Φ одновременно. В связи с этим возникает естественный вопрос: для каких симметричных пространств верно аналогичное утверждение?

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Говорят, что симметричное пространство X на $[0, 1]$ имеет свойство Круглова ($X \in \mathbb{K}$), если из того, что $f \in X$, следует: $\pi(f) \in X$.

Заметим, что противоположная импликация: $\pi(f) \in X \implies f \in X$ выполняется всегда. Действительно, так как ввиду определения $\lambda\{|\pi(f)| \geq \tau\} \geq e^{-1}\lambda\{|f| \geq \tau\}$ ($\tau > 0$), то, применяя предложение 1, получаем, что $\|f\|_X \leq e\|\pi(f)\|_X$.

Упрощая ситуацию, можно сказать, что свойством Круглова обладают пространства, достаточно “удаленные” от пространства L_∞ (детальное рассмотрение этого вопроса см. в п. 4.3). Прежде всего, по теореме 10, примененной в случае $\Phi(x) = x^p$, это пространства L_p для всех $1 \leq p < \infty$. Более того, аналогичное свойство имеют максимальные симметричные пространства (см. раздел 2), содержащие L_p для некоторого $p < \infty$ [39; теорема 1.2] (и в частности, если нижний индекс Бойда пространства X нетривиален, т.е. $\alpha_X > 0$). В то же время последнее условие не является необходимым; так, экспоненциальное пространство Орлича $\exp L_p$ ($p > 0$) имеет свойство Круглова, если и только если $0 < p \leq 1$. Последнее утверждение является следствием теоремы 10, а также рассуждений из начала п. 2.4 монографии [39] (более точные результаты см. далее в п. 4.3.1).

Свойство Круглова оказалось чрезвычайно полезным средством при изучении целого ряда геометрических свойств банаховых пространств измеримых функций, играя, в частности, центральную роль в монографии [39]. Причина в том, что при некотором дополнительном условии на последовательность независимых функций это свойство гарантирует выполнение неравенств вида (27) и (28).

ТЕОРЕМА 11 [39; лемма 1.4]. Пусть симметричное пространство X имеет свойство Круглова. Тогда для произвольной последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ такой, что

$$\sum_{k=1}^\infty \lambda\{f_k \neq 0\} \leq 1, \tag{31}$$

выполнено:

$$\left\| \sum_{k=1}^\infty f_k \right\|_X \leq C\|\mathbf{f}\|_X, \tag{32}$$

где $C > 0$ зависит только от X .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Так как ввиду (31) $\{\mathbf{f} \neq 0\} \subset [0, 1]$, то по сравнению с неравенствами (27) и (28) правая часть обобщенного неравенства Розенталя в этом случае значительно упрощается и при его доказательстве достаточно ограничиться рассмотрением неотрицательных функций.

Важно отметить, что для максимальных симметричных пространств верно и обратное утверждение [39; лемма 1.6]: если для произвольной последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$, удовлетворяющей условию (31), выполнено (32), то $X \in \mathbb{K}$. Эти результаты подсказывают, как могут быть получены необходимые и достаточные условия, при которых в симметричном пространстве X справедливы неравенства (27) и (28). Главная проблема, возникающая при этом, состоит в распространении теоремы 11 на общие последовательности независимых функций (как неотрицательных, так и имеющих нулевое среднее), т. е. в отказе от условия (31). Она была решена авторами настоящего обзора [42], [43] на основе операторного подхода. На пространстве всех п. в. конечных измеримых по Лебегу на $[0, 1]$ функций был определен линейный положительный оператор $\mathcal{K}$, тесно связанный со свойством Круглова (и поэтому названный там также оператором Круглова). Введенное понятие, во-первых, позволило использовать многочисленные преимущества операторного языка, например, применять теорию интерполяции операторов. Во-вторых, оказалось возможным рассмотреть более общую ситуацию, когда нормы в левой и правой частях неравенств (27) и (28) берутся в разных пространствах. И наконец, удалось достаточно естественно и просто решить вопрос о точности (по порядку) констант в неравенствах типа Розенталя [44]. В заключение этого пункта приведем детальное изложение этой конструкции, с помощью которой далее будут получены практически окончательные результаты о сравнении сумм независимых и дизъюнктивных функций в симметричных пространствах.

Определим сначала вспомогательный оператор $\mathcal{K}_1$ со значениями в пространстве $S(\Omega, \mathcal{P})$, где $(\Omega, \mathcal{P}) := \prod_{k=0}^{\infty} ([0, 1], \lambda_k)$ (λ_k – мера Лебега на $[0, 1]$, $k = 0, 1, \dots$). Пусть $\{E_n\}$ – последовательность попарно дизъюнктивных подмножеств отрезка $[0, 1]$, $\lambda(E_n) = 1/(en!)$ ($n \in \mathbb{N}$). Для произвольной $f \in S([0, 1], \lambda)$ положим

$$\mathcal{K}_1 f(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots) := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n f(\omega_k) \chi_{E_n}(\omega_0).$$

Хорошо известно, что существует сохраняющее меру отображение $\delta: (\Omega, \mathcal{P}) \rightarrow ([0, 1], \lambda)$. Для каждой $g \in S(\Omega, \mathcal{P})$ определим $R(g)(x) := g(\delta^{-1}x)$, $x \in [0, 1]$. Легко видеть, что

$$\lambda\{x \in [0, 1] : R(g)(x) < t\} = \mathcal{P}\{\omega \in \Omega : g(\omega) < t\} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Поэтому $\mathcal{K} := R\mathcal{K}_1$ – положительный линейный оператор, действующий в пространстве $S([0, 1], \lambda)$, причем для любой измеримой на $[0, 1]$ функции f распределения функций $\mathcal{K}f$ и $\mathcal{K}_1f$ одинаковы.

Так как мы рассматриваем симметричные пространства, то для нас важно лишь распределение функции $\mathcal{K}f$, в связи с чем на определение оператора $\mathcal{K}$ можно смотреть с несколько иной (и зачастую более удобной точки зрения). Если $f \in S([0, 1], \lambda)$ и $\{f_{n,k}\}_{k=1}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) – последовательность наборов функций, измеримых на $[0, 1]$, такая, что для каждого $n \in \mathbb{N}$

(i) $f_{n,1}, \dots, f_{n,n}, \chi_{E_n}$ – последовательность независимых с.в.,

(ii) $\mathcal{F}_{f_{n,k}} = \mathcal{F}_f$, $k = 1, \dots, n$,

то положим

$$\mathcal{K}'f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n f_{n,k}(x) \chi_{E_n}(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (33)$$

Непосредственная проверка показывает, что с.в. $\mathcal{K}f$ и $\mathcal{K}'f$ одинаково распределены. Поэтому оператор $\mathcal{K}$ можно в определенном смысле отождествлять с $\mathcal{K}'$.

Первый простой результат, относящийся к оператору $\mathcal{K}$, является непосредственным следствием теоремы о замкнутом графике.

ЛЕММА 6. *Если X и Y – такие симметричные пространства на $[0, 1]$, что $\mathcal{K}f \in Y$ для каждой $f \in X$, то для некоторого $C > 0$ выполнено: $\|\mathcal{K}f\|_Y \leq C\|f\|_X$.*

Так как для произвольной $f \in S(0, 1)$ имеет место равенство $\mathcal{F}_{\mathcal{K}'f}(x) = \mathcal{F}_{\pi(f)}(x)$ ($x \in \mathbb{R}$), то из (30) получаем, что

$$\theta_{\mathcal{K}f}(t) = \theta_{\mathcal{K}'f}(t) = \theta_{\pi(f)}(t) = \exp(\theta_f(t) - 1) \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (34)$$

Последнее замечание, а также определение свойства Круглова приводят к следующему утверждению, которое в дальнейшем будет постоянно использоваться.

ЛЕММА 7. *Если X – произвольное симметричное пространство на $[0, 1]$, то $X \in \mathbb{K}$ тогда и только тогда, когда оператор $\mathcal{K}$ ограниченно действует в X .*

4.3. Ограниченность оператора Круглова в симметричных пространствах. Как будет доказано в следующем разделе, ограниченность оператора Круглова в симметричном пространстве гарантирует выполнение в нем обобщенных неравенств Розенталя (отчасти это показывают уже теорема 11 и лемма 7). Прежде всего, мы уточним результаты [39] об ограниченности оператора $\mathcal{K}$ в экспоненциальных пространствах Орлича. Кроме того, будут найдены необходимые и достаточные условия его ограниченности в пространствах Лоренца, из которых вытекает ряд интересных следствий. В частности, мы покажем, что ограниченность оператора Круглова – это весьма деликатное свойство, которое нельзя охарактеризовать в терминах вложений так, как, например, справедливость неравенств Хинчина в симметричном пространстве (см. начало раздела 7 или, подробнее, [66]). Естественный, казалось бы, “рубикон” – пространство Орлича $\exp L_1$ – на самом деле, таковым не является:

оператор Круглова может быть ограничен в симметричном пространстве, содержащемся в $\exp L_1$, и не ограничен в симметричном пространстве, содержащем $\exp L_1$.

4.3.1. Экспоненциальные пространства Орлича. Действие оператора Круглова в пространствах $\exp L_p$ (определение см. в разделе 2) может быть изучено достаточно полно. Результаты, полученные здесь, будут неоднократно применяться в дальнейшем. Напомним, что $\exp L_\infty := L_\infty$.

Уже ввиду теоремы 10 включение $\exp L_p \in \mathbb{K}$ выполнено при $0 < p \leq 1$. Следовательно, по лемме 7 в этом случае оператор Круглова ограничен в пространстве $\exp L_p$. В то же время, если $p > 1$, то пространство $\exp L_p$ не имеет свойства Круглова (см. рассуждения из начала § 2.4 монографии [39]), и оператор $\mathcal{K}$ не действует в нем. Мы уточним здесь последнее утверждение, определив наименьшее симметричное пространство, содержащее образ $\mathcal{K}(\exp L_p)$ для $p > 1$. Для этого нам понадобится еще одно семейство функций Орлича на $[0, \infty)$:

$$M_p(t) := e^{t \ln^{1/p}(e+t)} - 1 \quad (p > 0).$$

Далее неоднократно будет использоваться тот факт, что для каждого $p > 0$ пространство L_{M_p} (соответственно L_{N_p}) совпадает с пространством Марцинкевича M_{ψ_p} (соответственно M_{φ_p}), где

$$\psi_p(t) := \frac{t \ln(e/t)}{\ln^{1/p}(\ln(e^e/t))} \quad (\text{соответственно } \varphi_p(t) := t \ln^{1/p}(e/t)).$$

Для его доказательства нам потребуются следующие эквивалентные выражения для норм пространств Марцинкевича M_{ψ_p} и M_{φ_p} [16; теорема 2.5.3]:

$$\begin{aligned} \|x\|_{M_{\psi_p}} &\asymp \sup_{t \in (0,1)} \frac{t}{\psi_p(t)} x^*(t), & (x \in M_{\psi_p}), \\ \|x\|_{M_{\varphi_p}} &\asymp \sup_{t \in (0,1)} \frac{t}{\varphi_p(t)} x^*(t) & (x \in M_{\varphi_p}). \end{aligned} \tag{35}$$

ЛЕММА 8. *Для произвольного $p > 0$ выполнены равенства $L_{M_p} = M_{\psi_p}$ и $(\exp L_p) = L_{N_p} = M_{\varphi_p}$ (с эквивалентностью норм).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем лишь первое из равенств, так как доказательство второго аналогично (и несколько проще). Пусть $p > 0$. Достаточно показать, что фундаментальные функции $\phi_{L_{M_p}}$ и $\phi_{M_{\psi_p}}$ рассматриваемых пространств эквивалентны, а также что функция $\bar{f}_p(t) := \psi_p(t)/t$ принадлежит пространству Орлича L_{M_p} (см. (35)). Так как ввиду [20] и [16; гл. 2, § 5]

$$\phi_{L_{M_p}}(t) = \frac{1}{M_p^{-1}(1/t)} \quad \text{и} \quad \phi_{M_{\psi_p}}(t) = \frac{\ln^{1/p}(\ln(e^e/t))}{\ln(e/t)} \quad \left(= \frac{1}{\bar{f}_p(t)} \right) \quad (0 < t \leq 1),$$

то для проверки первого из утверждений достаточно показать, что функции $M_p^{-1}(1/t)$ и $\bar{f}_p(t)$ эквивалентны в некоторой окрестности нуля. Легко видеть, что для каждого $c > 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln^{1/p}(e + c \ln(e/t) / \ln^{1/p}(\ln(e^e/t)))}{\ln^{1/p}(\ln(e^e/t))} = 1.$$

Поэтому можно выбрать такое $\delta > 0$, что для всех $t \in (0, \delta)$

$$M_p\left(\frac{1}{2}\bar{f}_p(t)\right) \leq e^{2\ln(e/t)/3} \leq \frac{1}{t} \leq e^{3\ln(e/t)/2} \leq M_p(2\bar{f}_p(t)). \quad (36)$$

Тем самым, функции $M_p^{-1}(1/t)$ и $\bar{f}_p(t)$ эквивалентны на $(0, \delta)$. Кроме того, из первого неравенства слева в (36) следует: $\bar{f}_p \in L_{M_p}$. Лемма доказана.

Следующее утверждение показывает важность пространства L_{M_1} в изучении сумм равномерно ограниченных независимых с. в. (см. в связи с этим следствие 3.5.2 в [45]).

ТЕОРЕМА 12. *Пространство L_{M_1} минимально среди таких симметричных пространств Y , что оператор Круглова $\mathcal{K}$ ограничен из L_∞ в Y .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g := \mathcal{K}\chi_{[0,1]}$. Из определения оператора $\mathcal{K}$ (см. также (33)) следует, что

$$g^*(t) = k \quad (t_k < t < t_{k-1}), \quad \text{где } t_k := \frac{1}{e} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{i!} \quad (k \in \mathbb{N}) \text{ и } t_0 = 1.$$

Так как по лемме 8 пространство L_{M_1} совпадает с пространством Марцинкевича M_{ψ_1} , для нормы которого выполнено соотношение (35), то достаточно доказать лишь то, что функции $g^*(t)$ и $\bar{f}_1(t) = \ln(e/t)/\ln \ln(e^e/t)$ эквивалентны в окрестности нуля. Так как $\bar{f}_1$ убывает на $(0, 1)$, а $g^* \equiv k$ на каждом интервале (t_{k-1}, t_k) ($k \in \mathbb{N}$), то для этого, в свою очередь, достаточно показать, что

$$\frac{1}{2} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\bar{f}_1(t_{k-1})}{k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\bar{f}_1(t_k)}{k} \leq 1.$$

Прежде всего, для каждого $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} k!t_k &= \frac{1}{e} \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2) \cdots (k+i)} \right) \\ &\leq \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{k+1} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(k+i)(k+i+1)} \right) \leq \frac{1}{e} \left(1 + \frac{2}{k+1} \right) \leq \frac{2}{e}, \end{aligned}$$

откуда $1/(ek!) \leq t_k \leq 2/(ek!)$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Так как по формуле Стирлинга $k! \asymp \sqrt{2\pi k} k^k e^{-k}$, то тем самым для достаточно больших k справедливо неравенство $k^{-k} \leq t_k < t_{k-1} \leq (k-1)^{-k/2}$. В итоге элементарные вычисления показывают, что

$$\frac{1}{2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\bar{f}_1((k-1)^{-k/2})}{k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\bar{f}_1(t_{k-1})}{k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\bar{f}_1(t_k)}{k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\bar{f}_1(k^{-k})}{k} = 1.$$

Теорема доказана.

Результат теоремы 12 распространяется на все значения $p \in (1, \infty)$.

ТЕОРЕМА 13. *Для произвольного $p \in (1, \infty)$ пространство L_{M_q} , где $1/p + 1/q = 1$, минимально среди таких симметричных пространств Y , что оператор Круглова $\mathcal{K}$ ограничен из $\exp L_p$ в Y .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теорем 10 и 12, а также леммы 7 следует, что оператор $\mathcal{K}$ ограниченно действует из L_∞ в L_{M_1} и ограничен в пространстве $\exp L_1 (= L_{N_1})$. Применяя вещественный метод интерполяции (см. раздел 2 или [21; гл. 3]), получим, что

$$\mathcal{K} : (L_\infty, L_{N_1})_{\theta, \infty} \rightarrow (L_{M_1}, L_{N_1})_{\theta, \infty} \quad (0 < \theta < 1).$$

По лемме 8 пространства Орлича L_{N_1} и L_{M_1} совпадают с пространствами Марцинкевича M_{φ_1} и M_{ψ_1} соответственно. Аналогичное свойство имеет и пространство L_∞ , а именно, $L_\infty = M_{\text{id}}$, где $\text{id}(t) = t$ ($t \in [0, 1]$). Поэтому, согласно известному описанию пространств вида $(M_\varphi, M_\psi)_{\theta, \infty}$ (см. [46; пример 7.1.3]),

$$(L_\infty, L_{N_1})_{\theta, \infty} = L_{N_{\theta-1}}, \quad (L_{M_1}, L_{N_1})_{\theta, \infty} = L_{M_{(1-\theta)-1}}.$$

Полагая $p = \theta^{-1}$, отсюда сразу заключаем, что $\mathcal{K}$ непрерывен из $\exp L_p = L_{N_p}$ в L_{M_q} . Таким образом, ввиду соотношений (35) доказательство будет закончено, как только мы покажем, что для некоторой константы $C > 0$ (возможно, зависящей от p) и всех достаточно малых $t > 0$ выполнено $h_0(t) \leq C(\mathcal{K}g_0)^*(t)$, где $g_0(t) := \ln^{1/p}(e/t)$ и $h_0(t) := \ln(e/t)/\ln^{1/q}(\ln(e^e/t))$. Так как $h_0 = h_0^*$, то последнее неравенство справедливо, если и только если для некоторого $C > 0$ и всех достаточно больших $\tau > 0$ мы имеем

$$\lambda \left\{ \mathcal{K}g_0 > \frac{\tau}{C} \right\} \geq \lambda \{h_0 > \tau\}.$$

Так как $\lambda \{h_0 > \tau\} \leq e^{-\tau \ln^{1/q} \tau}$, а $\lambda \{\mathcal{K}g_0 > \tau/3\} \geq e^{-\tau \ln^{1/q} \tau}$, если τ достаточно велико (подробнее см. доказательство теоремы 4.5 в [42]), то теорема доказана.

В заключение приведем одно полезное необходимое условие ограниченности оператора Круглова. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим $\ln_n u := \ln \dots \ln u$ (n раз) и $\Phi_n(u) := \exp(u \ln_n(c_n + u)) - 1$, где константа c_n выбрана так, что $\ln_n c_n = 1$. Применяя те же рассуждения, что и в доказательстве леммы 8, нетрудно проверить, что пространство Орлича L_{Φ_n} совпадает с пространством Марцинкевича M_{φ_n} , построенным по функции

$$\varphi_n(u) := \frac{u \ln(e/u)}{\ln_{n+1}(e^{c_n}/u)}, \quad u \in (0, 1].$$

Действуя примерно так же, как в доказательстве теоремы 13, приходим к следующему результату (подробнее см. [42; теорема 7.2]).

ТЕОРЕМА 14. Если оператор $\mathcal{K}$ ограничен в симметричном пространстве X , то $L_{\Phi_n} \subset X$ для каждого $n \in \mathbb{N}$.

В качестве следствия докажем следующее утверждение, которое далее будет неоднократно использоваться.

ТЕОРЕМА 15. Предположим, что оператор $\mathcal{K}$ ограничен в симметричном пространстве X . Тогда $\mathcal{K}$ ограничен в $X_\circ$, где $X_\circ$ – сепарабельная часть X (см. раздел 2). При этом $\|\mathcal{K}\|_{X_\circ \rightarrow X_\circ} \leq \|\mathcal{K}\|_{X \rightarrow X}$.

В частности, если X сепарабельно и оператор $\mathcal{K}$ ограничен во втором двойственном $X^{\times \times}$, то $\mathcal{K}$ ограничен в X и $\|\mathcal{K}\|_{X \rightarrow X} \leq \|\mathcal{K}\|_{X^{\times \times} \rightarrow X^{\times \times}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку, не ограничивая общности, можно считать, что $X \neq L_\infty$, то $X_\circ$ сепарабельно. Пусть $x \in X_\circ$. Тогда найдется такая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset L_\infty$, что $\|x_n - x\|_X \rightarrow 0$. Так как

$$\|\mathcal{K}x_n - \mathcal{K}x\|_X = \|\mathcal{K}(x_n - x)\|_X \leq \|\mathcal{K}\|_{X \rightarrow X} \|x_n - x\|_X,$$

то

$$\|\mathcal{K}x_n - \mathcal{K}x\|_X \rightarrow 0, \quad \text{если } n \rightarrow \infty. \quad (37)$$

С одной стороны, по теореме 12 выполнено $\mathcal{K}x_n \in L_{M_1}$ ($n = 1, 2, \dots$). С другой стороны, легко проверить, что $L_{M_1} \subset (L_{\Phi_2})_\circ$, а поскольку по теореме 14 $L_{\Phi_2} \subset X$, то $X_\circ \supset (L_{\Phi_2})_\circ \supset L_{M_1}$. Таким образом, $\mathcal{K}x_n \in X_\circ$ ($n = 1, 2, \dots$), откуда ввиду (37) получаем, что $\mathcal{K}x \in X_\circ$. Так как $X_\circ$ – подпространство X , то $\|\mathcal{K}\|_{X_\circ \rightarrow X_\circ} \leq \|\mathcal{K}\|_{X \rightarrow X}$.

Второе утверждение теоремы – непосредственное следствие первого, так как по условию $X = X_\circ = (X^{\times \times})_\circ$.

4.3.2. *Пространства Лоренца.* Следующая теорема, доказанная в работе [42], полностью характеризует пространства Лоренца (определение см. в разделе 2), в которых ограничен оператор Круглова. Напомним, что Ψ – множество всех квазивогнутих на $[0, 1]$ функций $\psi(t)$, удовлетворяющих условиям: $\psi(0) = \psi(+0) = 0$ и $\psi(1) = 1$.

ТЕОРЕМА 16. Пусть $\psi \in \Psi$. Оператор $\mathcal{K}$ ограниченно действует в пространстве Лоренца Λ_ψ тогда и только тогда, когда для некоторого $C > 0$ выполнено:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi\left(\frac{u^k}{k!}\right) \leq C\psi(u) \quad (0 < u \leq 1). \quad (38)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначив $f := \chi_{(0,u]}$ ($u \in (0, 1]$), предположим, что последовательности $\{f_{n,k}\}_{k=1}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) и $\{\chi_{E_k}\}_{k=1}^\infty$ удовлетворяют условиям (i) и (ii) из определения оператора $\mathcal{K}'$ (см. (33)). Тогда функция $f_n := \sum_{k=1}^n f_{n,k}$ имеет биномиальное распределение с параметром u , т. е.

$$\lambda\{f_n = k\} = C_n^k u^k (1-u)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $C_n^k = n!/(k!(n-k)!)$. Следовательно, $\mathcal{K}f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k\chi_{A_k}(s)$ и

$$\begin{aligned} \lambda(A_k) &= \sum_{n=k}^{\infty} C_n^k u^k (1-u)^{n-k} \lambda(E_n) = \frac{1}{e} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} u^k (1-u)^{n-k} \frac{1}{n!} \\ &= \frac{1}{e} \frac{u^k}{(1-u)^k k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(1-u)^n}{(n-k)!} = \frac{1}{e} \frac{u^k (1-u)^k}{(1-u)^k k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-u)^n}{n!} = e^{-u} \frac{u^k}{k!}. \end{aligned}$$

Это равенство показывает, что функция $\mathcal{K}f$ имеет распределение Пуассона с параметром u , совпадающее с распределением функции

$$h(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{(0,\tau_k]}(s), \quad s \in [0, 1],$$

где $\tau_k := e^{-u} \sum_{i=k}^{\infty} u^i / i!$ ($k \in \mathbb{N}$). Поэтому

$$\|\mathcal{K}f\|_{\Lambda_\psi} = \|h\|_{\Lambda_\psi} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\tau_k} d\bar{\psi}(s) \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \psi(\tau_k), \quad (39)$$

где $\bar{\psi}$ – наименьшая вогнутая мажоранта функции ψ (см. раздел 2). Так как $\mathcal{K}$ – положительный оператор, ограниченно действующий из Λ_ψ в пространство $S(0,1)$, а крайние точки положительной части единичной сферы пространства Λ_ψ – это нормированные характеристические функции измеримых подмножеств $[0,1]$, то ограниченность $\mathcal{K}$ в Λ_ψ эквивалентна ограниченности этого оператора на множестве всех таких функций (см. следствие 1 леммы 4.5.2 в [16]). Таким образом, из (39) следует, что $\mathcal{K}$ ограничен в Λ_ψ , если и только если для некоторого $C > 0$ выполнено:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(\tau_k) \leq C\psi(u) \quad (0 < u \leq 1).$$

Нетрудно показать (см. доказательство теоремы 12), что $e^{-1}u^k/k! \leq \tau_k \leq 2u^k/k!$ ($k \in \mathbb{N}$). Тем самым, поскольку функция ψ квазивогнута, предыдущее неравенство эквивалентно соотношению (38). Теорема доказана.

