Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Протасов, Полугруппы неотрицательных матриц,
УМН, 2010, том 65, выпуск 6, 191–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9383>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 09:28:50

Полугруппы неотрицательных матриц

В. Ю. Протасов

Пусть $\mathcal{S}$ – произвольная полугруппа (по умножению) $(n \times n)$ -матриц, все входящие в нее матрицы неотрицательны (имеют неотрицательные элементы). В частности, $\mathcal{S}$ может быть задана как множество произведений данного набора матриц. При каких условиях $\mathcal{S}$ будет содержать положительную матрицу? Данная задача возникает при изучении неоднородных цепей Маркова, уточняющих алгоритмов, показателя Ляпунова и т. д. [1]–[5]. В частном случае, когда $\mathcal{S}$ порождена одной матрицей, т. е. $\mathcal{S} = \{A^k, k \in \mathbb{N}\}$, известны несколько критериев, как комбинаторных, так и аналитических, а также результаты о минимальной положительной степени матрицы и о структуре матриц, не имеющих положительных степеней [6]–[9]. В данной работе мы получим критерий существования положительного элемента для произвольной полугруппы матриц (предложение 1) и докажем полиномиальную разрешимость этой задачи для полугрупп, порожденных конечным набором матриц (теорема 1). Далее сформулируем две открытые проблемы. Мы предполагаем, что выполнены условия:

- (а) $\mathcal{S}$ неприводима, т. е. не существует подмножества базисных векторов, линейная оболочка которого есть общее инвариантное подпространство всех матриц из $\mathcal{S}$;
- (б) у матриц полугруппы $\mathcal{S}$ нет нулевых столбцов и нулевых строк.

Если $\mathcal{S}$ порождена набором матриц, то она удовлетворяет условиям (а), (б) в точности тогда, когда им удовлетворяет порождающий набор. Везде далее $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение, $\|\cdot\|_1$ – L_1 -норма в $\mathbb{R}^n$ и соответствующая операторная норма матрицы, e_i – базисные векторы, span – линейная оболочка.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Полугруппа $\mathcal{S}$ при условиях (а), (б) не содержит положительной матрицы тогда и только тогда, когда найдется такая пара индексов i, j , $i \neq j$, что для любого $A \in \mathcal{S}$ имеем $a_{ki}a_{kj} = 0$ при всех $k = 1, \dots, n$ (т. е. носители i -го и j -го столбцов не пересекаются).*

Доказательство состоит из трех лемм.

ЛЕММА 1. *Если полугруппа $\mathcal{S}$ при условиях (а), (б), содержит матрицу, имеющую положительную строку, то она содержит положительную матрицу.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть матрица $A \in \mathcal{S}$ имеет максимальное число $k \geq 1$ положительных строк. Считаем, что это – первые k строк. Пусть $k < n$; $(k+1)$ -я строка содержит положительный элемент $a_{k+1,i}$. В силу (а) существует матрица $C \in \mathcal{S}$, у которой $c_{i1} > 0$. Тогда i -я строка матрицы CA положительна. Согласно (б), для любого $B \in \mathcal{S}$ матрица AB также имеет первые k положительных строк. Следовательно, первые $k+1$ строк матрицы ACA положительны. Таким образом, $k = n$.

В силу (б) достаточно доказать предложение 1 для стохастических (по столбцам) матриц. Положим $V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$. Ясно, что $AV \subset V$ и $\|A\|_1 = 1$ для стохастической матрицы A . Пусть $\mu(A)$ – кратность собственного значения 1. Следующая лемма общеизвестна.

ЛЕММА 2. *Если A – стохастическая матрица и $\mu(A) = 1$, то при достаточно больших k матрица A^k имеет положительную строку.*

ЛЕММА 3. *Если $\mathcal{S}$ состоит из стохастических матриц и $\mu(A) \geq 2$ для всех $A \in \mathcal{S}$, то найдутся такие $i \neq j$, что $(Ae_i, Ae_j) = 0$ для всех $A \in \mathcal{S}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО от противного: пусть для любых $i \neq j$ найдется матрица $A_{ij} \in \mathcal{S}$, для которой $(Ae_i, Ae_j) > 0$. Тогда $\|A_{ij}e_i - A_{ij}e_j\|_1 < \|e_i - e_j\|_1 = 2$.