Доказательство следующего утверждения аналогично, и поэтому мы его опускаем (см. замечание 5.2 в [42]).

ТЕОРЕМА 17. Пусть $\psi \in \Psi$. Оператор $\mathcal{K}$ ограниченно действует из пространства Лоренца Λ_ψ в пространство Марцинкевича $M_{t/\psi(t)}$ (или, на языке теории интерполяции операторов [16; гл. 2, § 6], $\mathcal{K}$ – оператор слабого типа (ψ, ψ)), тогда и только тогда, когда

$$\sup_{u \in (0,1], k \in \mathbb{N}} \frac{k\psi(u^k/k!)}{\psi(u)} < \infty. \quad (40)$$

Далее мы приведем ряд следствий из теорем 16 и 17. Прежде всего, как уже говорилось, ввиду теоремы 14 возникает естественная гипотеза о том, что $\text{exp } L_1$ (точнее, его сепарабельная часть) – минимальное симметричное пространство, в котором ограничен оператор Круглова. В п. 4.3.3 будет показано, что это не так: мы приведем пример обладающих этим свойством пространств Марцинкевича, более узких, чем $\text{exp } L_1$. Здесь же мы покажем, что, тем не менее, все пространства Лоренца со свойством Круглова лежат “по одну сторону” от пространства $\text{exp } L_1$ [5; теорема 4].

ТЕОРЕМА 18. Пусть $\psi \in \Psi$. Если $\Lambda_\psi \in \mathbb{K}$, то $\Lambda_\psi \supset \text{exp } L_1$.

Докажем сначала следующую лемму.

ЛЕММА 9. Если функция $\psi \in \Psi$ удовлетворяет условию (38), то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(2^{-k}) \leq A\psi(1), \quad (41)$$

где $A > 0$ зависит лишь от константы C из (38).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду (38), $\sum_{j=1}^{\infty} \psi(2^{-ij} j^{-j}) \leq C\psi(2^{-i})$ ($i \in \mathbb{N}$), или

$$\sum_{j=1}^{\infty} \psi(2^{-j(i+\lceil \log_2 j \rceil)}) \leq C\psi(2^{-i}) \quad (i \in \mathbb{N}). \quad (42)$$

Прямые оценки показывают, что величина

$$\alpha_n := \text{card}\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : j(i + \lceil \log_2 j \rceil) \leq n\}$$

удовлетворяет соотношению $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \alpha_n = \infty$. Поэтому существует такое $m \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq m$ выполнено неравенство $\alpha_n \geq (C+1)n$. Так как ψ возрастает, то отсюда и из (42) для произвольного $l > m$ следует:

$$(C+1) \sum_{n=m}^l \psi(2^{-n}) \leq \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{\infty} \psi(2^{-j(i+\lceil \log_2 j \rceil)}) \leq C \sum_{i=1}^l \psi(2^{-i}),$$

откуда

$$\sum_{n=m}^l \psi(2^{-n}) \leq C \sum_{i=1}^{m-1} \psi(2^{-i}).$$

Неравенство (41) является теперь непосредственным следствием того, что $l > m$ произвольно, а m не зависит от ψ . Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 18. Так как по условию $\Lambda_\psi \in \mathbb{K}$, то ввиду теоремы 16 для функции ψ выполнено (38). Применяя лемму 9, получаем (41). Кроме того, ввиду леммы 8 и соотношения (35)

$$\|x\|_{\exp L_1} \asymp \sup_{0 < t \leq 1} x^*(t) \log_2^{-1} \left(\frac{2}{t} \right),$$

и значит, теорема будет доказана, если показать, что $\log_2(2/t) \in \Lambda_\psi$. Действительно,

$$\begin{aligned} \left\| \log_2 \frac{2}{t} \right\|_{\Lambda_\psi} &= \int_0^1 \log_2 \frac{2}{t} d\bar{\psi}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} \log_2 \frac{2}{t} d\bar{\psi}(t) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)(\bar{\psi}(2^{-k+1}) - \bar{\psi}(2^{-k})) \leq 4 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \psi(2^{-k}) < \infty. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 17 позволяет дать прямое (и достаточно короткое) доказательство того, что при выполнении условия $X \supset L_p$ для некоторого $p < \infty$ сепарабельное или максимальное симметричное пространство X имеет свойство Круглова. В случае максимальных пространств этот результат был известен ранее (см. [39; теорема 1.2]), однако в его доказательстве в [39] используется теорема 9 Джонсона–Шехтмана.

ТЕОРЕМА 19. Если симметричное пространство X содержит пространство L_p для некоторого $p \in [1, \infty)$, то оператор $\mathcal{H}$ ограниченно действует в пространстве $X^{\times \times}$. В частности, если X сепарабельно или максимально, то $\mathcal{H}$ ограничен в X .

Нам здесь также понадобится следующая техническая лемма.

ЛЕММА 10 [47; лемма 11]. Если ψ – возрастающая вогнутая функция на $[0, 1]$ такая, что $\psi(0) = \psi(+0) = 0$, $\psi(1) = 1$ и $\psi(t) \leq at^{1/p}$ для всех $t \in [0, 1]$ и некоторых $p, a \in [1, \infty)$, то

$$\sup_{0 < u \leq 1} \frac{1}{\psi(u)} \sum_{k=1}^{\infty} \psi\left(\frac{u^k}{k!}\right) \leq 5ap.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 19. По определению второго ассоциированного пространства

$$X^{\times \times} = \bigcap \Lambda_{\psi_y} \quad \text{и} \quad \|x\|_{X^{\times \times}} = \sup \|x\|_{\Lambda_{\psi_y}}, \quad (43)$$

где пересечение и супремум берутся по всем функциям ψ_y вида

$$\psi_y(t) = \int_0^t y^*(s) ds \quad (0 < t \leq 1), \quad y \in X^{\times}, \quad \|y\|_{X^{\times}} \leq 1.$$

Следуя [47], положим

$$\theta_y(t) := \frac{\psi_y(t) + t}{\|y\|_1 + 1} \quad (0 < t \leq 1), \quad y \in X^{\times}, \quad \|y\|_{X^{\times}} \leq 1. \quad (44)$$

Очевидно, что θ_y – возрастающая вогнутая функция на $[0, 1]$ такая, что $\theta_y(0) = \theta_y(+0) = 0$ и $\theta_y(1) = 1$ для всех $y \in X^{\times}$. Если $\|y\|_{X^{\times}} \leq 1$, то по двойственности

$$\|y\|_1 = \int_0^1 |y(t)| dt \leq \phi_X(1) \|y\|_{X^{\times}} \leq 1,$$

и тогда для каждой $x \in X^{\times \times}$ выполнено неравенство $\|x\|_{\Lambda_{\psi_y}} \leq 2\|x\|_{\Lambda_{\theta_y}}$. С другой стороны, ввиду (43) и равенства $\phi_{X^{\times}}(x) = 1/\phi_X(x)$ [16; равенство (2.4.39)]

$$\begin{aligned} \|x\|_{\Lambda_{\theta_y}} &\leq \|x\|_{\Lambda_{\psi_y}} + \|x\|_1 \leq \|x\|_{\Lambda_{\psi_y}} + \phi_{X^{\times}}(1) \|x\|_{X^{\times \times}} \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{\phi_X(1)}\right) \|x\|_{X^{\times \times}} = 2\|x\|_{X^{\times \times}}. \end{aligned}$$

Из последних соотношений, а также из (43) следует, что

$$X^{\times \times} = \bigcap \Lambda_{\theta_y}, \quad \|x\|_{X^{\times \times}} \asymp \sup \|x\|_{\Lambda_{\theta_y}}, \quad (45)$$

где пересечение и супремум берутся по всем θ_y вида (44).

Далее, так как $L_p \subset X$, то $X^{\times} \subset L_p^{\times} = L_q$, где $q = p/(p-1)$. Следовательно, для некоторого $a > 0$

$$\theta_y(t) \leq \int_0^t y^*(s) ds + t \leq \|y\|_q t^{1/p} + t \leq a\|y\|_{X^{\times}} t^{1/p} + t \leq (a+1)t^{1/p} \quad (0 < t \leq 1).$$

Тем самым из леммы 10, теоремы 16 и ее доказательства следует, что оператор $\mathcal{K}$ ограничен в пространстве Лоренца Λ_{θ_y} , если $\|y\|_{X^\times} \leq 1$, и, кроме того,

$$\sup_{\|y\|_{X^\times} \leq 1} \|\mathcal{K}\|_{\Lambda_{\theta_y} \rightarrow \Lambda_{\theta_y}} = C < \infty.$$

Таким образом, ввиду (45) для каждого $x \in X^{\times \times}$ имеем:

$$\|\mathcal{K}x\|_{X^{\times \times}} \asymp \sup_{\|y\|_{X^\times} \leq 1} \|\mathcal{K}x\|_{\Lambda_{\theta_y}} \leq C \sup_{\|y\|_{X^\times} \leq 1} \|x\|_{\Lambda_{\theta_y}} \asymp \|x\|_{X^{\times \times}},$$

и первое утверждение теоремы доказано. Если X максимально, то второе утверждение очевидно, а если X сепарабельно, то нужно применить теорему 15. Теорема доказана.

Как уже отмечалось, утверждение, обратное к утверждению последней теоремы, неверно: существуют симметричные пространства со свойством Круглова, не содержащие пространств L_p с $p < \infty$. В первую очередь, это экспоненциальные пространства Орлича $\exp L_p$ при $0 < p \leq 1$. Операторный подход и теория интерполяции дают достаточно общий метод для получения подобных примеров.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть ρ – квазивогнутая функция на $[0, 1]$ и $\psi(t) := \rho(t \ln(e/t))$. Если $\tilde{\psi}(t) := t/\psi(t)$ ($0 < t \leq 1$), то пространство Марцинкевича $M_{\tilde{\psi}}$ имеет свойство Круглова.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\ell_\infty(1/\rho)$ пространство всех двусторонних последовательностей $a = \{a_k\}_{k=-\infty}^\infty$ с нормой

$$\|a\|_{\ell_\infty(1/\rho)} := \left\| \left\{ \frac{a_k}{\rho(2^k)} \right\}_{k=-\infty}^\infty \right\|_{\ell_\infty}.$$

Так как ввиду теоремы 10 оператор $\mathcal{K}$ ограничен в L_1 и в L_{N_1} , то он ограничен в пространстве $(L_1, L_{N_1})_{\ell_\infty(1/\rho)}^K$, полученном вещественным методом интерполяции (см. раздел 2). Рассматривая L_1 и L_{N_1} как пространства Марцинкевича и применяя [46; пример 7.1.3] (ср. с доказательством теоремы 13), мы получаем, что $(L_1, L_{N_1})_{\ell_\infty(1/\rho)}^K = M_{\tilde{\psi}}$. Предложение доказано.

Приведем еще одно следствие теоремы 17, которое показывает, что ограниченность оператора Круглова в симметричном пространстве не может быть охарактеризована с помощью вложений. Точнее, не существует такого симметричного пространства X , что этот оператор ограничен в симметричном пространстве Y тогда и только тогда, когда $Y \subseteq X$.

ТЕОРЕМА 20. Предположим, что функция $\varphi \in \Psi$ такова, что для каждого $\alpha \in (0, 1]$ выполнено: $\sup_{t \in (0, 1]} t^{-\alpha} \varphi(t) = \infty$. Тогда существует такая $\psi \in \Psi$, $\psi \leq \varphi$, что оператор $\mathcal{K}$ не ограничен ни в одном симметричном пространстве X с фундаментальной функцией ψ .

Начнем с леммы, которая будет использоваться и в дальнейшем.

ЛЕММА 11. Пусть функция $\varphi \in \Psi$ обладает следующим свойством: для каждой $\psi \in \Psi$ такой, что $\psi \leq \varphi$, выполнено условие (40). Тогда существуют $a \geq 1$ и $\alpha \in (0, 1]$, для которых $\varphi(t) \leq at^\alpha$ ($0 \leq t \leq 1$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы используем идею доказательства теоремы 14 из [47]. Предположим, что утверждение леммы неверно, т. е. $\sup_{0 < t \leq 1} \varphi(t)t^{-1/n} = \infty$ для каждого $n = 1, 2, \dots$. Тогда можно найти такую последовательность $t_n \downarrow 0$, что $t_1 = 1$ и

$$\varphi(t_n) \geq \frac{n\varphi(t_{n-1})}{t_{n-1}} t_n^{1/n} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Отсюда

$$\left(\frac{t_{n-1}}{\varphi(t_{n-1})} \varphi(t_n) \right)^n \geq n^n t_n > n! t_n. \quad (46)$$

Если $s_n := t_{n-1}\varphi(t_n)/\varphi(t_{n-1})$, то $t_n < s_n < t_{n-1}$ для всех $n = 2, 3, \dots$. Определим функцию

$$\psi(t) = \begin{cases} \varphi(t_n), & \text{если } t_n \leq t \leq s_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ \frac{t\varphi(t_{n-1})}{t_{n-1}}, & \text{если } s_n \leq t \leq t_{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots, \\ 0, & \text{если } t = 0. \end{cases}$$

Функция $\psi(t)$ квазивогнута на $[0, 1]$ и $\psi \leq \varphi$. Ввиду (46) верны равенства $\psi(s_n^n/n!) = \psi(t_n) = \psi(s_n)$, и поэтому условие (40) для этой функции не выполнено. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 20. По лемме 11 существует функция $\psi \in \Psi$, $\psi \leq \varphi$, которая не удовлетворяет условию (40). Тогда по теореме 17 оператор $\mathcal{K}$ не ограничен из пространства Лоренца Λ_ψ в пространство Марцинкевича $M_{t/\psi(t)}$. Так как первое из этих пространств – наименьшее из симметричных пространств с фундаментальной функцией ψ , а второе – наибольшее (см. раздел 2 или [16; теоремы 2.5.5 и 2.5.7]), то отсюда получаем нужное утверждение.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Непосредственное применение теоремы 20 к пространствам Лоренца показывает, что утверждение, обратное к утверждению теоремы 18, вообще говоря, не верно.

4.3.3. Пространства Марцинкевича, “близкие” к $\exp L_1$. Как уже не раз говорилось, пространство Орлича $\exp L_1$, построенное по функции $e^t - 1$, имеет свойство Круглова. По теореме 15 то же самое верно и для его сепарабельной части $(\exp L_1)_\circ$. Заметим, что все рассматривавшиеся до сих пор симметричные пространства X со свойством Круглова содержат последнее пространство. Это верно, например, для всех таких пространств Лоренца (см. теорему 18). Ввиду теоремы 14 возникает, казалось бы, естественная гипотеза о том, что $(\exp L_1)_\circ$ – минимальное симметричное пространство, в котором ограничен оператор Круглова. Тем не менее, в работе [5] эта гипотеза была опровергнута. Более того, там доказано, что для всякого симметричного пространства $X \in \mathbb{K}$ существует

пространство Марцинкевича $M_\psi \subsetneq X$, также обладающее свойством Круглова. Основную роль далее будет играть семейство пространств Марцинкевича, определяемое в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 21. *Существует семейство $\{M_{\psi_\varepsilon}\}_{0 < \varepsilon < 1}$ пространств Марцинкевича, $M_{\psi_\varepsilon} \subseteq M_{\psi_\delta}$ ($0 < \varepsilon \leq \delta < 1$), со следующими свойствами:*

- 1) $M_{\psi_\varepsilon} \in \mathbb{K}$, $0 < \varepsilon < 1$;
- 2) если X симметрично и $X \in \mathbb{K}$, то для всех достаточно малых ε мы имеем: $M_{\psi_\varepsilon} \subset X$;
- 3) функции ψ_ε попарно не эквивалентны, точнее,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi_\varepsilon(t)}{\psi_\delta(t)} = 0, \quad \text{если } 0 < \varepsilon < \delta < 1; \quad (47)$$

- 4) $M_{\psi_\varepsilon} \subsetneq (\exp L_1)_0$ для достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Для доказательства нам потребуется следующее простое утверждение.

ЛЕММА 12. *Если $f \in L_1[0, 1]$, то*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\text{supp } \mathcal{K}^n f) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как оператор $\mathcal{K}$ положителен, можно считать, что $f \geq 0$ и что $\lambda(\text{supp } f) = 1$. Тогда, если $a_n := \lambda\{t : \mathcal{K}^n f(t) = 0\}$ ($n \in \mathbb{N}$), то по определению оператора $\mathcal{K}$ (см. соотношение (33)) $a_1 = 1/e$ и

$$a_{n+1} = \frac{1}{e} + \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_n^k}{k!} = e^{a_n-1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Легко видеть, что последовательность $\{a_n\}$ возрастает и $a_n \in (0, 1)$. Так как $f(x) := e^{x-1} - x$ убывает на $[0, 1]$, то функция e^{x-1} имеет на этом отрезке единственную неподвижную точку $x = 1$. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, и утверждение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 21. Рассмотрим функции $h_n := (\mathcal{K}^n \chi_{[0,1]})^*$, $n \geq 0$. Так как оператор $\mathcal{K}$ переводит равноизмеримые функции в равноизмеримые, то

$$(\mathcal{K} h_n)^* = h_{n+1}. \quad (48)$$

Далее, по лемме 12 имеем $\lambda(\text{supp } h_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и значит, ряд

$$g_\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n h_n \quad (49)$$

сходится всюду на $(0, 1]$ для каждого $\varepsilon > 0$, а функция g_ε убывает. Кроме того, из определения оператора $\mathcal{K}$ (см. опять (33)) следует, что $\|\mathcal{K}\|_{L_1 \rightarrow L_1} = 1$. Поэтому, если $0 < \varepsilon < 1$, то ряд (49) сходится в L_1 и $g_\varepsilon \in L_1$. Покажем теперь, что утверждения теоремы справедливы для семейства $\{M_{\psi_\varepsilon}\}_{\varepsilon > 0}$, где

$$\psi_\varepsilon(t) = \int_0^t g_\varepsilon(s) ds \quad (0 \leq t \leq 1).$$

1) Докажем, что оператор $\mathcal{K}$ ограничен в M_{ψ_ε} . Так как крайние точки единичного шара в этом пространстве равноизмеримы с функцией g_ε [48], [49], то для этого достаточно показать, что $\mathcal{K}g_\varepsilon \in M_{\psi_\varepsilon}$. Ввиду ограниченности оператора $\mathcal{K}$ в L_1 имеем:

$$\mathcal{K}g_\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \mathcal{K}h_n \prec \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n h_{n+1} \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n h_n = \frac{1}{\varepsilon} g_\varepsilon,$$

где первое неравенство вытекает из (48) и хорошо известного свойства полупорядоченности Харди–Литтлвуда (см. раздел 2 и [16; гл. 2, § 2]). Отсюда следует, что $\mathcal{K}g_\varepsilon \in M_{\psi_\varepsilon}$.

2) Предположим теперь, что $X \in \mathbb{K}$. Тогда, в силу леммы 7 и теоремы 15, $\mathcal{K}: X_\circ \rightarrow X_\circ$. Поэтому $C = \|\mathcal{K}\|_{X_\circ \rightarrow X_\circ} < \infty$, откуда следует, что $\|h_n\|_X \leq C^n \|\chi_{[0,1]}\|_X = C^n$. Поэтому для всех $\varepsilon < C^{-1}$ ряд (49) сходится в $X_\circ$ и $g_\varepsilon \in X_\circ$. Кроме того, так как пространство $X_\circ$ сепарабельно, то из $x \in X_\circ$ и $y \prec x$ следует: $y \in X_\circ$ и $\|y\|_{X_\circ} \leq \|x\|_{X_\circ}$ (см. раздел 2 или [16; теоремы 2.4.3 и 2.4.10]). Таким образом, вместе с g_ε весь единичный шар пространства Марцинкевича M_{ψ_ε} содержится в $X_\circ$, откуда $M_{\psi_\varepsilon} \subset X_\circ \subset X$.

3) Пусть, как и ранее, функция g_ε определяется соотношением (49) и $0 < \varepsilon < \delta$. Нетрудно проверить (см. доказательство теоремы 7.2 в [42]), что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{h_{n+1}(t)}{h_n(t)} = \infty.$$

Поэтому для любого $m = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{g_\varepsilon(t)}{g_\delta(t)} &= \limsup_{t \rightarrow 0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n h_n(t) \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \delta^n h_n(t) \right)^{-1} = \dots \\ &= \limsup_{t \rightarrow 0} \left(\sum_{n=m}^{\infty} \varepsilon^n h_n(t) \right) \left(\sum_{n=m}^{\infty} \delta^n h_n(t) \right)^{-1} \leq \left(\frac{\varepsilon}{\delta} \right)^m. \end{aligned}$$

Тем самым $\lim_{t \rightarrow 0} g_\varepsilon(t)/g_\delta(t) = 0$, откуда следует (47).

4) Как уже говорилось, $\mathcal{K}$ ограниченно действует в пространстве $(\exp L_1)_\circ$. Поэтому достаточно применить уже доказанные утверждения 2) и 3).

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любого симметричного пространства $X \in \mathbb{K}$ существует такое симметричное пространство $Y \in \mathbb{K}$, что $Y \subsetneq X$.

5. Сравнение сумм независимых и дизъюнктивных функций в симметричных пространствах

Следующая теорема является уточнением теоремы 1 из [44] (см. также [42; теоремы 3.5 и 6.1]). Ее часть (ii) усиливает и дополняет неравенство Джонсона–Шехтмана (28), в то время как часть (i) показывает практически окончательный характер этого усиления. Через $\mathbf{f}$ всюду далее по-прежнему обозначается дизъюнктивная сумма, соответствующая последовательности $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, а через L_{M_p} – пространство Орлича, построенное по функции $M_p(t) := e^{t \ln^{1/p}(e+t)} - 1$ ($p > 0$).

ТЕОРЕМА 22. Пусть X и Y – такие симметричные пространства на $[0, 1]$, что $X \subseteq Y$.

(i) Предположим, что неравенство

$$\left\| \sum_{i=1}^n f_i \right\|_Y \leq C \|\mathbf{f}\|_{Z_X^1} \quad (= C \|\mathbf{f}\|_X) \quad (50)$$

справедливо для некоторого $C > 0$ и произвольной последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$, удовлетворяющей условию (31). Тогда оператор Круглова $\mathcal{K}$ ограничен из X в $Y^{\times \times}$ и $\|\mathcal{K}\|_{X \rightarrow Y^{\times \times}} \leq C$.

(ii) Если оператор $\mathcal{K}$ ограниченно действует из X в Y , то для каждой последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$ выполнено:

$$\left\| \sum_{i=1}^n f_i \right\|_Y \leq 8 \|\mathcal{K}\|_{X \rightarrow Y} \|\mathbf{f}\|_{Z_X^1}. \quad (51)$$

В доказательстве части (i) используется одно свойство слабой сходимости распределений. Напомним, что одно из эквивалентных условий слабой сходимости с.в. f_n к с.в. f состоит в поточечной сходимости соответствующих характеристических функций: $\theta_{f_n}(t) \rightarrow \theta_f(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$ (см., например, [50]).

ЛЕММА 13 [39; предложение 5]. Пусть X – максимальное симметричное пространство на $[0, 1]$ и $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset X$. Если f_n слабо сходятся к f и

$$\sup_{n=1,2,\dots} \|f_n\|_X = C < \infty,$$

то $f \in X$ и $\|f\|_X \leq C$.

В доказательстве части (ii) нам понадобится аналог известного неравенства Прохорова [51] для неотрицательных функций. Пусть последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ состоит из независимых функций, определенных на $[0, 1]$. Обозначим через $\{h_k\}_{k=1}^\infty$ такую последовательность независимых функций, что $\mathcal{F}_{h_k}(x) = \mathcal{F}_{f_k}(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) при всех $k = 1, 2, \dots$.

ЛЕММА 14. Если f_k независимы и неотрицательны, то для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$\lambda \left\{ \sum_{k=1}^n f_k \geq x \right\} \leq 2\lambda \left\{ \sum_{k=1}^n h_k \geq \frac{x}{2} \right\} \quad (x > 0). \quad (52)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно предполагать, что f_i определены на пространстве $\prod_{i=1}^n ([0, 1], \lambda_i)$, причем $f_i(t_1, \dots, t_n) = f_i(t_i)$ ($i = 1, \dots, n$). Так как $f_i \geq 0$, то из определения оператора Круглова следует, что $\mathcal{K} f_i \geq g_i$ для некоторой с.в. g_i , одинаково распределенной с функцией $\sigma_{1/2} f_i$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{K} f_i(t_i) \geq \sum_{i=1}^n g_i(t_i). \quad (53)$$

С другой стороны, ясно, что для каждого $i = 1, \dots, n$ функция f_i одинаково распределена с суммой $g_i + g'_i$, где g_i и g'_i дизъюнкты и одинаково распределены. Поэтому, если $\lambda^n = \prod_{i=1}^n \lambda_i$, то ввиду независимости и соотношения (53)

для каждого $x > 0$

$$\begin{aligned} \lambda^n \left\{ \sum_{i=1}^n f_i(t_i) > x \right\} &= \lambda^n \left\{ \sum_{i=1}^n (g_i(t_i) + g'_i(t_i)) > x \right\} \\ &\leq 2\lambda^n \left\{ \sum_{i=1}^n g_i(t_i) > \frac{x}{2} \right\} \leq 2\lambda^n \left\{ \sum_{i=1}^n \mathcal{K} f_i(t_i) > \frac{x}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Поскольку $\mathcal{K} f_i$ и h_i одинаково распределены, а h_i независимы, то (52) доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 22. (i) Мы следуем идее доказательства леммы 1.6 из [39]. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Для произвольной $f \in X$ выберем одинаково распределенную с ней функцию $h \in X$ так, что h и $\chi_{[0,1/n]}$ независимы. Тогда, как легко проверить, функция $h_n := h\chi_{[0,1/n]}$ будет одинаково распределена с функцией $\sigma_{1/n}f$. Рассмотрим набор $\{\chi_{[0,1/n]}, h_{n,k}\}_{k=1}^n$, состоящий из независимых функций, где $\mathcal{F}_{h_{n,k}}(x) = \mathcal{F}_{h_n}(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) для всех $1 \leq k \leq n$. Так как функции $\left| \sum_{k=1}^n h_{n,k} \right|$ и $|h|$ имеют одну и ту же функцию распределения, то аналогичное свойство имеют и функции $\left| \sum_{k=1}^n h_{n,k} \right|$ и $|f|$. Кроме того, набор $\{h_{n,k}\}_{k=1}^n$ удовлетворяет неравенству (31). Следовательно, по условию теоремы

$$\left\| \sum_{k=1}^n h_{n,k} \right\|_Y \leq C \left\| \sum_{k=1}^n h_{n,k} \right\|_X = C \|f\|_X. \quad (54)$$

Непосредственные вычисления показывают, что $\theta_{h_n}(t) = n^{-1}\theta_f(t) + (1 - n^{-1})$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Поэтому характеристическая функция суммы $H_n := \sum_{k=1}^n h_{n,k}$ определяется равенством

$$\theta_{H_n}(t) = (n^{-1}(\theta_f(t) - 1) + 1)^n \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_{H_n}(t) = \exp(\theta_f(t) - 1) = \theta_{\mathcal{K}f}(t)$ для каждого $t \in \mathbb{R}$, то H_n сходится слабо к $\mathcal{K}f$. Тем самым, из соотношения (54), максимальности $Y^{\times \times}$ и леммы 13 следует, что $\|\mathcal{K}f\|_{Y^{\times \times}} \leq C \|f\|_X$.

(ii) Прежде всего, ясно, что достаточно рассматривать лишь неотрицательные функции. Предположим сначала, что последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ состоит из неотрицательных независимых функций, удовлетворяющих условию (31). Пусть по-прежнему h_k независимы и $\mathcal{F}_{h_k}(x) = \mathcal{F}_{\mathcal{K}f_k}(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) при всех $k = 1, 2, \dots$. Тогда по лемме 14 имеем (52), и, значит, ввиду предложения 1

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_Y \leq 4 \left\| \sum_{k=1}^n h_k \right\|_Y. \quad (55)$$

Так как функции $\mathbf{f}_k$ ($k = 1, \dots, n$) попарно дизъюнкты, то, учитывая определение дизъюнктивной суммы, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1) d\mathcal{F}_{\mathbf{f}}(x) = \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1) d\mathcal{F}_{f_k}(x),$$

откуда

$$\theta_{\mathcal{H}\mathbf{f}}(t) = \prod_{k=1}^n \theta_{\mathcal{H}f_k}(t) = \prod_{k=1}^n \theta_{h_k}(t) = \theta_{\sum_{k=1}^n h_k}(t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Таким образом, функции $\sum_{k=1}^n h_k$ и $\mathcal{H}\mathbf{f}$ одинаково распределены. Следовательно, ввиду (55)

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_Y \leq 4 \left\| \sum_{k=1}^n h_k \right\|_Y = 4 \|\mathcal{H}\mathbf{f}\|_Y \leq 4 \|\mathcal{H}\|_{X \rightarrow Y} \|\mathbf{f}\|_X,$$

и в рассматриваемом случае неравенство (51) доказано.

Пусть теперь $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ – произвольная последовательность неотрицательных независимых функций. Без ограничения общности мы можем (и будем) предполагать, что $\lambda\{f_i = \tau\} = 0$ для каждого $\tau \geq 0$ и всех $i = 1, \dots, n$. Тогда существуют такие $0 = t_n < t_{n-1} < \dots < t_1 < t_0 = \infty$, что

$$\sum_{i=1}^n \lambda\{t_j \leq f_i < t_{j-1}\} = 1 \quad (j = 1, \dots, n).$$

Заметим, что для последовательности $\{f_i \chi_{\{f_i > t_1\}}\}_{i=1}^n$ выполнено условие (31). Поэтому, как уже доказано,

$$\left\| \sum_{i=1}^n f_i \chi_{\{f_i > t_1\}} \right\|_Y \leq 4 \|\mathcal{H}\| \left\| \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i \chi_{\{f_i > t_1\}} \right\|_X = 4 \|\mathcal{H}\| \left\| \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i \right)^* \chi_{[0,1]} \right\|_X. \quad (56)$$

Каждая из последовательностей $\{f_i \chi_{\{t_j < f_i < t_{j-1}\}}\}_{i=1}^n$ ($j = 2, \dots, n$) также удовлетворяет условию (31). Тем самым, ввиду того, что $\|\chi_{[0,1]}\|_X = 1$, получим

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n f_i \chi_{\{f_i < t_1\}} \right\|_Y &\leq \sum_{j=2}^n \left\| \sum_{i=1}^n f_i \chi_{\{t_j < f_i < t_{j-1}\}} \right\|_Y \leq 4 \|\mathcal{H}\| \sum_{j=2}^n \left\| \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i \chi_{\{t_j < f_i < t_{j-1}\}} \right\|_X \\ &\leq 4 \|\mathcal{H}\| \sum_{j=2}^n t_{j-1} \leq 4 \|\mathcal{H}\| \left(\left\| \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i \chi_{\{f_i > t_1\}} \right\|_X + \sum_{j=2}^{n-1} \left\| \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i \chi_{\{t_j < f_i < t_{j-1}\}} \right\|_1 \right) \\ &= 4 \|\mathcal{H}\| \left(\left\| \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i \right)^* \chi_{[0,1]} \right\|_X + \sum_{j=2}^{n-1} \left\| \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i \right)^* \chi_{[j-1, j]} \right\|_1 \right) = 4 \|\mathcal{H}\| \left\| \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i \right\|_{Z_X^1}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (56) следует (51), и теорема доказана.

Разумеется, если пространство Y максимально, то утверждение части (i) последней теоремы приобретает следующий вид: оператор $\mathcal{H}$ ограничен из X в Y и $\|\mathcal{H}\|_{X \rightarrow Y} \leq C$. Это утверждение может быть распространено на случай, когда $X = Y$ сепарабельно. Тем самым мы получаем частичный положительный ответ на вопрос, заданный в [39; § 1.6, с. 16].

ТЕОРЕМА 23. *Предположим, что X – такое сепарабельное симметричное пространство на $[0, 1]$, что неравенство*

$$\left\| \sum_{i=1}^n f_i \right\|_X \leq C \|\mathbf{f}\|_{Z_X^1} \quad (= C \|\mathbf{f}\|_X) \quad (57)$$

справедливо для некоторого $C > 0$ и произвольной последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$, удовлетворяющей условию (31). Тогда оператор $\mathcal{H}$ ограничен в X и $\|\mathcal{H}\|_{X \rightarrow X} \leq C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Стандартные рассуждения, основанные на использовании максимальнойности пространства $X^{\times \times}$, а также перехода к срезкам рассматриваемых функций, приводят к распространению неравенства (57) на последовательности $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X^{\times \times}$. Поэтому по теореме 22 оператор $\mathcal{H}$ ограниченно действует в $X^{\times \times}$ и $\|\mathcal{H}\|_{X^{\times \times} \rightarrow X^{\times \times}} \leq C$. Применяя теорему 15, получаем утверждение.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Однако, если $X \neq Y$, то утверждение (i) теоремы 22 не может быть усилено подобным образом даже в случае сепарабельного Y . Достаточно рассмотреть следующий случай: $X = L_\infty$ и $Y = (L_{M_1})_\circ$.

Из теоремы 22, а также результатов об ограниченности оператора Круглова в симметричных пространствах, полученных в предыдущем разделе, вытекает целый ряд следствий о справедливости неравенства (51) в конкретных пространствах. Приведем здесь лишь одно из них. Пусть $p \in (1, \infty]$ и $q = p/(p-1)$. Так как $(L_{M_q})_\circ$ – наименьшее среди всех симметричных пространств Y со свойством $Y^{\times \times} \supseteq L_{M_q}$, а $\exp L_p \subset (L_{M_q})_\circ$, то из теорем 22, 12 и 13 получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Для произвольного $p \in (1, \infty]$ существует такая константа $C_p > 0$, что для всех $n \in \mathbb{N}$ и произвольной последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n \subset \exp L_p$ выполнено:*

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_{(L_{M_q})_\circ} \leq C_p \|\mathbf{f}\|_{Z_{\exp L_p}^1}.$$

Кроме того, если симметричное пространство Y обладает тем свойством, что для некоторого $C > 0$ и произвольной последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n \subset \exp L_p$, удовлетворяющей условию (31), выполнено неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_Y \leq C \|\mathbf{f}\|_{\exp L_p},$$

то $(L_{M_q})_\circ \subseteq Y$.

Следующий результат, доказанный в [42], является в определенном смысле обращением второго из утверждений теоремы 9 Джонсона–Шехтмана.

ТЕОРЕМА 24. *Предположим, что симметричное пространство X имеет следующее свойство: для каждого максимального симметричного пространства $Y \supset X$ существует такая константа $C > 0$, что для всех $n \in \mathbb{N}$ и произвольной последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n \subset Y$, удовлетворяющей условию (31), выполнено неравенство*

$$\left\| \sum_{i=1}^n f_i \right\|_Y \leq C \|\mathbf{f}\|_Y,$$

где $\mathbf{f}$ – дизъюнктивная сумма последовательности $\{f_k\}_{k=1}^n$. Тогда $X \supset L_p$ при некотором $p < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 2.5.7 из [16], $X \subseteq M_{t/\phi_X}$, где ϕ_X – фундаментальная функция пространства X . Следовательно, для каждой функции $\psi \in \Psi$ такой, что $\psi \leq \phi_X$, имеем: $X \subseteq M_{t/\psi(t)}$. Тем самым по условию и теореме 22, (i) оператор $\mathcal{H}$ ограниченно действует в пространстве $M_{t/\psi(t)}$. Но тогда ввиду теоремы 17 условие (40) выполнено для каждой такой функции ψ . Применяя лемму 11, получаем, что $\phi_X(t) \leq at^\alpha$ при некоторых $a \geq 1$ и $\alpha \in (0, 1]$ и для всех $t \in [0, 1]$. Последнее неравенство вместе с теоремой 2.5.5 из [16] гарантирует, что

$$X \supseteq \Lambda_{\phi_X} \supseteq \Lambda_{t^\alpha}.$$

Так как пространство Лоренца Λ_{t^α} содержит L_p , если $p > 1/\alpha$, то теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Из доказательства ясно, что последнее утверждение останется верным, если в его формулировке класс всех максимальных симметричных пространств заменить множеством пространств Марцинкевича.

Перейдем теперь к рассмотрению случая независимых функций, в среднем равных нулю. Первоначальный вариант следующей теоремы, усиливающей неравенство Джонсона–Шехтмана (27), был доказан в работе [52] с использованием техники теории безгранично делимых распределений. Здесь доказательство значительно упрощено [53].

ТЕОРЕМА 25. *Пусть X и Y – симметричные пространства на $[0, 1]$, $X \subset Y$. Тогда, если оператор $\mathcal{H}$ ограниченно действует из X в Y , то существует такая универсальная константа $\alpha > 0$, что для любой последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$, $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$ ($k = 1, 2, \dots$), и всех $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство*

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_Y \leq \alpha \|\mathcal{H}\|_{X \rightarrow Y} \|\mathbf{f}\|_{Z_X^2}. \quad (58)$$

Отметим ту ключевую роль, которую играет в доказательстве этой теоремы неравенство Прохорова из теоремы 5. Далее нам понадобятся два вспомогательных утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Существует такая универсальная константа $\beta > 0$, что для любой последовательности $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ ограниченных симметрично распределенных независимых функций выполнено*

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_{L_{M_1}} \leq \beta \|f\|_{L_2 \cap L_\infty} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующее подпространство пространства $L_2 \cap L_\infty(0, \infty)$:

$$(L_2 \cap L_\infty)_s := \{f \in L_2 \cap L_\infty : \text{с. в. } f^{(k)}(x) := f(x + k - 1) \ (0 \leq x \leq 1) \text{ симметрично распределена для каждого } k \geq 1\}.$$

Нетрудно проверить, что $(L_2 \cap L_\infty)_s$ замкнуто в $L_2 \cap L_\infty$ и, следовательно, является банаховым пространством. Определим последовательность линейных операторов

$$U_n : (L_2 \cap L_\infty)_s \rightarrow L_{M_1}(\Omega, \mathcal{P}), \quad U_n f(t_1, \dots, t_n, \dots) = \sum_{k=1}^n f(k - 1 + t_k),$$

где, как обычно, $(\Omega, \mathcal{P}) = \prod_{k=1}^\infty ([0, 1], \lambda_k)$. Очевидно, что $\|U_n\|_{(L_2 \cap L_\infty)_s \rightarrow L_{M_1}} \leq n$.

Пусть $\mathbf{f}_k$ – дизъюнктные копии функций $f(k - 1 + t_k)$ ($k = 1, 2, \dots$), а $\mathbf{f}^{(n)} = \sum_{k=1}^n \mathbf{f}_k$ – дизъюнктная сумма первых n функций. Так как функции $f(k - 1 + t_k)$ симметрично распределены, то по теореме 5

$$\mathcal{P} \left\{ \sum_{k=1}^n f(k - 1 + t_k) > \tau \right\} \leq \exp \left(-\frac{\tau}{2 \|\mathbf{f}^{(n)}\|_\infty} \operatorname{arcsch} \frac{\tau \|\mathbf{f}^{(n)}\|_\infty}{2 \|\mathbf{f}^{(n)}\|_2^2} \right) \quad (\tau > 0). \quad (59)$$

Напомним, что функция $\bar{f}_1(t) := \ln(e/t) / \ln(\ln(e^e/t))$ “максимальна по перестановке” в пространстве L_{M_1} (см. первое из соотношений (35) и лемму 8). Кроме того, как нетрудно проверить, для некоторого $C \geq 1$ и всех достаточно больших $\tau > 0$ выполнены неравенства

$$e^{-C^{-1}\tau \ln \tau} \leq \lambda\{t \in (0, 1] : \bar{f}_1(t) > \tau\} \leq e^{-\tau \ln \tau}.$$

Предположим, что $f \in (L_2 \cap L_\infty)_s$, $\|f\|_{L_2 \cap L_\infty} = 1$ и $n_0 \in \mathbb{N}$ таково, что $f\chi_{(0, n_0]} \neq 0$. Легко видеть, что правая часть в (59) не превосходит

$$\exp \left(-\frac{\tau}{2} \operatorname{arcsch} \frac{\tau \|f\chi_{(0, n_0]}\|_\infty}{2} \right)$$

для всех $n \geq n_0$ и $\tau > 0$. Поэтому, так как $\operatorname{arcsch} t \sim \ln t$ при $t \rightarrow +\infty$, то мы получаем, что $\sup_{n=1, 2, \dots} \|U_n f\|_{L_{M_1}} < \infty$ для каждой фиксированной $f \in (L_2 \cap L_\infty)_s$. Но тогда ввиду принципа Банаха–Штейнгауза нормы $\|U_n\|_{(L_2 \cap L_\infty)_s \rightarrow L_{M_1}}$ ($n \in \mathbb{N}$) равномерно ограничены, и утверждение доказано.

ЛЕММА 15. Пусть X и Y – симметричные пространства на $[0, 1]$ и $\mathcal{K} : X \rightarrow Y$. Тогда $L_{M_1} \subset Y$ и, кроме того, существует такая универсальная константа $\gamma > 0$, что для всех $x \in L_{M_1}$ имеет место неравенство

$$\|x\|_Y \leq \gamma \|\mathcal{K}\|_{X \rightarrow Y} \|x\|_{L_{M_1}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если функция $\bar{f}_1$ – та же, что и в доказательстве предыдущего утверждения, то, как там отмечалось, для произвольной $x \in L_{M_1}$ и для всех $0 < t \leq 1$ неравенство $x^*(t) \leq \gamma \bar{f}_1(t) \|x\|_{L_{M_1}}$ выполнено с некоторой универсальной константой $\gamma > 0$. Кроме того, $\bar{f}_1 \leq \mathcal{K} \chi_{[0,1]}$ (см. доказательство теоремы 12), и, значит,

$$\|\bar{f}_1\|_Y \leq \|\mathcal{K} \chi_{[0,1]}\|_Y \leq \|\mathcal{K}\|_{X \rightarrow Y} \|\chi_{[0,1]}\|_X = \|\mathcal{K}\|_{X \rightarrow Y}.$$

В итоге получаем

$$\|x\|_Y \leq \gamma \|\bar{f}_1\|_Y \|x\|_{L_{M_1}} \leq \gamma \|\mathcal{K}\|_{X \rightarrow Y} \|x\|_{L_{M_1}}.$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 25. Предположим сначала, что функции f_k ($k = 1, 2, \dots$) симметрично распределены. Обозначим $t_0 := \mathbf{f}^*(1)$, где, как и ранее, $\mathbf{f}$ – соответствующая дизъюнктивная сумма. Тогда

$$\sum_{k=1}^n \lambda\{s \in [0, 1] : |f_k(s)| > t_0\} = \lambda\{s > 0 : |\mathbf{f}(s)| > t_0\} \leq 1.$$

Если $u_k := f_k \chi_{\{|f_k| > t_0\}}$, $v_k := f_k \chi_{\{|f_k| \leq t_0\}}$ ($k = 1, \dots, n$), то $\{u_k\}$ и $\{v_k\}$ – последовательности независимых симметрично распределенных функций и $f_k = u_k + v_k$. Так как $\sum_{k=1}^n \lambda(\text{supp } u_k) \leq 1$, то по теореме 22 (см. также ее доказательство)

$$\left\| \sum_{k=1}^n u_k \right\|_Y \leq 4 \|\mathbf{u}\|_X = 4 \|\mathbf{f}^* \chi_{[0,1]}\|_X. \quad (60)$$

Одновременно, применяя лемму 15 и предложение 6, а также учитывая, что $\|\chi_{[0,1]}\|_X = 1$, получаем:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^n v_k \right\|_Y &\leq \gamma \|\mathcal{K}\|_{X \rightarrow Y} \left\| \sum_{k=1}^n v_k \right\|_{L_{M_1}} \leq \gamma \beta \|\mathcal{K}\|_{X \rightarrow Y} \|\mathbf{v}\|_{L_2 \cap L_\infty} \\ &\leq \gamma \beta \|\mathcal{K}\|_{X \rightarrow Y} \|\mathbf{f}^* \chi_{[1,\infty)}\|_{L_2 \cap L_\infty} \leq \gamma \beta \|\mathcal{K}\|_{X \rightarrow Y} (t_0 + \|\mathbf{f}^* \chi_{[1,\infty)}\|_{L_2}) \\ &\leq \gamma \beta \|\mathcal{K}\|_{X \rightarrow Y} (\|\mathbf{f}^* \chi_{[0,1]}\|_X + \|\mathbf{f}^* \chi_{[1,\infty)}\|_{L_2}) = \gamma \beta \|\mathcal{K}\|_{X \rightarrow Y} \|\mathbf{f}\|_{Z_X^2}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (60) следует, что для симметрично распределенных функций неравенство (58) выполнено с константой $4 + \gamma \beta$.

Рассмотрим общий случай, когда известно лишь, что $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$ ($k = 1, 2, \dots$). Действуя стандартным образом, применим симметризацию. Пусть

$\{f'_k\}_{k=1}^n$ – последовательность независимых копий функций f_k ($k = 1, \dots, n$) и, кроме того, $h_k := f_k - f'_k$ ($k = 1, \dots, n$). Тогда $\{h_k\}_{k=1}^n$ – последовательность независимых симметрично распределенных с. в., и, как уже доказано, для нее неравенство (58) выполнено.

Пусть $\mathcal{B}$ – σ -подалгебра, порожденная последовательностью $\{f_k\}_{k=1}^n$, а $E_{\mathcal{B}}$ – оператор условного математического ожидания, соответствующий ей. Ввиду предложения 2 выполнено равенство $\|E_{\mathcal{B}}\|_{Y \rightarrow Y} = 1$. Следовательно,

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_Y = \left\| E_{\mathcal{B}} \left(\sum_{k=1}^n h_k \right) \right\|_Y \leq \left\| \sum_{k=1}^n h_k \right\|_Y.$$

Так как $\lambda\{t > 0 : |\mathbf{h}(t)| > x\} \leq 2\lambda\{t > 0 : |\mathbf{f}(t)| > x\}$ ($x \geq 0$), то ввиду предложения 1 неравенство (58) выполнено и в этом случае с константой $\alpha = 8 + 2\gamma\beta$. Теорема доказана.