Докажем, что существует $P \in \mathcal{S}$ такая, что $\|Pe_{ij}\|_1 < 1$ для всех пар (i, j) , где $e_{ij} = (e_i - e_j)/2$. Полагаем $P_1 = A_{12}$, $I_1 = \{(1, 2)\}$ и применяем индукцию: если существует матрица $P_k \in \mathcal{S}$, для которой $\|P_k e_{ij}\|_1 < 1$ при всех $(i, j) \in I_k$, где I_k – некоторое множество из k пар индексов, то берем произвольную пару $(a, b) \notin I_k$. Пусть a -й и b -й столбцы матрицы P_k имеют положительные координаты в строках q и r соответственно, $q \neq r$. Так как $\|P_k\|_1 = \|A_{qr}\|_1 = 1$, то для матрицы $P_{k+1} = A_{qr}P_k$ имеем $\|P_{k+1}e_{ij}\|_1 < 1$ при всех $(i, j) \in I_{k+1} = I_k \cup \{(a, b)\}$. Итак, мы получили матрицу P , для которой $\|P|_V\|_1 < 1$, а значит $\mu(P) = 1$. Что противоречит предположению, поскольку $P \in \mathcal{S}$.

Совмещая леммы 1–3, получаем доказательство предложения 1.

ТЕОРЕМА 1. *Наличие положительной матрицы в полугруппе, порожденной m матрицами, удовлетворяющими (а) и (б), определяется за полиномиальное время.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{S}$ порождена матрицами $A_1, \dots, A_m$. Рассмотрим направленный граф, вершины которого – упорядоченные пары (i_1, i_2) , $1 \leq i_1, i_2 \leq n$. Ребро, ведущее из вершины (j_1, j_2) в вершину (i_1, i_2) , существует тогда и только тогда, когда найдется $k = 1, \dots, m$, для которого оба элемента a_{i_1, j_1} и a_{i_2, j_2} матрицы A_k положительны. Согласно предложению 1, $\mathcal{S}$ содержит положительную матрицу тогда и только тогда, когда из любой вершины графа можно дойти до диагонали, т. е. до одной из вершин вида (i, i) . Определяя последовательно вершины первого уровня, второго и т. д., мы проверяем данное условие. Алгоритм затрачивает $mn^3(1 + o(1))$ операций, а объем входных данных равен mn^2 .

ПРОБЛЕМА 1. Пусть $N(m)$ – минимальное число такое, что если полугруппа $\mathcal{S}$, заданная набором из m матриц, имеет положительный элемент, то он является произведением не более N матриц данного набора. Какова оценка сверху на $N(m)$?

Для полугрупп, порожденных одной матрицей, известно несколько оценок [6]–[8].

ПРОБЛЕМА 2. Верно ли, что полугруппа $\mathcal{S}$, удовлетворяющая (а), (б), не содержит положительной матрицы тогда и только тогда, когда существует разбиение $\{1, \dots, n\} = \bigcup_{k=1}^r U_k$, $r \geq 2$, такое, что каждая матрица $A \in \mathcal{S}$ задает перестановку множеств $U_1, \dots, U_r$, т. е. существует перестановка $\sigma = \sigma_A$ множества $\{1, \dots, r\}$, для которой $U_k \subset \mathcal{U}_{\sigma(k)}$ при всех k , где $\mathcal{U}_k$ есть $\text{span}\{e_i, i \in U_k\}$.

Последнее условие очевидным образом достаточно для отсутствия положительной матрицы в $\mathcal{S}$. Вопрос: будет ли оно необходимым? Для полугрупп, порожденных одной матрицей, это известный результат [5; гл. 8], равносильный теореме Романовского [9]. Заметим, что без условий (а) и (б) утверждение неверно.

Список литературы

- [1] Р. Л. Добрушин, *Матем. сб.*, **34**:3 (1954), 541–556. [2] Y. Wang, *J. Approx. Theory*, **113**:2 (2001), 207–220. [3] E. S. Key, *J. Theoret. Probab.*, **3**:3 (1990), 477–488. [4] R. M. Jungers, V. Protasov, V. D. Blondel, *Linear Algebra Appl.*, **428**:10 (2008), 2296–2311. [5] В. Ю. Протасов, *Функц. анализ и его прил.*, **44**:3 (2010), 84–88. [6] Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ*, Наука, М., 1989, 656 с. [7] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, М., 1966, 576 с. [8] M. Akelbek, S. Kirkland, *Linear Algebra Appl.*, **430**:4 (2009), 1111–1130. [9] V. Romanovsky, *Bull. Soc. Math. France*, **61** (1933), 213–219.

В. Ю. Протасов (V. Yu. Protasov)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: v-protasov@yandex.ru

Представлено В. М. Тихомировым
Принято редакцией
24.06.2010