6. Неравенства типа Розенталя для симметричных (квази)норм на последовательностях независимых функций

Пусть E – симметричное (квази)банахово пространство последовательностей (см. раздел 2), $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset E$ – стандартный базис в E , а X – симметричное пространство функций на $[0, 1]$. Для произвольной последовательности неотрицательных независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$ ($n \in \mathbb{N}$) рассмотрим величину

$$\left\| \left\| \sum_{k=1}^n f_k e_k \right\|_E \right\|_X.$$

Основная цель этого раздела – найти как можно более точные оценки для нее в терминах дизъюнктивных копий функций данной последовательности. Результаты такого рода находят многочисленные применения при изучении различных вопросов геометрии пространств, например, в локальной теории выпуклых тел [54], [55]. “Происхождение” этой величины очевидно: в случае $E = \ell_1$ и $X = L_p$ ($1 \leq p < \infty$) она фигурирует в неравенстве Розенталя (6). Мы отдельно рассмотрим оценки снизу и сверху, так как условия, при которых они имеют место, а также методы их доказательства различны.

6.1. Нижние оценки. Мы начнем с одного несложного, но важного утверждения, доказанного в [56; предложение 1] (очень близкий результат см. в [35; лемма 3]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность неотрицательных независимых функций, определенных на $[0, 1]$, а $\mathbf{f}$ – соответствующая дизъюнктивная сумма. Для любого $t > 0$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{2} \lambda\{\mathbf{f}^* \chi_{[0,1]} > t\} \leq \lambda\left\{ \sup_{k=1,2,\dots} f_k > t \right\} \leq \lambda\{\mathbf{f}^* \chi_{[0,1]} > t\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $t > \mathbf{f}^*(1)$ (достаточно рассмотреть лишь этот случай) и обозначим $a_k := \lambda\{f_k > t\}$ ($k = 1, 2, \dots$). Тогда ввиду (25),

а также независимости функций f_k

$$\lambda\{\mathbf{f}^* \chi_{[0,1]} > t\} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq 1 \quad \text{и} \quad \lambda\left\{\sup_{k=1,2,\dots} f_k > t\right\} = 1 - \prod_{k=1}^{\infty} (1 - a_k).$$

Нетрудно показать, что

$$1 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \prod_{k=1}^{\infty} (1 - a_k) \leq 1 - \frac{\sum_{k=1}^{\infty} a_k}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k}.$$

Например, правое неравенство является следствием оценок

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 - a_k) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\right) \leq \prod_{k=1}^{\infty} (1 - a_k)(1 + a_k) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - a_k^2) \leq 1.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2} \lambda\{\mathbf{f}^* \chi_{[0,1]} > t\} \leq \frac{\lambda\{\mathbf{f}^* \chi_{[0,1]} > t\}}{1 + \lambda\{\mathbf{f}^* \chi_{[0,1]} > t\}} \leq \lambda\left\{\sup_{k=1,2,\dots} f_k > t\right\} \leq \lambda\{\mathbf{f}^* \chi_{[0,1]} > t\},$$

и предложение доказано.

Следующее утверждение было получено в работе [57] (см. также [58], [59]).

ТЕОРЕМА 26. Для произвольных функционального симметричного пространства X и банахова симметричного пространства последовательностей E , для всех $n \in \mathbb{N}$ и любой последовательности неотрицательных независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$ справедливо неравенство

$$\|\mathbf{f}^* \chi_{[0,1]}\|_X + \left\| \sum_{k=1}^n \mathbf{f}^*(k) e_k \right\|_E \leq 6 \left\| \left\| \sum_{k=1}^n f_k e_k \right\|_E \right\|_X. \quad (61)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала мы докажем неравенство (61) в частном случае, когда $X = L_1$, а E – пространство последовательностей $\mathbf{s}_r$ ($r = 1, 2, \dots$)

с нормой $\|(a_k)_{k=1}^{\infty}\|_{\mathbf{s}_r} := \sum_{k=1}^r a_k^{\sharp}$, где $(a_k^{\sharp})_{k=1}^{\infty}$ – невозрастающая перестановка последовательности $(|a_k|)_{k=1}^{\infty}$.

Обозначим $A(t) := \mathbf{f}^*(t)$ и $B(t) := \max_{1 \leq k \leq n} f_k(t)$. Тогда ввиду предложения 7

$$\frac{1}{2} \int_0^1 A(t) dt \leq \int_0^1 B(t) dt \leq \int_0^1 A(t) dt. \quad (62)$$

Далее рассмотрим последовательность $\{g_k\}_{k=1}^n$ независимых с.в. таких, что $\lambda\{g_k = 1\} = 1/r$ и $\lambda\{g_k = 0\} = (r-1)/r$ ($k \geq 1$), где $r \in \mathbb{N}$ и $1 < r \leq n$. Предположим также, что эта последовательность независима относительно последовательности $\{f_k\}_{k=1}^n$. Будем считать, что все функции определены на квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$, $f_k = f_k(t)$, $g_k = g_k(s)$. Рассмотрим последовательность $\{f_k g_k\}_{k=1}^n$, обозначив через $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответствующие ей величины, аналогичные A и B

(определенным ранее для последовательности $\{f_k\}_{k=1}^n$). Применяя к ней (62), получим, что

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \mathcal{A}(u) du \leq \int_0^1 \int_0^1 \mathcal{B}(s, t) ds dt \leq \int_0^1 \mathcal{A}(u) du.$$

Так как $(f_k g_k)^* = (\sigma_{1/r} f_k)^*$ (см. доказательство теоремы 22), где, как обычно, $\sigma_{1/r} f_k(t) = f_k(rt)$, то $\mathcal{A}(u) = \sigma_{1/r} A(u)$ ($u > 0$). Следовательно,

$$\int_0^1 \mathcal{A}(u) du = \int_0^1 \sigma_{1/r} A(u) du = \int_0^1 A(ru) du = \frac{1}{r} \left(\int_0^1 A(u) du + \int_1^r A(u) du \right),$$

и ввиду неравенства $\sum_{k=2}^r A(k) \leq \int_1^r A(u) du \leq \sum_{k=1}^r A(k)$ из предыдущих соотношений следует:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4r} \left(\int_0^1 A(u) du + \sum_{k=1}^r A(k) \right) &\leq \int_0^1 \int_0^1 \mathcal{B}(s, t) ds dt \\ &\leq \frac{1}{r} \left(\int_0^1 A(u) du + \sum_{k=1}^r A(k) \right). \end{aligned} \quad (63)$$

Покажем, что из последнего неравенства вытекает (61) в случае $X = L_1$, $E = \mathbf{s}_r$. Рассмотрим оператор $E_{\mathcal{M}}$ условного математического ожидания относительно σ -подалгебры $\mathcal{M}$ σ -алгебры измеримых по Лебегу подмножеств квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$, состоящей из всех множеств вида $e \times [0, 1]$, где e – произвольное измеримое подмножество $[0, 1]$. Если f суммируема на $[0, 1] \times [0, 1]$, то $E_{\mathcal{M}} f(t) = \int_0^1 f(t, s) ds$. В частности,

$$E_{\mathcal{M}} \mathcal{B}(t) = \int_0^1 \max_{1 \leq k \leq n} f_k(t) g_k(s) ds.$$

Если теперь $\mathcal{A}_t$ – величина, аналогичная A и соответствующая последовательности $\{f_k(t) g_k(\cdot)\}_{k=1}^n$, то для каждого $t \in [0, 1]$

$$\int_0^1 \mathcal{A}_t(u) du = \int_0^1 \sum_{k=1}^r (f_k(t))^{\sharp} \chi_{((k-1)/r, k/r)}(s) ds = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r (f_k(t))^{\sharp}.$$

Следовательно, применяя (62) к последовательности $\{f_k(t) g_k(\cdot)\}_{k=1}^n$, получаем

$$\frac{1}{2r} \sum_{k=1}^r (f_k(t))^{\sharp} \leq E_{\mathcal{M}} \mathcal{B}(t) \leq \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r (f_k(t))^{\sharp}, \quad 0 < t \leq 1. \quad (64)$$

Так как $\int_0^1 \int_0^1 \mathcal{B}(s, t) ds dt = \int_0^1 E_{\mathcal{M}} \mathcal{B}(t) dt$, то из (64) и (63) следует, что

$$\frac{1}{4} \left(\int_0^1 A(u) du + \sum_{k=1}^r A(k) \right) \leq \int_0^1 \sum_{k=1}^r (f_k(t))^{\sharp} dt \leq 2 \left(\int_0^1 A(u) du + \sum_{k=1}^r A(k) \right), \quad (65)$$

и неравенство (61) доказано, если $X = L_1$, а $E = \mathbf{s}_r$ ($r = 1, 2, \dots$).

Рассмотрим общий случай. Прежде всего, заметим, что неравенство (61) будет следствием оценок

$$\|A\chi_{[0,1]}\|_X \leq 2 \left\| \left\| \sum_{k=1}^n f_k e_k \right\|_E \right\|_X \quad \text{и} \quad \left\| \sum_{k=1}^n A(k) e_k \right\|_E \leq 4 \left\| \left\| \sum_{k=1}^n f_k e_k \right\|_E \right\|_X. \quad (66)$$

Первая из них ввиду очевидного соотношения $\max_{1 \leq k \leq n} f_k \leq \left\| \sum_{k=1}^n f_k e_k \right\|_E$, а также предложения 1 сразу вытекает из левой части неравенства, доказанного в предложении 7.

Для доказательства второго из неравенств (66) воспользуемся двойственностью. Прежде всего,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^n f_k e_k \right\|_E &= \sup_{b=\{b_k\}_{k=1}^n, \|b\|_{E^\times} \leq 1} \sum_{k=1}^n (f_k(t))^\sharp b_k^\sharp \\ &= \sup_{b=\{b_k\}_{k=1}^n, \|b\|_{E^\times} \leq 1} \sum_{r=1}^n \|(f_k(t))_{k=1}^n\|_{s_r} (b_r^\sharp - b_{r+1}^\sharp), \quad b_{n+1}^\sharp = 0, \end{aligned}$$

где двойственное пространство $E^\times$ определяется совершенно аналогично тому, как это делается в случае функциональных пространств. Поэтому

$$\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n f_k(t) e_k \right\|_E dt \geq \sup_{b=\{b_k\}_{k=1}^n, \|b\|_{E^\times} \leq 1} \sum_{r=1}^n (b_r^\sharp - b_{r+1}^\sharp) \int_0^1 \|(f_k(t))_{k=1}^n\|_{s_r} dt.$$

Отсюда и из (65) следует, что

$$\begin{aligned} 4 \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n f_k(t) e_k \right\|_E dt &\geq \sup_{b=\{b_k\}_{k=1}^n, \|b\|_{E^\times} \leq 1} \sum_{r=1}^n (b_r^\sharp - b_{r+1}^\sharp) \sum_{k=1}^r A(k) \\ &= \sup_{b=\{b_k\}_{k=1}^n, \|b\|_{E^\times} \leq 1} \sum_{k=1}^n A(k) b_k^\sharp = \left\| \sum_{k=1}^n A(k) e_k \right\|_E. \end{aligned}$$

Так как для произвольного симметричного пространства X на $[0, 1]$ выполнено неравенство $\|f\|_{L_1} \leq \|f\|_X$ ($f \in X$), то получаем нужное нам неравенство, и теорема доказана.

Ключевой момент доказательства последней теоремы состоит в применении двойственности, и поэтому оно не может быть обобщено на квазинормированные симметричные пространства последовательностей. Кроме того, в его заключительной части используется вложение $X \subset L_1$, вообще говоря, неверное для квазинормированных симметричных пространств X . В то же время, как показано в недавней работе [60], справедливость неравенства (61) обусловлена исключительно вероятностно-комбинаторными причинами. Приведем без доказательства некоторые результаты, полученные в [60].

ТЕОРЕМА 27. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\{f_k\}_{k=1}^n$ – произвольная последовательность неотрицательных независимых функций на $[0, 1]$. Тогда

$$\lambda \left\{ t \in [0, 1] : \sum_{k=1}^n f_k(t) \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \mathbf{f}^*(k) \right\} \geq \frac{1}{8}.$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть X – произвольное квазинормированное симметричное пространство на $[0, 1]$. Тогда существует константа $\alpha > 0$, зависящая лишь от X , такая, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ и любой последовательности неотрицательных независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n$ на $[0, 1]$ справедливо неравенство

$$\|\mathbf{f}^* \chi_{[0,1]}\|_X + \sum_{k=1}^n \mathbf{f}^*(k) \leq \alpha \left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_X.$$

ТЕОРЕМА 28. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\{f_k\}_{k=1}^n$ – произвольная последовательность равноизмеримых неотрицательных независимых функций на $[0, 1]$. Тогда существует константа $c_0 > 0$, не зависящая от n и функций f_k , для которой выполнено:

$$\lambda \left\{ t \in [0, 1] : f_j^\sharp(t) \geq \mathbf{f}^*(2j-1), j = 1, \dots, \left[\frac{n}{2} \right] \right\} \geq c_0.$$

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть X и E – произвольные квазинормированные симметричные пространства функций на $[0, 1]$ и последовательностей соответственно, $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ – стандартный базис в E . Тогда существует константа $C > 0$, зависящая лишь от константы из неравенства треугольника в E , такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и всякой последовательности равноизмеримых неотрицательных независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$ выполнено неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^n \mathbf{f}^*(k) e_k \right\|_E \leq C \left\| \sum_{k=1}^n f_k e_k \right\|_E \left\| \right\|_X,$$

6.2. Верхние оценки в симметричных пространствах со свойством Круглова. Рассмотрим теперь противоположное по отношению к (61) неравенство

$$\left\| \left\| \sum_{k=1}^n f_k e_k \right\|_E \right\|_X \leq C \left(\|\mathbf{f}^* \chi_{[0,1]}\|_X + \left\| \sum_{k=1}^n \mathbf{f}^*(k) e_k \right\|_E \right), \quad (67)$$

где, как и ранее, $\mathbf{f}$ – дизъюнктивная сумма последовательности $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$.

Если $E = \ell_1$ и $X = L_p$ ($1 \leq p < \infty$), то это соотношение совпадает (с точностью до константы) с правой частью неравенства Розенталя (6). В более общей ситуации, когда $E = \ell_1$, а X – произвольное симметричное пространство, содержащее пространство L_p при некотором $p < \infty$, мы получаем неравенство (27), доказанное У. Джонсоном и Г. Шехтманом [35]. Позднее С. Монтгомери-Смит [57; теорема 1] распространил (67) на произвольные симметричные пространства последовательностей E (с тем же условием на X). Во всех упомянутых работах доказательство в решающей степени было основано на применении хорошо известного неравенства Хоффмана-Йоргенсона [36] или его вариантов. В [42; теорема 6.7], напротив, была использована конструкция оператора Круглова и интерполяция операторов. Оценка (67) была получена там для любого симметричного пространства X со свойством Круглова, но лишь в специальном случае, когда $E = \ell_q$ ($1 \leq q \leq \infty$). Здесь мы докажем наиболее общий (и фактически окончательный) результат такого рода из более

поздней работы [61; теорема 1], который верен не только для нормированных, но и для квазинормированных симметричных пространств последовательностей, удовлетворяющих некоторым не очень ограничительным условиям.

В дальнейшем нам понадобится неравенство (67) в частном случае $E = \ell_q$ ($1 \leq q \leq \infty$) с точной по порядку константой при $q \rightarrow \infty$. Как уже говорилось, его первоначальная версия была получена в работе [42]; здесь мы приводим более точный результат из [44], в котором выявлена зависимость константы C от нормы оператора Круглова и q (что будет играть решающую роль в доказательстве следующей теоремы).

ТЕОРЕМА 29. Пусть X и Y – симметричные пространства на $[0, 1]$, $X \subseteq Y$ с константой 1 и норма в Y порядково полунепрерывна. Если оператор $\mathcal{H}$ ограниченно действует из X в Y , то существует такая универсальная константа $\beta > 0$, что для всех $n \in \mathbb{N}$, произвольной последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$ и любого $q \in [1, \infty]$ справедливо неравенство

$$\| \|(f_k)_{k=1}^n\|_{\ell_q} \|_Y \leq \beta \|\mathcal{H}\|_{X \rightarrow Y}^{1/q} (\|\mathbf{f}^* \chi_{[0,1]}\|_X + \|(\mathbf{f}^*(k))_{k=1}^n\|_{\ell_q}). \quad (68)$$

В доказательстве нам понадобится следующая конструкция из теории банаховых пространств [17; с. 46]. Если X – симметричное пространство на $[0, 1]$, то $\widetilde{X(\ell_p)}$ – множество всех таких последовательностей $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$, что

$$\|\mathbf{f}\|_{\widetilde{X(\ell_p)}} := \sup_{n=1,2,\dots} \left\| \left(\sum_{k=1}^n |f_k|^p \right)^{1/p} \right\|_X < \infty$$

(с естественной модификацией при $p = \infty$). Замкнутое подпространство пространства $\widetilde{X(\ell_p)}$, порожденное всеми финитными последовательностями $\{f_k\} \in \widetilde{X(\ell_p)}$, будем обозначать через $X(\ell_p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 29. Предположим сначала, что пространство Y максимально. Тогда, как нетрудно проверить, утверждение (ii) теоремы 22 справедливо для бесконечных сумм, и поэтому с некоторой универсальной константой $\alpha \geq 1$

$$\|(f_k)_{k=1}^\infty\|_{Y(\ell_1)} := \left\| \sum_{k=1}^\infty |f_k| \right\|_Y \leq \alpha \|\mathcal{H}\|_{X \rightarrow Y} \|\mathbf{f}\|_{Z_X^1}.$$

Кроме того, ввиду условия теоремы и предложения 7

$$\|(f_k)\|_{Y(\ell_\infty)} \leq \|(f_k)\|_{X(\ell_\infty)} \leq \|\mathbf{f}\|_{Z_X^\infty}.$$

Далее мы используем интерполяционные свойства конструкции Кальдерона (см. раздел 2). Пусть $(\Omega, \mathcal{P}) := \prod_{k=0}^\infty ([0, 1], \lambda_k)$ и $\delta: (\Omega, \mathcal{P}) \rightarrow ([0, 1], \lambda)$ – отображение, сохраняющее меру. Для каждой функции $g \in S(\Omega, \mathcal{P})$ положим $Tg(x) := g(\delta^{-1}x)$ ($x \in [0, 1]$). Тогда отображение $T: S(\Omega, \mathcal{P}) \rightarrow S([0, 1], \lambda)$

переводит каждую функцию g в равноизмеримую ей, т. е. $(Tg)^* = g^*$. Определим, наконец, положительный линейный оператор Q из $S(0, \infty)$ в $S(\Omega, \mathcal{P})$ следующим образом:

$$Qf(\omega_0, \omega_1, \dots) := \{f_k(\omega_k)\}_{k=0}^\infty, \quad f \in S(0, \infty),$$

где $f_k(\omega_k) := f(\omega_k + k)$ ($\omega_k \in [0, 1]$), $k \geq 0$. Аргументы, приведенные в начале доказательства, показывают, что положительный оператор $Q' := TQ$ ограничен из Z_X^1 в $Y(\ell_1)$ и из Z_X^∞ в $Y(\ell_\infty)$ с нормами, не превосходящими $\alpha \|\mathcal{K}\|_{X \rightarrow Y}$ и 1 соответственно. Поэтому

$$Q': (Z_X^1)^{1-\theta} (Z_X^\infty)^\theta \rightarrow (Y(\ell_1))^{1-\theta} (Y(\ell_\infty))^\theta$$

и

$$\|Q'\| \leq \|Q'\|_{Z_X^1 \rightarrow Y(\ell_1)}^{1-\theta} \|Q'\|_{Z_X^\infty \rightarrow Y(\ell_\infty)}^\theta \leq \alpha^{1-\theta} \|\mathcal{K}\|_{X \rightarrow Y}^{1-\theta}, \quad \theta \in (0, 1).$$

Если $q = 1/(1 - \theta)$, то для каждого $\theta \in (0, 1)$ имеют место вложения

$$Z_X^q \subseteq (Z_X^1)^{1-\theta} (Z_X^\infty)^\theta, \quad (Y(\ell_1))^{1-\theta} (Y(\ell_\infty))^\theta \subseteq Y(\ell_q).$$

В самом деле, чтобы проверить первое из них, для произвольной $g \in Z_X^q$ такой, что $g = g^*$ и $\|g\|_{Z_X^q} = 1$, положим

$$g_1 := g\chi_{[0,1]} + g^q\chi_{[1,\infty)}, \quad g_\infty := g\chi_{[0,1]} + \chi_{[1,\infty)}.$$

Очевидно, что $g = (g_1)^{1-\theta} (g_\infty)^\theta$. Кроме того, так как $g(1) \leq 1$, то g_1 убывает. Следовательно, $g_i \in Z_X^i$ и $\|g_i\|_{Z_X^i} \leq 2$ ($i = 1, \infty$). Второе вложение (и даже равенство) доказано в [62; теорема 3]. В итоге мы получаем, что с некоторой универсальной константой $\gamma > 0$

$$\|Q'\|_{Z_X^q \rightarrow Y(\ell_q)} \leq \alpha^{1/q} \|\mathcal{K}\|_{X \rightarrow Y}^{1/q} \gamma \leq \max\{\alpha, \gamma\} \|\mathcal{K}\|_{X \rightarrow Y}^{1/q}.$$

Утверждение теоремы теперь вытекает из следующего легко проверяемого неравенства

$$\|\mathbf{f}\|_{Z_X^q} \leq \|\mathbf{f}^* \chi_{[0,1]}\|_X + \|(\mathbf{f}^*(k))\|_{\ell_q} \leq 2\|\mathbf{f}\|_{Z_X^q},$$

справедливого для произвольного симметричного пространства X и всех $1 \leq q \leq \infty$.

Пусть теперь мы знаем лишь то, что норма Y порядково полунепрерывна. Тогда Y изометрически вложено в максимальное пространство $Y^{\times \times}$ (см. раздел 2). Поэтому результат следует из уже рассмотренного случая и того, что $X \subseteq Y$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Пусть X – симметричное пространство на $[0, 1]$, для которого существует такая константа $C = C_X > 0$, что для каждой последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$ ($n \in \mathbb{N}$) выполнено неравенство (67). Как уже говорилось в п. 4.1, в классическом случае $X = L_p$ ($1 \leq p < \infty$) это неравенство Розенталя. В доказательствах самого Розенталя (см. теорему 6), а также Буркхольдера в [63] несколько более общего результата константа C_{L_p} в (67) экспоненциально растет при $p \rightarrow \infty$. Точная (по порядку) константа

$C_{L_p} \asymp p/\ln(p+1)$ ($1 \leq p < \infty$) была найдена в работе [64] (см. также альтернативные доказательства в [31] и [58]). Понятие оператора Круглова позволяет рассмотреть этот вопрос с более общих позиций. Из теорем 22 и 23 вытекает, что наилучшая константа C_X в неравенстве (67) в случае сепарабельных или максимальных симметричных пространств должна быть эквивалентна норме оператора $\mathcal{K}$ в X . Благодаря этому в работе [44] найдены точные (по порядку) константы в неравенстве (67) для различных шкал симметричных пространств, в частности, для пространств Лоренца и Марцинкевича.

Теперь мы докажем аналогичное утверждение для общих квазибанаховых симметричных пространств последовательностей E , удовлетворяющих некоторым условиям. Первое условие состоит в том, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ оператор растяжения

$$\sigma_k(\{a_j\}_{j=1}^\infty) := (\underbrace{a_1, \dots, a_1}_k, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_k, \dots, \underbrace{a_j, \dots, a_j}_k, \dots)$$

ограничен в E и справедливо неравенство

$$(i) \quad \|\sigma_k\|_{E \rightarrow E} \leq k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Второе условие заключается в выполнении непрерывного вложения

$$(ii) \quad \ell_1 \subseteq E.$$

Заметим, что (банахово) симметричное пространство последовательностей E очевидным образом удовлетворяет как условию (i), так и условию (ii).

ТЕОРЕМА 30. *Предположим, что функциональное симметричное пространство X с порядково полунепрерывной нормой имеет свойство Круглова, а квазибанахово симметричное пространство последовательностей E удовлетворяет условиям (i) и (ii). Тогда существует константа $C > 0$, зависящая только от X , такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$ и произвольной последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$ выполнено неравенство (67).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ключевую роль в нашем подходе играет “слабое” ℓ_1 -пространство, $\ell_{1,\infty}$ (см. также [58; доказательство теоремы 0.2]). Оно состоит из всех последовательностей $a = (a_k)_{k=1}^\infty$, для которых

$$\|a\|_{1,\infty} := \sup_{k \geq 1} k a_k^* < \infty.$$

Легко видеть, что $\ell_{1,\infty}$ – квазибанахово симметричное пространство последовательностей и что

$$\|a + b\|_{1,\infty} \leq 2(\|a\|_{1,\infty} + \|b\|_{1,\infty}) \quad (a, b \in \ell_{1,\infty}). \quad (69)$$

Сначала мы докажем неравенство (67) в этом специальном случае.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Если функциональное симметричное пространство X имеет свойство Круглова, то существует такая универсальная константа*

$C_0 > 0$, что для всех $n \in \mathbb{N}$ и произвольной последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$

$$\left\| \left\| \sum_{k=1}^n f_k e_k \right\|_{\ell_{1,\infty}} \right\|_X \leq C_0 \left(\|\mathbf{f}^* \chi_{[0,1]}\|_X + \left\| \sum_{k=1}^n \mathbf{f}^*(k) e_k \right\|_{\ell_{1,\infty}} \right). \quad (70)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как доказательство достаточно длинно, приведем здесь лишь его ключевые моменты (подробнее см. в [61]).

Не ограничивая общности, мы можем (и будем) предполагать, что последовательность $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$ состоит из неотрицательных функций. Положим $t_0 := \mathbf{f}^*(1)$ и заметим, что

$$\sum_{k=1}^n \lambda \{s \in [0, 1] : f_k(s) > t_0\} = \lambda \{s > 0 : \mathbf{f}(s) > t_0\} \leq 1.$$

Следовательно, если $g_k := f_k \chi_{\{f_k > t_0\}}$ и $h_k := f_k \chi_{\{f_k \leq t_0\}}$ ($k = 1, \dots, n$), то $f_k = g_k + h_k$ и $\sum_{k=1}^n \lambda(\text{supp } g_k) \leq 1$. Оценим величины

$$\left\| \left\| \sum_{k=1}^n g_k e_k \right\|_{\ell_{1,\infty}} \right\|_X \quad \text{и} \quad \left\| \left\| \sum_{k=1}^n h_k e_k \right\|_{\ell_{1,\infty}} \right\|_X$$

по отдельности. Пусть $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$ – дизъюнктные суммы последовательностей $\{g_k\}_{k=1}^n$ и $\{h_k\}_{k=1}^n$ соответственно. Тогда из определения функций g_k и h_k следует, что $\mathbf{g}^* = \mathbf{g}^* \chi_{[0,1]} = \mathbf{f}^* \chi_{[0,1]}$. Так как $\|a\|_{\ell_{1,\infty}} \leq \|a\|_{\ell_1}$ ($a \in \ell_1$), то по теореме 22

$$\left\| \left\| \sum_{k=1}^n g_k e_k \right\|_{\ell_{1,\infty}} \right\|_X \leq \left\| \sum_{k=1}^n g_k \right\|_X \leq 8 \|\mathcal{K}\|_{X \rightarrow X} \|\mathbf{g}^*\|_X = 8 \|\mathcal{K}\|_{X \rightarrow X} \|\mathbf{f}^* \chi_{[0,1]}\|_X. \quad (71)$$

Осталось доказать аналогичную оценку для последовательности $\{h_k\}_{k=1}^n$, состоящей из равномерно ограниченных независимых функций. Прежде всего, с помощью теоремы 29 в случае $X = L_p$ ($p \geq 1$) можно показать, что для некоторой универсальной константы $\gamma > 0$

$$\left\| \left\| \sum_{k=1}^n h_k(u) e_k \right\|_{\ell_{1,\infty}} \right\|_p \leq \gamma \left\| \sum_{k=1}^n \mathbf{f}^*(k) e_k \right\|_{\ell_{1,\infty}} \frac{p}{\sqrt{\ln(p+1)}}, \quad p \geq 1,$$

откуда

$$\sup_{p \geq 1} \left(\frac{\sqrt{\ln(p+1)}}{p} \left\| \left\| \sum_{k=1}^n h_k(u) e_k \right\|_{\ell_{1,\infty}} \right\|_p \right) \leq \gamma \left\| \sum_{k=1}^n \mathbf{f}^*(k) e_k \right\|_{\ell_{1,\infty}}.$$

Величина из левой части этого неравенства эквивалентна норме функции

$$u \mapsto \left\| \sum_{k=1}^n h_k(u) e_k \right\|_{\ell_{1,\infty}}$$

в уже знакомом нам пространстве Орлича L_{M_2} , где $M_2(u) = e^{u\sqrt{\ln(u+e)}} - 1$ (см., например, [65; следствие 1] или [64; предложение 3.6]). Так как X имеет свойство Круглова, то из теоремы 14 следует, что $L_{M_2} \subseteq X$. Поэтому для некоторой универсальной константы $\gamma' > 0$ получаем

$$\left\| \left\| \sum_{k=1}^n h_k(u) e_k \right\|_{\ell_{1,\infty}} \right\|_X \leq \gamma' \left\| \sum_{k=1}^n \mathbf{f}^*(k) e_k \right\|_{\ell_{1,\infty}}.$$

Это вместе с оценкой (71) и неравенством (69) дает нам (70), и доказательство предложения закончено.

Прежде чем продолжить доказательство теоремы 30, введем некоторые дополнительные обозначения. Пусть E – квазибанахово симметричное пространство последовательностей. Для данного $n \in \mathbb{N}$ определим оператор U_n^E , действующий из множества всех квадратных матриц размера $n \times n$ в n^n -мерное пространство ступенчатых функций в $L_1(0, 1)$, порожденное характеристическими функциями промежутков $\Delta_i := [(i-1)n^{-n}, in^{-n})$, $i = 1, \dots, n^n$. Чтобы задать этот оператор, рассмотрим множество $\{1, \dots, n\}^n$ и произвольное взаимно однозначное отображение ϕ этого множества в множество промежутков $\{\Delta_i\}_{i=1}^{n^n}$. Для каждой матрицы $\alpha = (\alpha_{i,j})_{i,j=1}^n$ ее образом $U_n^E(\alpha)$ является функция

$$U_n^E \alpha(t) := \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^n \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_{k,j_k} e_k \right\|_E \chi_{\Delta_{\phi(j_1, \dots, j_n)}}(t) \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Определение оператора U_n^E , разумеется, зависит от выбора отображения ϕ . Тем не менее, если X – симметричное пространство на $[0, 1]$, то норма $\|U_n^E(\alpha)\|_X$ от ϕ не зависит.

Далее, напомним, что матрица $\mu = (\mu_{i,j})_{i,j=1}^n$ называется *бистохастической*, если

$$\mu_{i,j} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n \mu_{i,j} = \sum_{j=1}^n \mu_{i,j} = 1, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Для каждой такой матрицы определим семейство $\xi^\mu = \{\xi_k^\mu\}_{k=1}^n$ независимых с. в., заданных на вероятностном пространстве $[0, 1]^n$ следующим образом. Если $k = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, n$ и $t = (t_1, \dots, t_n) \in [0, 1]^n$, то $\xi_k^\mu(t) = \xi_k^\mu(t_k) = 1/i$ на некотором подмножестве $[0, 1]$, мера которого равна $\mu_{i,k}$. Так как матрица μ бистохастическая, то

$$\sum_{k=1}^n \lambda \left\{ \xi_k^\mu = \frac{1}{i} \right\} = 1 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (72)$$

Кроме того, если для $t \in [0, 1]^n$ мы имеем $\xi_k^\mu(t) = 1/i_k$, где $1 \leq i_k \leq n$ ($1 \leq k \leq n$), то

$$\begin{aligned} \|\xi_k^\mu(t)\|_{l_{1,\infty}} &= \sup_{k=1, \dots, n} k \xi_k^\mu(t)^* = \sup_{r=1, \dots, n} \frac{1}{r} \text{card} \left\{ j : \xi_j^\mu(t) \geq \frac{1}{r} \right\} \\ &= \sup_{r=1, \dots, n} \frac{1}{r} \text{card} \{ k : j_k \leq r \}. \end{aligned}$$

В этих обозначениях мы можем следующим образом сформулировать результат, неявно содержащийся в доказательстве предложения 2.1 работы [59].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Предположим, что X – произвольное функциональное симметричное пространство, а E – квазибанахово симметричное пространство последовательностей, удовлетворяющее условию (i) (с. 57). Тогда для каждой матрицы $\alpha = (\alpha_{i,j})_{i,j=1}^n$ существует такая бистохастическая матрица $\mu = (\mu_{i,j})_{i,j=1}^n$, что*

$$\|U_n^E \alpha\|_X \leq 2 \|\max\{1, \|\xi^\mu\|_{1,\infty}\}\|_X \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_{(k-1)n+1}^* e_k \right\|_E,$$

где через $\{\alpha_j^*\}_{j=1}^{n^2}$ обозначается невозрастающая перестановка последовательности $\{|\alpha_{i,j}|\}_{i,j=1}^n$.

Применим теперь предложения 8 и 9 к доказательству теоремы 30. Так как X имеет свойство Круглова, то ввиду предложения 8

$$\|\xi^\mu\|_{1,\infty}\|_X \leq C_0 \left(\|\mathbf{f}_\xi^* \chi_{[0,1]}\|_X + \left\| \sum_{k=1}^n \mathbf{f}_\xi^*(k) e_k \right\|_{\ell_{1,\infty}} \right),$$

где $\mathbf{f}_\xi$ – дизъюнктивная сумма последовательности $\xi^\mu = \{\xi_k^\mu\}_{k=1}^n$. Так как из (72) немедленно следует, что

$$\mathbf{f}_\xi^*(u) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \chi_{[i-1,i)}(u),$$

то

$$\|\mathbf{f}_\xi^* \chi_{[0,1]}\|_X \leq 1 \quad \text{и} \quad \left\| \sum_{k=1}^n \mathbf{f}_\xi^*(k) e_k \right\|_{1,\infty} \leq 1.$$

Тем самым $\|\xi^\mu\|_{1,\infty}\|_X \leq 2C_0$, и, применяя предложение 9, мы получаем следующее весьма общее утверждение, которое можно рассматривать как аналог хорошо известных результатов Кwapеня–Шютта [6].

СЛЕДСТВИЕ 6. *Если функциональное симметричное пространство X имеет свойство Круглова, то для каждого $n \in \mathbb{N}$, для произвольного квазибанахова симметричного пространства последовательностей E , удовлетворяющего условию (i), и для любой матрицы $\alpha = (\alpha_{i,j})_{i,j=1}^n$ справедливо неравенство*

$$\|U_n^E \alpha\|_X \leq K_0 \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_{(k-1)n+1}^* e_k \right\|_E,$$

где константа K_0 зависит только от X .

Теперь мы готовы к тому, чтобы закончить доказательство теоремы 30. Так как пространство E симметрично, а функции f_k ($k = 1, \dots, n$) независимы, мы можем (и будем) предполагать, что функции $f_k(s_1, \dots, s_n) = f_k(s_k)$ определены на $[0, 1]^n$, неотрицательны и не возрастают. Каждую из них представим в виде суммы трех дизъюнктивных слагаемых следующим образом. Если $t_0 = \mathbf{f}^*(1)$, то

$f_k^1 := f_k \chi_{\{f_k > t_0\}}$, $f_k^2 := (f_k - f_k^1) \chi_{[0, 1/n]}$ и $f_k^3 := f - f_k^1 - f_k^2$. Заметим, что $\sum_{k=1}^n \lambda(\text{supp } f_k^i) \leq 1$, если $i = 1, 2$. Следовательно, ввиду условия (ii) (с. 57), а также по теореме 22

$$\left\| \left\| \sum_{k=1}^n f_k^i e_k \right\|_E \right\|_X \leq \left\| \sum_{k=1}^n f_k^i \right\|_X \leq 8 \|\mathcal{K}\|_{X \rightarrow X} \|f^* \chi_{[0, 1]}\|_X \quad (i = 1, 2). \quad (73)$$

Осталось показать, что аналогичная оценка справедлива и в случае $i = 3$. Для этого применим следствие 6. Как и в доказательстве теоремы 0.2 из [58], введем матрицу $\alpha = (\alpha_{i,j})_{i,j=1}^n$, где

$$\alpha_{i,j} := \sup_{j/n < s_i \leq (j+1)/n} f_i^3(s_i), \quad j = 1, \dots, n-1, \quad \alpha_{i,n} = 0.$$

Пусть $(j_1, \dots, j_n) \in \{1, \dots, n\}^n$. Тогда, если координаты вектора $s := (s_1, \dots, s_n)$ удовлетворяют неравенствам $j_i/n < s_i \leq (j_i + 1)/n$, то

$$\left\| \sum_{i=1}^n f_i^3(s_i) e_i \right\|_E \leq \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j_i} e_i \right\|_E$$

(заметим, что $f_i^3(s_i) = 0$, если $0 \leq s_i \leq 1/n$). Так как для любого $(j_1, \dots, j_n) \in \{1, \dots, n\}^n$ выполнено равенство

$$\lambda \left\{ s \in [0, 1]^n : \frac{j_i}{n} < s_i \leq \frac{j_i + 1}{n}, \quad i = 1, \dots, n \right\} = n^{-n},$$

то ввиду следствия 6 заключаем:

$$\left\| \left\| \sum_{k=1}^n f_k^3 e_k \right\|_E \right\|_X \leq \|U_n^E \alpha\|_X \leq K_0 \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_{(k-1)n+1}^* e_k \right\|_E. \quad (74)$$

Для оценки выражения из правой части неравенства (74) введем семейство независимых случайных величин $\{\tilde{f}_i\}_{i=1}^n$ на $[0, 1]^n$, определяемых данной матрицей $\alpha = (\alpha_{i,j})_{i,j=1}^n$ следующим образом:

$$\tilde{f}_i(t) = \tilde{f}_i(t_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} \chi_{[(j-1)/n, j/n]}(t_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Так как $\tilde{f}_i(t) \leq f_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$), то для дизъюнктивных сумм

$$\mathbf{f}(t) := \sum_{i=1}^n f_i(t - i + 1) \chi_{(i-1, i]}(t) \quad \text{и} \quad \tilde{\mathbf{f}}(t) := \sum_{i=1}^n \tilde{f}_i(t - i + 1) \chi_{(i-1, i]}(t) \quad (t > 0)$$

выполнено: $\tilde{\mathbf{f}}(t) \leq \mathbf{f}(t)$ ($t > 0$). Кроме того, $\tilde{\mathbf{f}}^*(k) = \alpha_{kn+1}^*$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) и

$$\alpha_1^* = \sup_{i=1, \dots, n} \sup_{0 < s_i \leq 1} f_i^3(s_i) \leq t_0 = \mathbf{f}^*(1).$$

Следовательно, если L – константа в неравенстве треугольника в пространстве E , то

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_{(k-1)n+1}^* e_k \right\|_E &\leq L \left(\alpha_1^* + \left\| \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{kn+1}^* e_k \right\|_E \right) \leq L \left(\mathbf{f}^*(1) + \left\| \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{\mathbf{f}}^*(k) e_k \right\|_E \right) \\ &\leq L \left(\mathbf{f}^*(1) + \left\| \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{f}^*(k) e_k \right\|_E \right) \leq 2L \left\| \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{f}^*(k) e_k \right\|_E, \end{aligned}$$

откуда ввиду (74) находим, что

$$\left\| \left\| \sum_{k=1}^n f_k^3 e_k \right\|_E \right\|_X \leq 2K_0 L \left\| \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{f}^*(k) e_k \right\|_E. \quad (75)$$

Так как для всех $t \in [0, 1]^n$

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k(t) e_k \right\|_E \leq L^2 \left(\left\| \sum_{k=1}^n f_k^1(t) e_k \right\|_E + \left\| \sum_{k=1}^n f_k^2(t) e_k \right\|_E + \left\| \sum_{k=1}^n f_k^3(t) e_k \right\|_E \right),$$

то утверждение теоремы 30 следует из соотношений (73) и (75).

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть функциональное симметричное пространство X имеет свойство Круглова, а E – произвольное (банахово) симметричное пространство последовательностей. Тогда существует константа $C > 0$, зависящая только от X , такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$ и произвольной последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$ верно следующее неравенство:

$$\begin{aligned} C^{-1} \left(\|\mathbf{f}^* \chi_{[0,1]}\|_X + \left\| \left\| \sum_{k=1}^n f_k e_k \right\|_E \right\|_{L_1} \right) &\leq \left\| \left\| \sum_{k=1}^n f_k e_k \right\|_E \right\|_X \\ &\leq C \left(\|\mathbf{f}^* \chi_{[0,1]}\|_X + \left\| \left\| \sum_{k=1}^n f_k e_k \right\|_E \right\|_{L_1} \right). \end{aligned} \quad (76)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Левое неравенство в (76) верно для любого симметричного пространства X и является непосредственным следствием предложения 7, а также того, что $\|f\|_{L_1} \leq \|f\|_X$ ($f \in X$). Чтобы получить правую оценку, заметим, что ввиду соотношения (61), примененного в частном случае $X = L_1$,

$$\left\| \sum_{k=1}^n \mathbf{f}^*(k) e_k \right\|_E \leq C' \left\| \left\| \sum_{k=1}^n f_k e_k \right\|_E \right\|_{L_1}.$$

Нужный нам результат следует отсюда и из неравенства (67).

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Оценка, полученная в теореме 30 (и точно так же оценка сверху в следствии 7), точна в следующем смысле. Если она верна в случае $E = \ell_1$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ и произвольной последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$, где X – сепарабельное или максимальное симметричное пространство на $[0, 1]$, то X имеет свойство Круглова (см. теоремы 22 и 23).

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Если банаховы пространства X и E максимальны, то, как нетрудно показать, неравенства (61), (67) и (76) будут верны также для бесконечных последовательностей $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$.

7. Неравенство Хинчина и его обобщения

Пусть, как и ранее, $r_k(t) = \text{sign} \sin 2^k \pi t$ ($k = 1, 2, \dots$) – функции Радемахера, определенные на отрезке $[0, 1]$. Неравенства Хинчина (1), приведенные в разделе 1, вызвали огромное количество исследований и обобщений, нашли многочисленные применения в самых различных разделах анализа (см., например, [3]). В частности, в 1975 г. В. А. Родин и Е. М. Семенов [66] доказали, что для симметричного пространства X на $[0, 1]$ оценка сверху

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_X \leq C \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right)^{1/2} \quad (77)$$

имеет место тогда и только тогда, когда X содержит пространство $(\exp L_2)_0$.

Доказанная в разделе 5 теорема 25 позволяет найти точные условия на симметричное пространство X , при которых в нем справедливо аналогичное неравенство с заменой скалярных кратных функций Радемахера произвольными независимыми функциями, в среднем равными нулю. Фактически мы рассмотрим вопрос о справедливости даже более общей оценки, когда норма ℓ_2 в правой части (77) заменена на норму произвольного симметричного пространства последовательностей $E \neq \ell_1$. Следующая теорема была доказана в работе [67] (см. также [68]).

ТЕОРЕМА 31. Пусть X – произвольное сепарабельное или максимальное симметричное пространство на $[0, 1]$. Следующие условия эквивалентны:

- (a) $X \in \mathbb{K}$;
- (b) существует такое $C > 0$, что для любой последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$, $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$ ($k = 1, 2, \dots$), выполнено:

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|_X \leq C \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \right)^{1/2} \right\|_X; \quad (78)$$

- (c) существуют такие симметричное пространство $E \neq \ell_1$ и константа $C > 0$, что для любой последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$, $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$ ($k = 1, 2, \dots$), выполнено:

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|_X \leq C \| (f_k) \|_E \|_X; \quad (79)$$

- (d) существуют такие симметричное пространство $E \neq \ell_1$ и константа $C > 0$, что (79) выполнено для любой последовательности симметрично распределенных независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$, удовлетворяющей условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\text{supp } f_k) \leq 1. \quad (80)$$

Далее нам понадобятся две леммы, первую из которых мы здесь только сформулируем (доказательство см. в [67]).

ЛЕММА 16. Пусть X – симметричное пространство на $[0, 1]$, а E – симметричное пространство последовательностей, $E \neq \ell_1$. Предположим, что для некоторого $C > 0$ и для любой последовательности симметрично распределенных независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$, удовлетворяющей условию (80), выполнено (79). Тогда аналогичное неравенство (возможно, с иной константой) имеет место и для произвольной последовательности независимых функций, удовлетворяющей условию (80).

Второе утверждение можно получить, используя общие соображения, связанные с теорией интерполяции операторов (см., например, [69; п. 12]), но мы предпочитаем дать его прямое доказательство.

ЛЕММА 17. Пусть E – симметричное пространство последовательностей, $E \neq \ell_1$. Тогда существует положительная однородная функция первой степени $\psi(u, v)$, возрастающая по каждому аргументу, такая, что $\lim_{u \rightarrow 0+} \psi(u, v) = 0$ и для всех $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_1$

$$\|a\|_E \leq \psi(\|a\|_{\ell_\infty}, \|a\|_{\ell_1}). \quad (81)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ϕ_E – фундаментальная функция пространства E , т. е. $\phi_E(n) = \left\| \sum_{k=1}^n e_k \right\|_E$ ($n \in \mathbb{N}$), где e_k – стандартные орты в пространстве последовательностей. Рассмотрим кусочно линейную функцию $\varphi(t)$ на $[0, \infty)$ такую, что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(n) = \phi(n)$ ($n \in \mathbb{N}$). Так как $\phi(n)$ возрастает, а $\phi(n)/n$ убывает, то $\varphi(t)$ квазивогнута при $t \geq 0$. Поэтому, если $\bar{\varphi}(t)$ – ее наименьшая вогнутая мажоранта, то (см. раздел 2 или [16; теорема 2.1.1])

$$\varphi(t) \leq \bar{\varphi}(t) \leq 2\varphi(t) \quad (t > 0). \quad (82)$$

Легко проверить, что $\psi(u, v) := v\bar{\varphi}(u/v)$ ($u, v > 0$) – положительная однородная функция первой степени, возрастающая по каждому аргументу. Кроме того, ввиду (82) и определения φ имеем: $\lim_{u \rightarrow 0+} \psi(u, v) = 0$.

Докажем соотношение (81). Пусть $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_1$. Не ограничивая общности, можно считать, что $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq 0$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим $a^n = \sum_{k=1}^n a_k e_k$. Так как $a^n = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) \sum_{i=1}^k e_i$, где $a_{n+1} = 0$, то ввиду вогнутости $\bar{\varphi}(t)$, соотношения (82), а также определения и свойств функции ψ получаем:

$$\begin{aligned} \|a^n\|_E &\leq \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) \varphi(k) \leq a_1 \sum_{k=1}^n \frac{a_k - a_{k+1}}{a_1} \bar{\varphi}(k) \\ &\leq a_1 \bar{\varphi}\left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k - a_{k+1}}{a_1} k\right) = \psi\left(a_1, \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) k\right) \leq \psi(\|a\|_{\ell_\infty}, \|a\|_{\ell_1}). \end{aligned}$$

Из того, что $\|a^n - a\|_{\ell_1} \rightarrow 0$, следует: $\|a^n - a\|_E \rightarrow 0$, и поэтому, переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем (81). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 31. (a) $\Rightarrow$ (b). Пусть $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ состоит из таких независимых функций, что $\int_0^1 f_k(t) dt = 0$ ($k = 1, 2, \dots$). Тогда по теореме 25 существует $C > 0$, зависящее лишь от пространства X , такое, что

$$\left\| \sum_{k=1}^\infty f_k \right\|_X \leq C \left\| \sum_{k=1}^\infty \mathbf{f}_k \right\|_{Z_X^2}. \quad (83)$$

Напомним, что $\mathbf{f}_k(t) = f_k(t - k + 1)\chi_{[k-1, k)}(t)$ ($t > 0$), а Z_X^2 – симметричное пространство на $(0, \infty)$ с квазинормой $\|g\|_{Z_X^2} := \|g^*\chi_{[0,1]}\|_X + \|g^*\chi_{[1,\infty)}\|_{L_2[1,\infty)}$. Поэтому, если $\mathbf{f} = \sum_{k=1}^\infty \mathbf{f}_k$, то по теореме 26 с $E = \ell_2$ получаем:

$$\left\| \sum_{k=1}^\infty \mathbf{f}_k \right\|_{Z_X^2} \leq \|\mathbf{f}^*\chi_{[0,1]}\|_X + \left(\sum_{k=1}^\infty \mathbf{f}^*(k)^2 \right)^{1/2} \leq 6 \left\| \left(\sum_{k=1}^\infty f_k^2 \right)^{1/2} \right\|_X.$$

Отсюда и из (83) сразу следует (78), и (b) доказано.

Импликации (b) $\Rightarrow$ (c) и (c) $\Rightarrow$ (d) очевидны.

(d) $\Rightarrow$ (a). По условию и лемме 16 соотношение (31) выполнено для произвольной последовательности независимых функций, удовлетворяющей условию (80). Применяя (31) к функциям $|f_k|$ ($k = 1, 2, \dots$) и учитывая (81), находим, что

$$\left\| \sum_{k=1}^\infty |f_k| \right\|_X \leq C \| (f_k) \|_E \|_X \leq C \|\psi(\|(f_k)\|_{l_\infty}, \|(f_k)\|_{l_1})\|_X. \quad (84)$$

Пусть $x, y \in X$, $x \neq 0$, $y \neq 0$. Так как ввиду свойств функции ψ для произвольных $s, t > 0$

$$\psi(x, y) \leq \max \left\{ \frac{x}{s}, \frac{y}{t} \right\} \psi(s, t) \leq \left(\frac{x}{s} + \frac{y}{t} \right) \psi(s, t),$$

то, взяв s и t так, что $\|x\|/s = \|y\|/t$, получим

$$\|\psi(x, y)\| \leq \left(\frac{\|x\|}{s} + \frac{\|y\|}{t} \right) \psi(s, t) \leq 2 \max \left\{ \frac{\|x\|}{s}, \frac{\|y\|}{t} \right\} \psi(s, t) = 2\psi(\|x\|, \|y\|).$$

Тем самым из (84) следует:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^\infty |f_k| \right\|_X &\leq 2C \psi(\|(f_k)\|_{l_\infty} \|_X, \|(f_k)\|_{l_1} \|_X) \\ &= 2C \left\| \sum_{k=1}^\infty |f_k| \right\|_X \psi \left(\frac{\|(f_k)\|_{l_\infty} \|_X}{\|(f_k)\|_{l_1} \|_X}, 1 \right), \end{aligned}$$

откуда

$$\psi \left(\frac{\|(f_k)\|_{l_\infty} \|_X}{\|(f_k)\|_{l_1} \|_X}, 1 \right) \geq \frac{1}{2C}.$$

Так как по лемме 17 $\lim_{u \rightarrow 0+} \psi(u, v) = 0$, то из последнего неравенства следует, что для некоторого $C_1 > 0$

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \right\|_X \leq C_1 \left\| \sup_{k=1,2,\dots} |f_k| \right\|_X.$$

Поэтому ввиду предложения 7 неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \right\|_X \leq C_1 \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{f}_k \right\|_X$$

выполнено для произвольной последовательности независимых функций, удовлетворяющих условию (4). Так как пространство X максимально или сепарабельно, то, применяя теоремы 22 и 23, получаем, что $X \in \mathbb{K}$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Если в качестве f_k ($k = 1, 2, \dots$) брать лишь скалярные кратные функций Радемахера, то результат будет совсем иным. Как доказано в [70], для каждого пространства последовательностей E , интерполяционного относительно пары (ℓ_1, ℓ_2) , найдется функциональное симметричное пространство X на $[0, 1]$, для которого имеет место двусторонняя оценка $C^{-1} \|(a_k)\|_E \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_X \leq C \|(a_k)\|_E$. Поэтому, разумеется, оценка справа в последнем неравенстве для некоторого $E \neq \ell_1$ ни в коей мере не гарантирует того, что аналогичная оценка будет верна и для ℓ_2 .

Применим теперь теорему 31 к изучению векторнозначных рядов вида

$$F(s, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(s) r_k(t) \quad (s, t \in [0, 1]),$$

где $\{f_k\}$ – произвольная последовательность независимых функций, а r_k – функции Радемахера. Если X – симметричное пространство на $I = [0, 1]$, то $X(I \times I)$ – соответствующее симметричное пространство на квадрате $I \times I$ с нормой $\|f\|_{X(I \times I)} = \|f^*\|_X$.

ТЕОРЕМА 32. Если симметричное пространство X сепарабельно или максимально, то следующие условия эквивалентны:

(α) $X \in \mathbb{K}$;

(β) существует такое $C > 0$, что для любой последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ выполнено:

$$C^{-1} \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \right)^{1/2} \right\|_X \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k(s) r_k(t) \right\|_{X(I \times I)} \leq C \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \right)^{1/2} \right\|_X; \quad (85)$$

(γ) существует такое $C > 0$, что для любой последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ выполнено:

$$C^{-1} \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \right)^{1/2} \right\|_X \leq \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k(s) r_k(t) \right\|_X dt \leq C \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \right)^{1/2} \right\|_X. \quad (86)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, заметим, что левые неравенства в (85) и (86) имеют место в любом симметричном пространстве. Проверим это, например, для (85). Ввиду безусловности последовательности $\{f_k(s)r_k(t)\}_{k=1}^\infty$ в $X(I \times I)$ с константой 1 [39; предложение 1.14], а также неравенств Хинчина (1) для L_1 с оптимальной константой $A_1 = 1/\sqrt{2}$ из [71] имеем:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^\infty f_k(s)r_k(t) \right\|_{X(I \times I)} &= \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^\infty f_k(s)r_k(t)r_k(u) \right\|_{X(I \times I)} du \\ &\geq \left\| \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^\infty f_k(s)r_k(t)r_k(u) \right| du \right\|_{X(I \times I)} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \left(\sum_{k=1}^\infty f_k^2 \right)^{1/2} \right\|_X. \end{aligned}$$

Доказательство левой части (86) совершенно аналогично.

Далее, так как функции $f_k(s)r_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) независимы и

$$\int_0^1 \int_0^1 f_k(s)r_k(t) ds dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

то по теореме 31 правое неравенство в (85) – непосредственное следствие (α). Докажем правое неравенство в (86). Пусть $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ – последовательность независимых функций. Тогда функции $g_k(s) = f_k(s) - \int_0^1 f_k(t) dt$ ($k = 1, 2, \dots$) также независимы и, кроме того, $\int_0^1 g_k(t) dt = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Поэтому, применяя теорему 31 к последовательности $\{g_k(\cdot)r_k(t)\}_{k=1}^\infty$ для фиксированного $t \in [0, 1]$ и учитывая в очередной раз, что $\|\chi_{[0,1]}\|_X = 1$ и $\|g\|_X \geq \int_0^1 |g(s)| ds$, получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^\infty f_k(s)r_k(t) \right\|_X dt &= \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^\infty \left(g_k(s) + \int_0^1 f_k(u) du \right) r_k(t) \right\|_X dt \\ &\leq \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^\infty g_k(s)r_k(t) \right\|_X dt + \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^\infty \int_0^1 f_k(u) du \cdot r_k(t) \right| dt \\ &\leq C \left\| \left(\sum_{k=1}^\infty g_k^2 \right)^{1/2} \right\|_X + \left(\sum_{k=1}^\infty \left(\int_0^1 f_k(u) du \right)^2 \right)^{1/2} \leq C \left\| \left(\sum_{k=1}^\infty f_k^2 \right)^{1/2} \right\|_X \\ &\quad + (C+1) \left(\sum_{k=1}^\infty \left(\int_0^1 f_k(u) du \right)^2 \right)^{1/2} \leq (2C+1) \left\| \left(\sum_{k=1}^\infty f_k^2 \right)^{1/2} \right\|_X. \end{aligned}$$

Пусть, наоборот, выполнено (β) или (γ) (точнее, правая часть (85) или (86)). Для доказательства (α) достаточно проверить, что пространство X удовлетворяет условию (d) теоремы 31. Предположим, что последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ состоит из симметрично распределенных независимых функций, удовлетворяющих (80). Еще раз применяя [39; предложение 1.14], заключаем, что $\{f_k\}$ безусловна с константой 1 в X . Поэтому, если выполнена правая часть (86), то

$$\left\| \sum_{k=1}^\infty f_k \right\|_X = \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^\infty f_k(s)r_k(t) \right\|_X dt \leq C \left\| \left(\sum_{k=1}^\infty f_k^2 \right)^{1/2} \right\|_X,$$

и (d) доказано. Кроме того, распределение $f_k(s)$ на I совпадает с распределением $f_k(s)r_k(t)$ на $I \times I$ ($k = 1, 2, \dots$). Действительно, так как f_k симметрично распределены, то для любого $\tau \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \lambda^2 \{(s, t) \in I \times I : f_k(s)r_k(t) > \tau\} \\ &= \frac{1}{2} (\lambda\{s \in I : f_k(s) > \tau\} + \lambda\{s \in I : -f_k(s) > \tau\}) = \lambda\{s \in I : f_k(s) > \tau\}. \end{aligned}$$

Значит, ввиду независимости функций f_k ($k = 1, 2, \dots$) и $f_k(s)r_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) соответственно получаем

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|_X = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k(s)r_k(t) \right\|_{X(I \times I)},$$

и тем самым (d) – следствие также и правой части (85). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Утверждения последней теоремы интересно сопоставить с двумя хорошо известными результатами. Ввиду первого из них в любом сепарабельном или максимальном симметричном пространстве X следующие условия эквивалентны: (i) существует такое $C > 0$, что для произвольной последовательности функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ выполнено соотношение (85), и (ii) нижний индекс Бойда α_X положителен (импликация (ii) $\Rightarrow$ (i) доказана в [17; предложение 2.d.1], а импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) – в [72]). Второй (неравенство Морэ) говорит о том, что если X является q -вогнутой банаховой решеткой [17; определение 1.d.3] при некотором $q < \infty$, то существует такое $C > 0$, что (86) выполнено для произвольной последовательности функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ [17; теорема 1.d.6(i)]. Заметим, что, с одной стороны, в обоих упомянутых утверждениях коэффициенты ряда – произвольные функции, а с другой, условия выполнения неравенств (85) и (86) в них гораздо более ограничительные, чем условие (α) теоремы 32.

В симметричных пространствах, “близких” к L_{∞} , неравенство Морэ, о котором шла речь в предыдущем абзаце, вообще говоря, неверно. Тем не менее, в последние годы были получены оценки норм полиномов по системам независимых функций и в таких пространствах. Об этом речь пойдет в следующем разделе.

8. Оценки норм полиномов по системам независимых функций в пространствах, “близких” к L_{∞}

Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ – система независимых случайных величин на вероятностном пространстве $(T, \mathcal{T}, \tau)$, а $\{f_i\}_{i=1}^n$ – система измеримых функций на другом вероятностном пространстве (X, Σ, μ) . Рассмотрим математическое ожидание (относительно τ)

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i(t) f_i(x) \right\|_{L_{\infty}(\mu)}. \quad (87)$$

Классический результат Р. Салема и А. Зигмунда [73] утверждает, что для некоторого $C > 0$ и всех $n \in \mathbb{N}$

$$C^{-1}(n \ln n)^{1/2} \leq \mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^n r_j(t) e^{2\pi i j x} \right\|_{L_\infty} \leq C(n \ln n)^{1/2}, \quad (88)$$

где, как и ранее, $r_i(t)$ – функции Радемахера на $[0, 1]$.

В монографиях [74] и [75] детально изучена более общая ситуация, связанная с поведением величины (87) в случае, когда $\{f_i\}$ – система характеров на локально компактной абелевой группе G , определенных в компактной симметричной окрестности V единичного элемента $e \in G$. Доказательство нижних оценок для величины (87) при этом основывается на ее сравнении с величиной

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \gamma_i(t) f_i(x) \right\|_{L_\infty(\mu)}, \quad (89)$$

где $\{\gamma_i\}_{i=1}^\infty$ – система независимых гауссовских с.в., $\mathbb{E} \gamma_i = 0$, $\mathbb{E} \gamma_i^2 = 1$ ($i = 1, 2, \dots$). Решающее значение при этом имеют различные варианты известной леммы Слепяна, позволяющие оценивать снизу выражения вида

$$\mathbb{E} \max_{1 \leq k \leq m} \left| \sum_{i=1}^n \gamma_i(t) f_i(x_k) \right|,$$

а тем самым и величину (89) при условии, что точки $x_1, \dots, x_m$ выбраны в V так, что векторы

$$W_{x_k} = (f_1(x_k), \dots, f_n(x_k)) \in \mathbb{C}^n \quad (k = 1, \dots, m)$$

расположены достаточно далеко друг от друга в евклидовой метрике $\mathbb{C}^n$. Таким образом, оценка снизу для (89) может быть получена только при условии контроля ε -энтропии в ℓ_2^n -метрике множества $\{W_x\}_{x \in V}$. Последнее является нетривиальной задачей даже в относительно простых случаях.

В работах Б. С. Кашина и Л. Цафрири [76] и [77] для решения рассматриваемой задачи был предложен новый интересный метод, основанный на применении версии двумерной центральной предельной теоремы с оценкой остаточного члена. Оказалось, что при его использовании достаточно обеспечить малость *среднего*

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n |(W_{x_i}, W_{x_j})|^2.$$

Последнее сделать, конечно, гораздо легче, чем гарантировать выполнение аналогичного условия для энтропии множества $\{W_{x_i}\}_{i=1}^n$, т.е. малость *всех* скалярных произведений (W_{x_i}, W_{x_j}) ($1 \leq i \neq j \leq n$). Благодаря этому удается показать, что нижняя оценка в (88) остается справедливой для случайных полиномов по *любой* ортонормированной ограниченной в L_3 системе. Приведем формулировку теоремы, доказанной в [76].

ТЕОРЕМА 33. Для любого $M > 0$ существуют константы $C_j = C_j(M) > 0$ ($j = 1, 2, 3$) и $q = q(M) > 0$ со следующим свойством: для каждой системы функций $\{f_i\}_{i=1}^n$ такой, что

$$(a) \|f_i\|_{L_2(\mu)} = 1 \text{ и } \|f_i\|_{L_3(\mu)} \leq M \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$(b) \left\| \sum_{i=1}^n a_i f_i \right\|_{L_2(\mu)} \leq M \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^{1/2} \text{ для всех } a_i \in \mathbb{C},$$

и каждой последовательности с. в. $\{\xi_i\}_{i=1}^n$, определенных на вероятностном пространстве $(T, \mathcal{T}, \tau)$, такой, что

$$(c) \xi_i \text{ независимы, } E\xi_i = 0, E|\xi_i|^2 = 1 \text{ и } (E|\xi_i|^3)^{1/3} \leq M \quad (i = 1, \dots, n),$$

выполнено:

$$\tau \left\{ t \in T : \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i(t) f_i \right\|_{L_\infty(\mu)} \leq C_1 (n \ln n)^{1/2} \right\} \leq C_2 n^{-q},$$

и, в частности,

$$E \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i f_i \right\|_{L_\infty(\mu)} \geq C_3 (n \ln n)^{1/2}.$$

В работе [77] было получено обобщение последней теоремы для “случайных” норм вида

$$\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i(t) a_i f_i(x) \right\|_{L_\infty(\mu)},$$

где $a_i \in \mathbb{C}$. Там же было отмечено, что на самом деле аналогичные оценки снизу верны не только для L_∞ -нормы, но и для введенной там же так называемой интегрально-равномерной нормы

$$\|f\|_{m,\infty} = \int_X \cdots \int_X \max\{|f(x_1)|, \dots, |f(x_m)|\} d\mu(x_1) \cdots d\mu(x_m),$$

где $m \in \mathbb{N}$, а f – произвольная интегрируемая функция на вероятностном пространстве (X, Σ, μ) . Несомненно, что оценки для норм $\|\cdot\|_{m,\infty}$ представляют значительный интерес, так как последние несут в себе содержательную информацию о распределении функции f . Прежде всего, как нетрудно показать,

$$\|f\|_{m,\infty} = \int_0^\infty (1 - (1 - n_f(z))^m) dz,$$

где $n_f(z) = \mu\{x \in X : |f(x)| > z\}$. Отсюда, в частности, следует, что $\|f\|_1 \leq \|f\|_{m,\infty} \leq \|f\|_\infty$ и $\|f\|_{m,\infty} \rightarrow \|f\|_\infty$ при $m \rightarrow \infty$. Кроме того, как показано в [78; предложение 2] и независимо в [79; теорема 2], с константами, не зависящими от $m \in \mathbb{N}$,

$$\|f\|_{m,\infty} \asymp m \int_0^{1/m} f^*(t) dt. \quad (90)$$

Следующее обобщение результатов Б. С. Кашина и Л. Цаффрири было получено П. Г. Григорьевым в [80; теорема 1] (см. также [81; теорема 1]).

ТЕОРЕМА 34. Пусть $\{f_i\}_{i=1}^n$ и $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ – множества функций, определенных на вероятностных пространствах (X, Σ, μ) и $(T, \mathcal{T}, \tau)$ соответственно и удовлетворяющих условиям (а) и (с) теоремы 33. Предположим также, что набор $(a_i)_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$ зафиксирован и для всех $(c_i)_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$ выполнено неравенство

$$\left\| \sum_{i=1}^n c_i f_i \right\|_{L_2(\mu)} \leq MR(\{a_i\})^p \left(\sum_{i=1}^n |c_i|^2 \right)^{1/2},$$

где $M > 0$ и $p \in [0, 1/2)$ – некоторые константы, а

$$R = R(\{a_i\}) = \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^4 \right)^{-1}.$$

Тогда существуют константы $q = q(p, M) > 0$, $C_j = C_j(p, M) > 0$ ($j = 1, 2, 3$), для которых справедливы следующие неравенства:

$$\tau \left\{ t \in T : \left\| \sum_{i=1}^n a_i \xi_i(t) f_i \right\|_{m, \infty} \leq C_1 \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \ln P \right)^{1/2} \right\} \leq \frac{C_2}{P^q} \quad (91)$$

и

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n a_i \xi_i f_i \right\|_{m, \infty} \geq C_3 \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \ln P \right)^{1/2}, \quad (92)$$

где $P := \min\{m, R\} + 1$.

В той же работе показано, что при $m \leq n$ и некоторых ограничениях на последовательность $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ оценка (92) точна по порядку.

ТЕОРЕМА 35. Пусть ξ_i ($i = 1, \dots, n$) – независимые с. в., для распределений полиномов относительно которых справедлива экспоненциальная оценка:

$$\tau \left\{ t \in T : \left| \sum_{i=1}^n c_i \xi_i(t) \right| \geq s \left(\sum_{i=1}^n |c_i|^2 \right)^{1/2} \right\} \leq C_4 e^{-C_5 s^2} \quad (s > 0), \quad (93)$$

где константы $C_4 > 0$ и $C_5 > 0$ не зависят от последовательности коэффициентов $\{c_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$. Тогда существует такая абсолютная константа $C_6 > 0$, что для каждого $m \geq 1$ и произвольных $f_i \in L_1(X)$ ($i = 1, \dots, n$) выполнено:

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i f_i \right\|_{m, \infty} \leq C_6 \left\| \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2 \right)^{1/2} \right\|_{m, \infty} \sqrt{1 + \ln m}. \quad (94)$$

В частности, если $f_i \in L_\infty(X)$ ($i = 1, \dots, n$), то

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i f_i \right\|_{m, \infty} \leq C_6 \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_\infty^2 \right)^{1/2} \sqrt{1 + \ln m}.$$

СЛЕДСТВИЕ 8. Предположим, что $\|f_i\|_{L_\infty(X)} \leq M$ ($i = 1, \dots, n$), а с. в. ξ_i ($i = 1, \dots, n$) независимы и удовлетворяют экспоненциальной оценке (93). Тогда для произвольных $a_i \in \mathbb{C}$

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n a_i \xi_i f_i \right\|_{m, \infty} \leq MC_6 \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^{1/2} \sqrt{1 + \ln m}.$$

Тем самым, если $m \leq n$ и $m \leq C_7 R(\{a_i\}_{i=1}^n)$ (см. теорему 34), то неравенство (92) из теоремы 34 при этих условиях точно по порядку.

В работе [79] в случае $a_i = 1$ ($i = 1, \dots, n$) П. Г. Григорьеву удалось распространить утверждение теоремы 34 на системы $\{f_i\}$, вообще говоря, неограниченные в L_p при $p > 1$.

ТЕОРЕМА 36. Пусть последовательность функций $\{f_i\}_{i=1}^n$, определенных на вероятностном пространстве (X, Σ, μ) , такова, что $\|f_i\|_{L_1(\mu)} = 1$ ($i = 1, \dots, n$) и $\left\| \sum_{i=1}^n \theta_i f_i \right\|_{L_1(\mu)} \leq Mn^{1/2+p}$ для всех наборов знаков $(\theta_i)_{i=1}^n$, $\theta_i = \pm 1$, с некоторыми константами $M > 0$ и $p \in [0, 1/12]$. Кроме того, предположим, что последовательность $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ с. в., определенных на вероятностном пространстве $(T, \mathcal{T}, \tau)$, удовлетворяет условию (с) теоремы 33.

Тогда при любом $m \leq n$ справедливо неравенство

$$\tau \left\{ t \in T : \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i(t) f_i \right\|_{m, \infty} \leq C'_1 (n(1 + \ln m))^{1/2} \right\} \leq C'_2 m^{-q'},$$

и, значит,

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i f_i \right\|_{m, \infty} \geq C'_3 (n(1 + \ln m))^{1/2}$$

с некоторыми константами $q' = q'(p) > 0$ и $C'_j = C'_j(p, M) > 0$ ($j = 1, 2, 3$).

Из последней теоремы, определения нормы в пространстве Марцинкевича (см. раздел 2), а также соотношения (90) сразу же вытекает следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 9. Пусть $\varphi \in \Psi$. Тогда, если выполнены условия теоремы 36, то

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i f_i \right\|_{M(\varphi)} \geq A \sqrt{n} \max_{m=2, \dots, n} \left\{ \frac{\sqrt{\ln m}}{m \varphi(1/m)} \right\}$$

с некоторой константой $A > 0$.

9. Изоморфизмы между симметричными пространствами на $[0, 1]$ и $[0, \infty)$

Общая проблема существования изоморфизмов между симметричными пространствами на $[0, 1]$ и на $[0, \infty)$ (отличными от L_p -пространств) впервые была поставлена Б. С. Митягиным в [82]. Этот и другие близкие вопросы интенсивно изучались в [38] (см. также [17]) на основе подхода, использующего конструкцию стохастического интеграла относительно симметризованного пуассоновского процесса. Здесь мы будем следовать идеям нашей работы [52], где был предложен технически значительно более простой подход, основанный на применении теоремы 25; заметим, что аналогичные аргументы применялись ранее в работе [34] в специальном случае пространств Лоренца $L_{p,q}$. Первая часть следующей теоремы усиливает результаты работы [38] об изоморфном

вложении некоторого симметричного пространства на полуоси в данное симметричное пространство X на $[0, 1]$, заменяя условие нетривиальности нижнего индекса Бойда X на более слабое условие ограниченности оператора $\mathcal{H}$. Вторая часть теоремы доказана в [83]. Ранее (см. [38; § 8] или [17; с. 203]) аналогичное утверждение было известно лишь в случае, когда симметричное пространство X имеет нетривиальные индексы Бойда.

ТЕОРЕМА 37. (i) *Если оператор $\mathcal{H}$ ограниченно действует в симметричном пространстве X , то X содержит подпространство, изоморфное пространству Z_X^2 .*

(ii) *Если симметричное пространство X максимально или сепарабельно и оператор $\mathcal{H}$ ограниченно действует в X и в $X^\times$, то пространства X и Z_X^2 изоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\Omega, \mathcal{P}) := \prod_{k=1}^{\infty} ([0, 1], \lambda_k)$ (как и ранее, λ_k – мера Лебега). Тогда по теореме 25 линейный оператор

$$Qx(t, \omega_1, \omega_2, \dots) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k(\omega_k) r_k(t), \quad \text{где } x_k(\omega_k) = x(k-1 + \omega_k) \quad (0 \leq \omega_k \leq 1),$$

ограниченно действует из пространства Z_X^2 в пространство $X(\Omega \times [0, 1])$. Кроме того, ввиду теоремы 9 (см. первое из неравенств (26)) существует такая константа $c > 0$, что $\|Qf\|_{X(\Omega \times [0, 1])} \geq c\|f\|_{Z_X^2}$. Тем самым, образ оператора $\text{Im}(Q)$ как подпространство в $X(\Omega \times [0, 1])$ изоморфен пространству Z_X^2 . Так как пространства X и $X(\Omega \times [0, 1])$ изометричны, то утверждение (i) доказано.

Перейдем к доказательству (ii). Покажем, что образ $\text{Im}(Q)$ оператора Q , состоящий из всех функций $g \in X(\Omega \times [0, 1])$, представимых в виде суммы ряда

$$g(t, \omega_1, \omega_2, \dots) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(\omega_k) r_k(t),$$

который сходится п. в. на $\Omega \times [0, 1]$, дополняем в пространстве $X(\Omega \times [0, 1])$.

Определим на $L_1(\Omega \times [0, 1])$ последовательность условных математических ожиданий

$$\mathbb{E}(g | \omega_k)(\omega_k) := \left(\int_0^1 \int_0^1 \dots \right) g(t, \omega_1, \omega_2, \dots) dt d\omega_1 \dots d\omega_{k-1} d\omega_{k+1} \dots \quad (k \geq 1),$$

а также оператор

$$Pg(t, \omega_1, \omega_2, \dots) := \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(gr_k | \omega_k) r_k(t).$$

Обозначим

$$\langle f, g \rangle := \left(\int_0^1 \int_0^1 \dots \right) f(t, \omega_1, \omega_2, \dots) g(t, \omega_1, \omega_2, \dots) dt d\omega_1 d\omega_2 \dots$$

Непосредственная проверка показывает, что для произвольных $x, y \in L_2(0, \infty)$

$$\langle Qx, Qy \rangle = \int_0^\infty x(t)y(t) dt \quad (95)$$

и что оператор P самосопряжен, т. е. для любых $f, g \in L_2(\Omega \times [0, 1])$

$$\langle Pf, g \rangle = \langle f, Pg \rangle. \quad (96)$$

Докажем, что P ограничен в $X(\Omega \times [0, 1])$. Для этого сначала проверим, что для любой $f \in L_\infty(\Omega \times [0, 1])$

$$x(t) := \sum_{k=1}^{\infty} E(fr_k | \omega_k)(t + k - 1) \chi_{[k-1, k)}(t) \in L_\infty \cap L_2(0, \infty). \quad (97)$$

Во-первых, легко видеть, что $|E(fr_k | \omega_k)| \leq \|f\|_\infty$ ($k = 1, 2, \dots$), откуда следует, что $x \in L_\infty$. Кроме того, ввиду очевидного неравенства

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^1 \cdots \left(\int_0^1 f(u, \omega_1, \dots, \omega_{k-1}, t, \omega_{k+1}, \dots) r_k(u) du \right) d\omega_1 \cdots d\omega_{k-1} d\omega_{k+1} \cdots \right)^2 \\ & \leq \int_0^1 \cdots \left(\int_0^1 f(u, \omega_1, \dots, \omega_{k-1}, t, \omega_{k+1}, \dots) r_k(u) du \right)^2 d\omega_1 \cdots d\omega_{k-1} d\omega_{k+1} \cdots, \end{aligned}$$

верного для произвольных $0 \leq t \leq 1$ и $k = 1, 2, \dots$, а также неравенства Бесселя имеем:

$$\begin{aligned} \|x\|_{L_2(0, \infty)}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \left(\int_0^1 \cdots f(u, \omega_1, \dots, \omega_{k-1}, t, \omega_{k+1}, \dots) \right. \\ & \quad \left. \times r_k(u) du d\omega_1 \cdots d\omega_{k-1} d\omega_{k+1} \cdots \right)^2 dt \\ &\leq \left(\int_0^1 \int_0^1 \cdots \right) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^1 f(u, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k, \dots) r_k(u) du \right)^2 d\omega_1 d\omega_2 \cdots d\omega_k \cdots \\ &\leq \left(\int_0^1 \int_0^1 \cdots \right) f(u, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k, \dots)^2 du d\omega_1 d\omega_2 \cdots = \|f\|_2^2 \leq \|f\|_\infty^2. \end{aligned}$$

Итак, (97) доказано, и, значит, $x \in Z_X^2$. При этом $Pf = Qx$. Так как по условию X сепарабельно или максимально, то, как легко проверить, соответствующим свойством будет обладать и пространство Z_X^2 . Кроме того, $(Z_X^2)^\times = Z_{X^\times}^2$. Ввиду другого условия теоремы $\mathcal{K}: X \rightarrow X$. Таким образом, по теореме 25 получаем:

$$\begin{aligned} \|Pf\|_{X(\Omega \times [0, 1])} &= \|Qx\|_{X(\Omega \times [0, 1])} \leq C \|x\|_{Z_X^2} \\ &= C \sup \left\{ \left| \int_0^\infty x(t)y(t) dt \right| : \|y\|_{Z_{X^\times}^2} \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Так как оператор $\mathcal{K}$ ограничен также и в $X^\times$, то из соотношений (95), (96), и опять теоремы 25 (но уже примененной к $X^\times$) следует:

$$\begin{aligned} \|Pf\|_{X(\Omega \times [0, 1])} &\leq C \sup \{ |\langle Qx, Qy \rangle| : \|y\|_{Z_{X^\times}^2} \leq 1 \} \\ &= C \sup \{ |\langle Pf, Qy \rangle| : \|y\|_{Z_{X^\times}^2} \leq 1 \} = C \sup \{ |\langle f, Qy \rangle| : \|y\|_{Z_{X^\times}^2} \leq 1 \} \\ &\leq C \sup \{ \|Qy\|_{X^\times(\Omega \times [0, 1])} : \|y\|_{Z_{X^\times}^2} \leq 1 \} \|f\|_{X(\Omega \times [0, 1])} \leq CC' \|f\|_{X(\Omega \times [0, 1])}. \end{aligned}$$

В итоге для всех $f \in L_\infty(\Omega \times [0, 1])$ выполнено неравенство

$$\|Pf\|_{X(\Omega \times [0, 1])} \leq CC' \|f\|_{X(\Omega \times [0, 1])}.$$

Так как по условию X сепарабельно или максимально, то, применяя стандартные рассуждения, заключаем, что проектор P ограничен в этом пространстве. Кроме того, легко видеть, что его образ $\text{Im}(P)$ совпадает с образом $\text{Im}(Q)$ оператора Q . Следовательно, подпространство $\text{Im}(Q)$ (которое ввиду уже доказанной первой части теоремы изоморфно Z_X^2) дополняемо в $X(\Omega \times [0, 1])$, которое изоморфно X . С другой стороны, очевидно, что X изоморфно дополняемому подпространству пространства Z_X^2 . Так как $X \oplus X$ (соответственно $Z_X^2 \oplus Z_X^2$) изоморфно X (соответственно Z_X^2), то в итоге, применяя метод декомпозиции Пелчинского [17; с. 172], получаем изоморфность X и Z_X^2 . Теорема доказана.

Следующий результат, показывающий тесную связь между стохастическим интегралом Пуассона (который является ключевым средством в конструкциях [38; § 8] и [17; 2.f]) и оператором Круглова $\mathcal{K}$, доказан в [52].

Оператор стохастического интегрирования относительно симметризованного процесса Пуассона (обозначим его через T) определен на функциях, измеримых на полуоси $(0, \infty)$ [17; с. 205–206]. Если f – функция на $[0, 1]$, то $Tf := T'f - T''f$, где

$$T'f(u, v) := \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{F'_k}(u) \sum_{j=1}^k f(\varphi'_j(v)) \quad (u, v \in [0, 1]).$$

Здесь $\{F'_k\}_{k \geq 0}$ – разбиение отрезка $[0, 1]$ на попарно дизъюнктные подмножества, $\lambda(F'_k) = 1/(ek!)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, а $\{\varphi'_j\}_{j=1}^{\infty}$ – последовательность независимых с.в., равномерно распределенных на $[0, 1]$. Подобным же образом определяется и функция $T''f$, при этом соответствующие последовательности $\{F''_k\}_{k \geq 0}$ и $\{\varphi''_j\}_{j=1}^{\infty}$ независимы относительно последовательностей $\{F'_k\}_{k \geq 0}$ и $\{\varphi'_j\}_{j=1}^{\infty}$ соответственно. Таким образом, функции $T'f$ и $T''f$ одинаково распределены и независимы. В случае функций f , определенных на $(0, \infty)$, рассмотрим функции $f_n := f\chi_{(n-1, n)}$ ($n = 1, 2, \dots$). Тогда, если функции b_n – независимые копии f_n , заданные на $[0, 1]$, то по определению $Tf := \sum_{n=1}^{\infty} T f_n$, где $T f_n$ – независимые копии $T b_n$ ($n = 1, 2, \dots$).

С помощью оператора Круглова в [52] получена характеристика симметричных пространств X таких, что оператор T ограниченно действует из Z_X^2 в X . Это усиливает результаты [38; § 8] (см. также [17; 2.f]), где было найдено достаточное условие: $\alpha_X > 0$.

ТЕОРЕМА 38. *Если X – сепарабельное или максимальное симметричное пространство на $[0, 1]$, то оператор T ограничен из Z_X^2 в X тогда и только тогда, когда оператор $\mathcal{K}$ ограничен в X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала оператор T ограничен из Z_X^2 в X . Если f определена на $[0, 1]$, то последовательность $\{f(\varphi'_j)\}_{j=1}^{\infty}$ из определения оператора T состоит из независимых с.в., имеющих то же распределение, что и f . Следовательно (см. (33)), с.в. $T'f$ и $\mathcal{K}f$ одинаково распределены и, значит,

выполнено $\|T'f\|_X = \|\mathcal{K}f\|_X$. Более того, ввиду независимости $T'f$ и $T''f$ для любого $\tau > 0$

$$\begin{aligned} \lambda^2 \{(u, v) : |Tf(u, v)| > \tau\} &\geq \lambda^2 \{(u, v) : |T'f(u, v)| > \tau \text{ и } u \in F_0''\} \\ &= e^{-1} \lambda^2 \{(u, v) : |T'f(u, v)| > \tau\}, \end{aligned}$$

и, таким образом, согласно предложению 1 $\|\mathcal{K}f\|_X = \|T'f\|_X \leq e\|Tf\|_X$. Итак, если оператор $T: Z_X^2 \rightarrow X$ ограничен, то ограничен и оператор $\mathcal{K}: X \rightarrow X$.

Наоборот, предположим, что $\mathcal{K}: X \rightarrow X$ ограничен. Если f определена на $[0, 1]$, то по предыдущему

$$\|Tf\|_X = \|T'f - T''f\|_X \leq 2\|\mathcal{K}f\|_X. \quad (98)$$

Пусть теперь функция $f \in Z_X^2$ произвольна. Так как операторы T' и T'' положительны, то ввиду определения T [17; с. 207] можно предположить, что f неотрицательна. Обозначим $f_n := f\chi_{(n-1, n)}$ ($n = 1, 2, \dots$). Легко видеть, что существуют такие последовательности $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{h_n\}_{n=1}^\infty$, что $f_n = g_n + h_n$, $g_n h_n = 0$ и $\int_{n-1}^n g_n(t) dt = \int_{n-1}^n h_n(t) dt$ ($n = 1, 2, \dots$). Поэтому, если $f'_n := g_n - h_n$, то $|f'_n| = f_n$ и $\int_{n-1}^n f'_n(t) dt = 0$, $n = 1, 2, \dots$.

Далее, пусть b_n – определенные на $[0, 1]$ независимые копии функций f'_n ($n = 1, 2, \dots$). По теореме 25 имеем

$$\left\| \sum_{k=1}^n b_k \right\|_X \leq C \left\| \sum_{k=1}^n f'_k \right\|_{Z_X^2} = C \left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_{Z_X^2}. \quad (99)$$

Кроме того, из определения T [17; с. 207] следует, что $\{Tf_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{Tb_n\}_{n=1}^\infty$ – две последовательности независимых симметрично распределенных с. в., а также что Tf_n и Tb_n одинаково распределены для любого $n = 1, 2, \dots$. Поэтому ввиду (98), (99) и ограниченности оператора $\mathcal{K}$ в пространстве X

$$\begin{aligned} \left\| T \left(\sum_{k=1}^n f_k \right) \right\|_X &= \left\| \sum_{k=1}^n Tf_k \right\|_X = \left\| \sum_{k=1}^n Tb_k \right\|_X = \left\| T \left(\sum_{k=1}^n b_k \right) \right\|_X \\ &\leq 2 \left\| \mathcal{K} \left(\sum_{k=1}^n b_k \right) \right\|_X \leq 2 \|\mathcal{K}\|_{X \rightarrow X} \left\| \sum_{k=1}^n b_k \right\|_X \\ &\leq 2 \|\mathcal{K}\|_{X \rightarrow X} C \left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_{Z_X^2} \leq 2 \|\mathcal{K}\|_{X \rightarrow X} C \|f\|_{Z_X^2} \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Так как X сепарабельно или максимально, то, применяя стандартные аргументы, заключаем, что оператор $T: Z_X^2 \rightarrow X$ ограничен. Теорема доказана.

Из теоремы 38 и теоремы 2.f.1(i) из [17] вытекает следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 10. Если симметричное пространство X сепарабельно или максимально и $X \in \mathbb{K}$, то образ оператора стохастического интегрирования относительно симметризованного процесса Пуассона изоморфен пространству Z_X^2 .

10. Гильбертовы подпространства симметричных пространств, порожденные независимыми функциями

Задача описания подпространств симметричных пространств, порожденных последовательностями независимых функций, рассматривалась во многих работах (см., например, [34], [39], [84]). Покажем, что при ее решении весьма эффективным образом может быть использовано свойство Круглова.

Пусть X – симметричное пространство на $[0, 1]$. Рассмотрим вопрос о том, каким условиям должно удовлетворять X , чтобы каждая последовательность независимых одинаково распределенных ненулевых функций из X натягивала в нем гильбертово подпространство. Нетрудно показать [85; теорема 3.4], что это эквивалентно существованию $C > 0$, для которого неравенство

$$C^{-1} \|f_1\|_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k \right\|_X \leq C \|f_1\|_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right)^{1/2} \quad (100)$$

верно для любой такой последовательности $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ и всех $(a_k)_{k=1}^{\infty} \in l_2$. Левая часть (100) выполнена в произвольном симметричном пространстве X [39; лемма 1, с. 52], так что с этой точки зрения интересна лишь его правая часть. Следующие необходимые условия для выполнения неравенства (100) перечислены в [39; с. 71]:

(а) пространство X содержит пространство $(\exp L_2)_0$;

(б) $\int_0^1 f_1(x) dx = 0$;

(с) $f_1 \in L_2$.

Первое из них – непосредственное следствие теоремы Родина и Семенова (см. начало раздела 7 или [66]): достаточно в качестве f_k взять функции Радемахера. Так как f_k одинаково распределены, то второе условие вытекает из оценки

$$Cn^{1/2} \geq \left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_X \geq \mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^n f_k \right| \geq \left| \mathbb{E} \sum_{k=1}^n f_k \right| = n |\mathbb{E} f_1| \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Проверим условие (с). Для произвольной последовательности независимых одинаково распределенных функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ положим: $g_k := f_{2k} - f_{2k-1}$ ($k = 1, 2, \dots$). Тогда g_k симметрично и одинаково распределены и независимы. Следовательно, для них также выполнено соотношение (100). Для каждого $a > 0$ определим $g_{k,a} := g_k \chi_{\{|g_k| < a\}}$ и $h_{k,a} := g_k - 2g_{k,a}$. Ввиду симметричности g_k функции $h_{k,a}$ и g_k одинаково распределены. Следовательно,

$$\mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^n g_{k,a} \right| = \frac{1}{2} \mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^{\infty} (g_k - h_{k,a}) \right| \leq \mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^n g_k \right| \leq C_1 n^{1/2}.$$

Положим $\sigma^2(a) := \mathbb{E} g_{1,a}^2$, и пусть γ – гауссовская с.в., $\mathbb{E} \gamma = 0$, $\mathbb{E} \gamma^2 = 1$. Тогда по центральной предельной теореме [50] $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left| n^{-1/2} \sum_{k=1}^n g_{k,a} \right| = \sigma(a) \mathbb{E} |\gamma|$,

откуда ввиду предыдущего неравенства находим, что $\sigma(a)E|\gamma| \leq C_1$ для каждого $a > 0$. Переходя к пределу при $a \rightarrow \infty$, получаем: $Eg_1^2 < \infty$, а значит, и $Ef_1^2 < \infty$.

Чтобы сформулировать первый результат об условиях, достаточных для выполнения (100), нам понадобятся некоторые обозначения из [39; § 3.2]. Для произвольных числовой последовательности $a = (a_k)_{k=1}^\infty$ и измеримой функции f на $[0, 1]$ положим

$$Q_a f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda\{s \in [0, 1] : |a_k f(s)| > t\}, \quad t > 0. \quad (101)$$

Говорят, что функция f имеет свойство $A_2(X)$ ($f \in A_2(X)$), если для каждой $a \in \ell_2$ пространство X содержит все функции g , удовлетворяющие условию: $\lambda\{s \in [0, 1] : |g(s)| > t\} \leq C Q_a f(t)$ ($t > 0$) для некоторого $C > 0$.

ТЕОРЕМА 39 [39; теорема 3.7]. *Если симметричное пространство X имеет свойство Круглова и $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ – такая последовательность независимых одинаково распределенных функций, что $f_1 \in A_2(X)$, $f_1 \in L_2$ и $\int_0^1 f_1(x) dx = 0$, то выполнено (100).*

Доказательство последнего утверждения в [39; § 3.2] основывается на теории безгранично делимых распределений и весьма длинно и сложно. В то же время, нетрудно видеть, что теорема 39 – непосредственное следствие ранее доказанной теоремы 25 (подробнее см. [85]). Здесь мы докажем другой результат работы [85], демонстрирующий эффективность операторного подхода к решению подобного рода задач: будет сформулировано простое интерполяционное условие, гарантирующее справедливость вложения $X \subset A_2(X)$.

ТЕОРЕМА 40. *Пусть X – симметричное пространство на $[0, 1]$, интерполяционное между пространствами L_2 и L_∞ , $X \in \mathbb{K}$. Тогда для некоторого $C > 0$ и всех последовательностей независимых одинаково распределенных функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ таких, что $\int_0^1 f_1(x) dx = 0$, и произвольных $(a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_2$ выполнено (100).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольной фиксированной последовательности $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_2$ определим линейный оператор $T_a : S(0, 1) \rightarrow S(0, \infty)$ формулой

$$T_a f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f(t - k + 1) \chi_{(k-1, k]}(t).$$

Так как для каждой функции $f \in L_2$ (соответственно $f \in L_\infty$) $\|T_a f\|_2 = \|a\|_2 \|f\|_2$ (соответственно $\|T_a f\|_\infty = \sup_k |a_k| \|f\|_\infty \leq \|a\|_2 \|f\|_\infty$), то ввиду равенств

$$Z_{L_2^2} = L_2(0, \infty) \quad \text{и} \quad Z_{L_\infty^2} = L_\infty \cap L_2(0, \infty)$$

получаем, что

$$\begin{aligned} \|T_a f\|_{Z_{L_2^2}}^2 &= \|a\|_2^2 \|f\|_2^2 & (f \in L_2[0, 1]), \\ \|T_a f\|_{Z_{L_\infty^2}}^2 &\leq 2\|a\|_2^2 \|f\|_\infty^2 & (f \in L_\infty[0, 1]). \end{aligned} \quad (102)$$

Иначе говоря, T_a ограниченно действует из $L_2[0, 1]$ в $Z_{L_2}^2$ и из $L_\infty[0, 1]$ в $Z_{L_\infty}^2$. Для того чтобы “проинтерполировать” соотношения (102), распространив их на произвольное симметричное пространство $X \in \text{Int}(L_2, L_\infty)$, нам потребуются две интерполяционные леммы, которые мы здесь только сформулируем (доказательство первой см. в [86; лемма 4], а второй – в [85; лемма 3.3]).

ЛЕММА 18. *Для произвольной банаховой пары (X_0, X_1) и любого параметра Φ вещественного $\mathcal{K}$ -метода справедливо следующее равенство:*

$$(X_0, X_0 \cap X_1)_{\Phi}^{\mathcal{K}} = (X_0, X_1)_{\Phi}^{\mathcal{K}} \cap X_0.$$

Так как пара (L_2, L_∞) является $\mathcal{K}$ -монотонной [87], а $X \in \text{Int}(L_2, L_\infty)$, то ввиду теоремы Брудного–Кругляка (см. раздел 2 или [22; теорема 3.3.20]) существует параметр Φ вещественного $\mathcal{K}$ -метода, для которого

$$X = (L_2, L_\infty)_{\Phi}^{\mathcal{K}}. \quad (103)$$

ЛЕММА 19. *Если выполнено равенство (103), то с точностью до эквивалентности норм*

$$Z_X^2(0, \infty) = (L_2(0, \infty), L_\infty(0, \infty))_{\Phi}^{\mathcal{K}} \cap L_2(0, \infty).$$

Продолжим доказательство теоремы 40. Ввиду соотношений (102), а также лемм 18 и 19 существует константа $C_1 > 0$, зависящая лишь от пространства X , такая, что для произвольных $f \in X$ и $a \in \ell_2$

$$\|T_a f\|_{Z_X^2} \leq C_1 \|a\|_2 \|f\|_X. \quad (104)$$

С другой стороны, так как $X \in \mathbb{K}$ по условию, то мы можем применить теорему 25. Поэтому для произвольной последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$ таких, что $\int_0^1 f_k(x) dx = 0$ ($k = 1, 2, \dots$), и любых $n \in \mathbb{N}$ и $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k f_k \right\|_X \leq \beta \|\mathcal{K}\|_{X \rightarrow X} \left\| \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{f}_k \right\|_{Z_X^2}, \quad (105)$$

где $\beta > 0$ – некоторая универсальная константа. Так как функции f_k ($k = 1, 2, \dots$) одинаково распределены, то аналогичное свойство имеют и функции $\sum_{k=1}^n a_k \mathbf{f}_k$ и $T_{a^n} f_1$, где $a^n = (a_k^n)$, $a_k^n = a_k$ ($k \leq n$) и $a_k^n = 0$ ($k > n$). Таким образом, из (104) и (105) вытекает, что

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k f_k \right\|_X \leq C_1 \beta \|\mathcal{K}\|_{X \rightarrow X} \|f_1\|_X \|a\|_2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Справедливость правой оценки в (100) следует теперь из стандартных рассуждений.

СЛЕДСТВИЕ 11. Пусть X – такое симметричное пространство на $[0, 1]$, что неравенство (100) выполнено для любой последовательности одинаково распределенных независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ таких, что $\int_0^1 f_1(x) dx = 0$. Тогда существует такая константа $C > 0$, что для произвольной последовательности одинаково распределенных дизъюнктивных функций $\{g_k\}_{k=1}^n \in X$, $\|g_1\|_X = 1$, любых $n \in \mathbb{N}$ и $a_k \in \mathbb{R}$ ($k = 1, \dots, n$) справедливо следующее неравенство:

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k g_k \right\|_X \leq C \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2}. \quad (106)$$

В частности,

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k \chi_{[(k-1)/n, k/n]} \right\|_X \leq C \phi_X \left(\frac{1}{n} \right) \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2}. \quad (107)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что существуют такие множества одинаково распределенных функций $\{g_k^+\}_{k=1}^n$ и $\{g_k^-\}_{k=1}^n$, что $|g_k| = g_k^+ + g_k^-$, $g_k^+ g_k^- = 0$ и $\int_0^1 g_k^+(x) dx = \int_0^1 g_k^-(x) dx$ ($k = 1, \dots, n$). Тогда функции $g'_k := g_k^+ - g_k^-$ ($k = 1, \dots, n$) одинаково распределены и $\int_0^1 g_1(x) dx = 0$. Пусть $\{f_k\}_{k=1}^n$ – последовательность независимых копий функций g'_k . Тогда $\|f_1\|_X = \|g'_1\|_X = \|g_1\|_X = 1$, и по теореме 40 для произвольных $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k f_k \right\|_X \leq C \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2}, \quad (108)$$

где константа $C > 0$ зависит от X . Кроме того, по первой части теоремы 9 (см. также [39; лемма 5, с. 14–15]) мы получаем:

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k f_k \right\|_X \geq \frac{1}{4} \left\| \sum_{k=1}^n a_k g'_k \right\|_X = \frac{1}{4} \left\| \sum_{k=1}^n a_k g_k \right\|_X. \quad (109)$$

Неравенство (106) следует из (108) и (109), а (107) – частный случай (106).

СЛЕДСТВИЕ 12. Если симметричное пространство $X \not\subset L_2$ и $\phi_X(u) = u^{1/2}$, то существует последовательность одинаково распределенных независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$, $\int_0^1 f_1(x) dx = 0$, которая натягивает подпространство в X , не изоморфное ℓ_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что каждая последовательность одинаково распределенных независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$, $\int_0^1 f_1(x) dx = 0$, натягивает в X подпространство, изоморфное ℓ_2 . Тогда ввиду замечания, сделанного в самом начале раздела, а также следствия 11 выполнено неравенство (107), эквивалентное следующему:

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k \chi_{[(k-1)/n, k/n]} \right\|_X \leq C \left\| \sum_{k=1}^n a_k \chi_{[(k-1)/n, k/n]} \right\|_{L_2}$$

где $n \in \mathbb{N}$ и $a_k \in \mathbb{R}$ ($k = 1, \dots, n$) произвольны. Отсюда немедленно следует включение $L_2 \subseteq X$. Так как одновременно по условию следствия $X \subseteq L_2$, то $X = L_2$, а это противоречит другому условию.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. В частности, если $X = L_{2,q}$ ($1 \leq q < 2$) (определение см. в разделе 2), то ввиду следствия 12 существует последовательность одинаково распределенных независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$, $\int_0^1 f_1(x) dx = 0$, натягивающая в X подпространство, не изоморфное ℓ_2 . Тем самым, приведенные в начале раздела условия (а)–(с) на симметричное пространство X не достаточны для того, чтобы неравенство (100) было выполнено для каждой последовательности одинаково распределенных независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$, $\int_0^1 f_1(x) dx = 0$. Это дает отрицательный ответ на вопрос, поставленный в книге [39; с. 71].

Список литературы

- [1] Н. Р. Rosenthal, “On the subspaces of L_p ($p > 2$) spanned by sequences of independent random variables”, *Israel J. Math.*, **8**:3 (1970), 273–303.
- [2] В. Ф. Гапошкин, “Лакунарные ряды и независимые функции”, *УМН*, **21**:6 (1966), 3–82; англ. пер.: V. F. Gaposhkin, “Lacunary series and independent functions”, *Russian Math. Surveys*, **21**:6 (1966), 1–82.
- [3] Г. Пешкир, А. Н. Ширяев, “Неравенства Хинчина и мартингалное расширение сферы их действия”, *УМН*, **50**:5 (1995), 3–62; англ. пер.: G. Peshkir, A. N. Shiryaev, “The Khintchine inequalities and martingale expanding of the sphere of their action”, *Russian Math. Surveys*, **50**:5 (1995), 849–904.
- [4] С. В. Асташкин, “Функции Радемахера в симметричных пространствах”, *Функциональный анализ, СМФН*, **32**, РУДН, М., 2009, 3–161; англ. пер.: S. V. Astashkin, “Rademacher functions in symmetric spaces”, *J. Math. Sci.*, **169**:6 (2010), 725–886.
- [5] С. В. Асташкин, Д. В. Занин, Е. М. Семенов, Ф. А. Сукочев, “Оператор Круглова и операторы, определяемые случайными перестановками”, *Функц. анализ и его прил.*, **43**:2 (2009), 3–18; англ. пер.: S. V. Astashkin, D. V. Zanin, E. M. Semenov, F. A. Sukochev, “Kruglov operator and operators defined by random permutations”, *Funct. Anal. Appl.*, **43**:2 (2009), 83–95.
- [6] S. Kwapien, C. Schütt, “Some combinatorial and probabilistic inequalities and their applications to Banach space theory”, *Studia Math.*, **82**:1 (1985), 91–106.
- [7] C. Schütt, “Lorentz spaces that are isomorphic to subspaces of L_1 ”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **314**:2 (1989), 583–595, <http://www.jstor.org/stable/2001398>.
- [8] M. Junge, Q. Xu, “Noncommutative Burkholder/Rosenthal inequalities. II: Applications”, *Israel J. Math.*, **167**:1 (2008), 227–282.
- [9] A. Khintchine, “Über dyadische Brüche”, *Math. Z.*, **18**:1 (1923), 109–116.
- [10] С. Качмаж, Г. Штейнгауз, *Теория ортогональных рядов*, Физматгиз, М., 1958, 507 с.; пер. с нем.: S. Kaczmarz, H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen*, Subwencji Funduszu Kultury Narodowej, Warszawa, 1935, 298 pp.
- [11] J. Marcinkiewicz, A. Zygmund, “Remarque sur la loi du logarithme itéré”, *Fund. Math.*, **29** (1937), 215–222.

- [12] Б. С. Капшин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, 2-е изд., Изд-во АФЦ, М., 1999, ISBN: 5-93379-003-6, 550 с.; англ. пер. 1-го изд.: B. S. Kashin, A. A. Saakyan, *Orthogonal series*, Trans. Amer. Math. Soc., **75**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, ISBN: 0-8218-4527-6, 451 pp.
- [13] A. N. Kolmogoroff, "Über das Gesetz des iterierten Logarithmus", *Math. Ann.*, **101**:1 (1929), 126–135; рус. пер.: "О законе повторного логарифма", А. Н. Колмогоров, *Теория вероятностей и математическая статистика*, Наука, М., 1986, 34–44; перепеч.: А. Н. Колмогоров, *Избранные труды*, **2**, Наука, М., 2005, 37–46.
- [14] Ю. В. Прохоров, "Одна экстремальная задача теории вероятностей", *Теория вероятн. и ее примен.*, **4**:2 (1959), 211–214; англ. пер.: Yu. V. Prokhorov, "An extremal problem in probability theory", *Theory Probab. Appl.*, **4** (1959), 201–203.
- [15] Р. Эллиотт, *Стохастический анализ и его приложения*, Мир, М., 1986, 361 с.; пер. с англ.: R. J. Elliott, *Stochastic calculus and applications*, Appl. Math. (N. Y.), **18**, Springer-Verlag, New York, 1982, ISBN: 0-387-90763-7, 302 pp.
- [16] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978, 400 с.; англ. пер.: S. G. Krein, Yu. I. Petunin, E. M. Semenov, *Interpolation of linear operators*, Transl. Math. Monogr., **54**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1982, ISBN: 0-8218-4505-7, 375 pp.
- [17] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces. II. Function Spaces*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **97**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1979, ISBN: 3-540-08888-1, 243 pp.
- [18] C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of operators*, Pure Appl. Math., **129**, Academic Press, Boston, MA, 1988, ISBN: 0-12-088730-4, 469 pp.
- [19] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, 2-е изд., Наука, М., 1977, 741 с.; англ. пер. 1-го изд.: L. V. Kantorovich, G. P. Akilov, *Functional analysis in normed spaces*, International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, **46**, Macmillan, New York, 1964, 771 pp.
- [20] М. А. Красносельский, Я. Б. Рутцкий, *Выпуклые функции и пространства Орлица*, Физматгиз, М., 1958, 271 с.; англ. пер.: M. A. Krasnosel'skii, Ja. B. Rutickii, *Convex functions and Orlicz spaces*, Noordhoff, Groningen, 1961, 249 pp.
- [21] Й. Берг, Й. Лёфстрём, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980, 264 с.; пер. с англ.: J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation spaces. An introduction*, Grundlehren Math. Wiss., **223**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1976, 207 pp.
- [22] Ju. A. Brudnyi, N. Ya. Krugljak, *Interpolation functors and interpolation spaces*, v. I, North-Holland Math. Library, **47**, North-Holland, Amsterdam, 1991, ISBN: 0-444-88001-1, 718 pp.
- [23] A. P. Calderón, "Spaces between L^1 and L^∞ and the theorem of Marcinkiewicz", *Studia Math.*, **26** (1966), 273–299.
- [24] Б. С. Митягин, "Интерполяционная теорема для модулярных пространств", *Матем. сб.*, **66**:4 (1965), 473–482.
- [25] A. P. Calderon, "Intermediate spaces and interpolation, the complex method", *Studia Math.*, **24**:2 (1964), 113–190.
- [26] Г. Я. Лозановский, "Замечание об одной интерполяционной теореме Кальдерона", *Функц. анализ и его прил.*, **6**:4 (1972), 89–90; англ. пер.: G. Ya. Lozanovskii, "A remark on an interpolational theorem of Calderon", *Funct. Anal. Appl.*, **6**:4 (1972), 333–334.
- [27] P. Hitczenko, "Domination inequality for martingale transforms of a Rademacher sequence", *Israel J. Math.*, **84**:1–2 (1993), 161–178.
- [28] T. Holmstedt, "Interpolation of quasi-normed spaces", *Math. Scand.*, **26**:1 (1970), 177–199.
- [29] S. J. Montgomery-Smith, "The distribution of Rademacher sums", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **109**:2 (1990), 517–522.

- [30] Ж.-П. Кахан, *Случайные функциональные ряды*, Мир, М., 1973, 304 с.; пер. с англ.: J.-P. Kahane, *Some random series of functions*, D.C. Heath and Co., Raytheon Education Co., Lexington, MA, 1968, 184 pp.
- [31] R. Latała, “Estimation of moments of sums of independent real random variables”, *Ann. Probab.*, **25**:3 (1997), 1502–1513.
- [32] E. D. Gluskin, S. Kwapien, “Tail and moment estimates for sums of independent random variables with logarithmically concave tails”, *Studia Math.*, **114**:3 (1995), 303–309.
- [33] P. Hitczenko, S. J. Montgomery-Smith, K. Oleszkiewicz, “Moment inequalities for sums of certain independent symmetric random variables”, *Studia Math.*, **123**:1 (1997), 15–42.
- [34] N. L. Carothers, S. J. Dilworth, “Inequalities for sums of independent random variables”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **104**:1 (1988), 221–226.
- [35] W. B. Johnson, G. Schechtman, “Sums of independent random variables in rearrangement invariant function spaces”, *Ann. Probab.*, **17**:2 (1989), 789–808.
- [36] J. Hoffman-Jørgensen, “Sums of independent Banach space valued random variables”, *Studia Math.*, **52** (1974), 159–186.
- [37] M. B. Marcus, G. Pisier, “Characterization of almost surely continuous p -stable random Fourier series and strongly stationary processes”, *Acta Math.*, **152**:1 (1984), 245–301.
- [38] W. B. Johnson, B. Maurey, G. Schechtman, L. Tzafriri, *Symmetric structures in Banach spaces*, Mem. Amer. Math. Soc., **19**, № 217, 1979, 298 pp.
- [39] M. Sh. Braverman, *Independent random variables and rearrangement invariant spaces*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **194**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994, ISBN: 0-521-45515-4, 116 pp.
- [40] В. М. Круглов, “Замечание к теории безгранично делимых законов”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **15**:2 (1970), 330–336; англ. пер.: V. M. Kruglov, “A note on infinitely divisible distributions”, *Theory Probab. Appl.*, **15**:2 (1970), 319–324.
- [41] Е. Лукач, *Характеристические функции*, Наука, М., 1979; пер. с англ.: E. Lukacs, *Characteristic functions*, 2nd ed., Hafner, New York, 1970, 350 pp.
- [42] S. V. Astashkin, F. A. Sukochev, “Series of independent random variables in rearrangement invariant spaces: An operator approach”, *Israel J. Math.*, **145**:1 (2005), 125–156.
- [43] С. В. Асташкин, Ф. А. Сукочев, “Сравнение сумм независимых и дизъюнктивных функций в симметричных пространствах”, *Матем. заметки*, **76**:4 (2004), 483–489; англ. пер.: S. V. Astashkin, F. A. Sukochev, “Comparison of sums of independent and disjoint functions in symmetric spaces”, *Math. Notes*, **76**:3–4 (1970), 449–454.
- [44] S. V. Astashkin, F. A. Sukochev, “Best constants in Rosenthal-type inequalities and the Kruglov operator”, *Ann. Probab.*, **38**:5 (2010), 1986–2008; arXiv:1011.1381.
- [45] S. Kwapien, W. A. Woyczyński, *Random series and stochastic integrals: single and multiple*, Probab. Appl., Birkhäuser, Boston, MA, 1992, ISBN: 0-8176-3572-6, 360 pp.
- [46] V. I. Ovchinnikov, “The method of orbits in interpolation theory”, *Math. Rep.*, **1**:2 (1984), 349–515.
- [47] S. Montgomery-Smith, E. M. Semenov, “Random rearrangements and operators”, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **184**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, 157–183.
- [48] J. V. Ryff, “Orbits of L_1 functions under doubly stochastic transformations”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **117** (1965), 92–100, <http://www.jstor.org/stable/1994198>.
- [49] V. I. Chilin, A. V. Krygin, F. A. Sukochev, “Extreme points of convex fully symmetric sets of measurable operators”, *Integral Equations Operator Theory*, **15**:2 (1992), 186–226.

- [50] А. А. Боровков, *Теория вероятностей*, Наука, М., 1976, 432 с.; англ. пер. 2-го изд. 1986 г.: A. A. Borovkov, *Probability theory*, Gordon and Breach, Abingdon, Oxon, 1998, 474 pp.
- [51] Ю. В. Прохоров, “Сильная устойчивость сумм и бесконечно делимых законов”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **3:2** (1958), 153–165; англ. пер.: Yu. V. Prokhorov, “Strong stability of sums and infinitely divisible distributions”, *Theory Probab. Appl.*, **3:2** (1958), 141–153.
- [52] С. В. Асташкин, Ф. А. Сукочев, “Ряды независимых функций с нулевым средним в симметричных пространствах со свойством Круглова”, *Исследования по линейным операторам и теории функций*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **345**, 2007, 25–50; англ. пер.: S. V. Astashkin, F. A. Sukochev, “Series of independent, mean zero random variables in rearrangement-invariant spaces having the Kruglov property”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **148:6** (2008), 795–809.
- [53] F. A. Sukochev, D. V. Zanin, “Khinchine inequalities in quasi-normed spaces”, manuscript.
- [54] Y. Gordon, A. Litvak, C. Schütt, E. Werner, “Orlicz norms of sequences of random variables”, *Ann. Probab.*, **30:4** (2002), 1833–1853.
- [55] Y. Gordon, A. Litvak, C. Schütt, E. Werner, “Geometry of spaces between polytopes and related zonotopes”, *Bull. Sci. Math.*, **126:9** (2002), 733–762.
- [56] P. Hitczenko, S. Montgomery-Smith, “Measuring the magnitude of sums of independent random variables”, *Ann. Probab.*, **29:1** (2001), 447–466.
- [57] S. Montgomery-Smith, “Rearrangement invariant norms of symmetric sequence norms of independent sequences of random variables”, *Israel J. Math.*, **131:1** (2002), 51–60.
- [58] M. Junge, “The optimal order for the p -th moment of sums of independent random variables with respect to symmetric norms and related combinatorial estimates”, *Positivity*, **10:2** (2006), 201–230.
- [59] S. V. Astashkin, E. M. Semenov, F. A. Sukochev, “Banach–Saks type properties in rearrangement-invariant spaces with Kruglov property”, *Houston J. Math.*, **35:3** (2009), 959–973.
- [60] С. В. Асташкин, К. Е. Тихомиров, “О некоторых вероятностных аналогах неравенства Розенталя”, *Матем. заметки* (в печати).
- [61] S. V. Astashkin, F. A. Sukochev, “Symmetric quasi-norms of sums of independent random variables in symmetric function spaces with the Kruglov property”, *Israel J. Math.* (to appear).
- [62] А. В. Бухвалов, “Интерполяция линейных операторов в пространствах вектор-функций и со смешанной нормой”, *Сиб. матем. журн.*, **28:1** (1987), 37–51; англ. пер.: A. V. Bukhvalov, “Interpolation of linear operators in spaces of vector-valued functions and with mixed norm”, *Siberian Math. J.*, **28:1** (1987), 24–36.
- [63] D. L. Burkholder, “A sharp inequality for martingale transforms”, *Ann. Probab.*, **7:5** (1979), 858–863.
- [64] W. Johnson, G. Schechtman, J. Zinn, “Best constants in moment inequalities for linear combinations of independent and exchangeable random variables”, *Ann. Probab.*, **13:1** (1985), 234–253.
- [65] С. В. Асташкин, “Экстраполяционные функторы на семействе шкал, порожденных вещественным методом интерполяции”, *Сиб. матем. журн.*, **46:2** (2005), 264–289; англ. пер.: S. V. Astashkin, “Extrapolation functors on a family of scales generated by the real interpolation method”, *Siberian Math. J.*, **46:2** (2005), 205–225.
- [66] V. A. Rodin, E. M. Semyonov, “Rademacher series in symmetric spaces”, *Anal. Math.*, **1:3** (1975), 207–222.

- [67] С. В. Асташкин, “Независимые функции в симметричных пространствах и свойство Круглова”, *Матем. сб.*, **199:7** (2008), 3–20; англ. пер.: S. V. Astashkin, “Independent functions in rearrangement invariant spaces and the Kruglov property”, *Sb. Math.*, **199:7** (2008), 945–963.
- [68] С. В. Асташкин, “Обобщенное неравенство Хинчина в симметричных пространствах”, *Функц. анализ и его прил.*, **42:2** (2008), 78–81; англ. пер.: S. V. Astashkin, “A generalized Khintchine inequality in rearrangement invariant spaces”, *Funct. Anal. Appl.*, **42:2** (2008), 144–147.
- [69] В. И. Дмитриев, С. Г. Крейн, В. И. Овчинников, “Основы теории интерполяции линейных операторов”, *Геометрия линейных пространств и теория операторов*, Ярославль, 1977, 31–74.
- [70] S. V. Astashkin, “About interpolation of subspaces of rearrangement invariant spaces generated by Rademacher system”, *Int. J. Math. Math. Sci.*, **25:7** (2001), 451–465.
- [71] S. J. Szarek, “On the best constant in the Khintchine inequality”, *Studia Math.*, **58:2** (1976), 197–208.
- [72] С. В. Асташкин, М. Ш. Браверман, “Подпространство симметричного пространства, порожденное системой Радемахера с векторными коэффициентами”, *Операторные уравнения в функциональных пространствах*, Изд-во ВГУ, Воронеж, 1986, 3–10.
- [73] R. Salem, A. Zygmund, “Some properties of trigonometric series whose terms have random signs”, *Acta Math.*, **91:1** (1954), 245–301.
- [74] M. B. Marcus, G. Pisier, *Random Fourier series with applications to harmonic analysis*, Ann. of Math. Stud., **101**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ; Univ. Tokyo Press, Tokyo, 1981, ISBN: 0-691-08289-8; 0-691-08292-8, 151 pp.
- [75] M. Ledoux, M. Talagrand, *Probability in Banach spaces*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **23**, Springer-Verlag, Berlin, 1991, ISBN: 3-540-52013-9, 480 pp.
- [76] B. Kashin, L. Tzafriri, “Lower estimates for the supremum of some random processes”, *East J. Approx.*, **1:1** (1995), 125–139.
- [77] B. Kashin, L. Tzafriri, “Lower estimates for the supremum of some random processes. II”, *East J. Approx.*, **1:3** (1995), 373–377.
- [78] С. В. Асташкин, “О выделении подсистем, ‘мажорируемых’ системой Радемахера”, *Матем. заметки*, **65:4** (1999), 483–495; англ. пер.: S. V. Astashkin, “Extraction of subsystems ‘majorized’ by the Rademacher system”, *Math. Notes*, **65:4** (1999), 407–417.
- [79] П. Г. Григорьев, “Случайные линейные комбинации функций из L_1 ”, *Матем. заметки*, **74:2** (2003), 192–220; англ. пер.: P. G. Grigor’ev, “Random linear combinations of functions from L_1 ”, *Math. Notes*, **74:1–2** (2003), 185–211.
- [80] P. G. Grigoriev, “Estimates for norms of random polynomials”, *East J. Approx.*, **7:4** (2001), 445–469.
- [81] П. Г. Григорьев, “Оценки норм случайных полиномов и их приложение”, *Матем. заметки*, **69:6** (2001), 950–954; англ. пер.: P. G. Grigor’ev, “Estimates for norms of random polynomials and their application”, *Math. Notes*, **69:5–6** (2003), 868–872.
- [82] Б. С. Митягин, “Гомотопическая структура линейной группы банахова пространства”, *УМН*, **25:5** (1970), 63–106; B. S. Mityagin, “The homotopy structure of the linear group of a Banach space”, *Russian Math. Surveys*, **25:5** (1970), 59–103.
- [83] S. V. Astashkin, “Rademacher series and isomorphisms of rearrangement invariant spaces on the finite interval and on the semi-axis”, *J. Funct. Anal.*, **260:1** (2010), 195–207.
- [84] L. E. Dor, J. T. Starbird, “Projections of L_p onto subspaces spanned by independent random variables”, *Compositio Math.*, **39:2** (1979), 141–175.

- [85] S. V. Astashkin, F. A. Sukochev, “Sequences of independent identically distributed functions in rearrangement invariant spaces”, *Function spaces VIII*, Banach Center Publ., **79**, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2008, 27–37.
- [86] С. В. Асташкин, “Об интерполяции пересечений вещественным методом”, *Алгебра и анализ*, **17**:2 (2005), 33–69; англ. пер.: S. V. Astashkin, “Interpolation of intersections by the real method”, *St. Petersburg Math. J.*, **17**:2 (2006), 239–265.
- [87] G. G. Lorentz, T. Shimogaki, “Interpolation theorems for the pairs of spaces (L^p, L^∞) and (L^1, L^q) ”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **159** (1971), 207–221.

С. В. Асташкин (S. V. Astashkin)

Самарский государственный университет

E-mail: astashkn@ssu.samara.ru

Поступила в редакцию

21.06.2010

Ф. А. Сукочев (F. A. Sukochev)

School of Mathematics and Statistics,

University of New South Wales, Kensington, Australia

E-mail: f.sukochev@unsw.edu.au