Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Петухов, Геометрическое описание эпиморфных подгрупп, *УМН*, 2010, том 65, выпуск 5, 193–194

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9384>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 17:44:33

Геометрическое описание эпиморфных подгрупп

А. В. Петухов

1. Введение. Пусть G – аффинная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ характеристики 0 и H – ее подгруппа. Тогда стабилизатор всех вектор-функций для правого действия G на $\mathbb{K}[G]^H$ есть $\hat{H}$, обозримая оболочка H в G [1]. Для всякого G -модуля V верно, что $V^H = V^{\hat{H}}$ [1]. Это показывает интерес вычислений обозримых оболочек подгрупп и, в частности, определения подгрупп H , для которых $\hat{H} = G$, – эпиморфных подгрупп [2]. Подгруппа называется обозримой, если $\hat{H} = H$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть G – полупростая алгебраическая группа, а H – ее редуктивная подгруппа. Тогда ортогональным централизатором к H в G называется подгруппа $Z_G^\perp(H)$, удовлетворяющая условиям

- 1) группа $Z_G^\perp(H)$ связна;
- 2) $\text{lie } Z_G^\perp(H) = \{z \in \text{lie } G: \text{ для любого } h \in \text{lie } H \text{ выполнены равенства } [z, h] = 0 \text{ и } (z, h) = 0\}$, где $(\cdot, \cdot)$ – форма Картана–Киллинга полупростой алгебры Ли $\text{lie } G$.

Каждой подгруппе H с алгеброй Ли $\mathfrak{h}$ группы G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ можно сопоставить вектор $v_H \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$, соответствующий естественному вложению H в G . Заметим, что пространство $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ наделяется структурой G -модуля с помощью присоединенного действия группы Ли G на $\mathfrak{g}$. Здесь и далее $R_u(H)$ – унипотентный радикал группы H , а L_H – произвольная подгруппа Леви группы H .

ТЕОРЕМА 1. *Нередуктивная подгруппа H полупростой группы G обозрима в ней тогда и только тогда, когда замыкание орбиты $Z_G^\perp(L_H)v_{R_u(H)}$ содержит 0.*

ТЕОРЕМА 2. *Подгруппа H эпиморфна тогда и только тогда, когда орбита $Z_G^\perp(L_H)v_{R_u(H)}$ замкнута и H не содержится в собственной редуктивной подгруппе группы G .*

2. Доказательства теорем 1 и 2. Здесь и далее G – полупростая алгебраическая группа с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Полупростой элемент $s \in \mathfrak{g}$ называется рациональным, если оператор его присоединенного действия на $\mathfrak{g}$ обладает рациональными собственными значениями.

Пусть $s \in \mathfrak{g}$ – рациональный полупростой элемент. Пространство $\mathfrak{g}$ есть $\bigoplus_{i \in \mathbb{Q}} \mathfrak{g}_i$, где $\mathfrak{g}_i$ – собственные $\text{ad } s$ -подпространства с собственными значениями i . Пространства $\mathfrak{p}_s = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{g}_i$, $\mathfrak{q}_s = \{p \in \mathfrak{p}_s : (p, s) = 0\}$, $\mathfrak{n}_s = \bigoplus_{i > 0} \mathfrak{g}_i$ являются алгебраическими подалгебрами Ли в $\mathfrak{g}$. Алгебра $\mathfrak{n}_s$ является нильпотентным радикалом $\mathfrak{p}_s$ и $\mathfrak{q}_s$. Связная алгебраическая группа Q_s с алгеброй Ли $\mathfrak{q}_s$ называется квазипараболической.

ТЕОРЕМА 3 (критерий Суханова). *Подгруппа $H \subset G$ обозрима в G тогда и только тогда, когда существует рациональный полупростой элемент $s \in \mathfrak{g}$ такой, что $\text{lie } H \subset \mathfrak{q}_s$ и $\text{lie } R_u(H) \subset \mathfrak{n}_s$.*

СЛЕДСТВИЕ 1. *Подгруппа $H \subset G$ эпиморфна в G тогда и только тогда, когда она нередуктивна и $\text{lie } H$ не вложена ни в какую подалгебру $\mathfrak{q}_s$ ни для какого ненулевого рационального полупростого элемента $s \in \mathfrak{g}$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть $H' \subset H \subset G$ – цепочка вложенных алгебраических групп, причем H и H' редуктивны. Тогда $Z_G^\perp(H) \subset Z_G^\perp(H')$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть подгруппа H' вложена в подгруппу H группы G , $R_u(H') \subset R_u(H)$, $0 \in \overline{Z_G^\perp(L_H)v_{R_u(H)}}$. Тогда $0 \in \overline{Z_G^\perp(L_{H'})v_{R_u(H')}}$, где $L_{H'} \subset L_H$ – подгруппы Леви групп H' и H соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Верно, что $Z_G^\perp(L_H) \subset Z_G^\perp(L_{H'})$, откуда искомое утверждение и следует.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $s \in \mathfrak{g}$ – рациональный полупростой элемент. Тогда $0 \in \overline{Z_G^\perp(L_{Q_s})v_{R_u(Q_s)}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{s}: \mathbb{K}^* \rightarrow G$ – однопараметрическая подгруппа, соответствующая s . Тогда $\lim_{t \rightarrow 0} \bar{s}(t)v_{R_u(Q_s)} = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если подгруппа H группы G обозрима в G , то $0 \in \overline{Z_G^\perp(L_H)v_{R_u(H)}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если для подгруппы H группы G верно, что $0 \in \overline{Z_G^\perp(L_H)v_{R_u(H)}}$, то она обозрима в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s \in \mathfrak{g}$ – рациональный полупростой элемент, а V – представление группы G . Тогда $V = \bigoplus_{i \in \mathbb{Q}} V_i^s$, где V_i^s – это s -собственные подпространства с собственными значениями i .

По критерию Гильберта–Мамфорда существует ненулевой рациональный полупростой элемент $s \in \text{lie } Z_G(L_H)$ такой, что $v_{R_u(H)} \in \bigoplus_{i > 0} \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\text{lie } R_u H, \mathfrak{g})_i^s$, значит, $\text{lie } R_u H \subset \mathfrak{n}_s$ и $\text{lie } R_u H \perp s$. Следовательно, $\text{lie } H \subset \mathfrak{q}_s$.

Следствие 2 и предложение 3 вместе составляют теорему 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\hat{H}$ нередуцируема. Тогда орбита $Z_G^\perp(L_H)v_{R_u H}$ незамкнута.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По критерию Суханова существует рациональный полупростой элемент $s \in \mathfrak{g}$ такой, что $\text{lie } \hat{H} \subset \mathfrak{q}_s$, $\text{lie } R_u \hat{H} \subset \mathfrak{n}_s$. Тогда $\lim_{t \rightarrow 0} v_{R_u H} \in \text{Hom}(\text{lie } H, \text{lie } L_{\hat{H}})$. Если этот элемент лежит в $Z_G^\perp(L_H)v_H$, то $H^0 \subset L_{\hat{H}}$. Заметим, что $\dim L_{\hat{H}} < \dim \hat{H}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть нередуцируемая группа H эпиморфна в G . Тогда орбита $Z_G^\perp(L_H)v_{R_u H}$ замкнута.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. По критерию Гильберта–Мамфорда существует рациональный полупростой элемент $s \in Z_G^\perp(L_H)$ такой, что $v_{R_u H} \in \bigoplus_{i \geq 0} \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\text{lie } R_u H, \mathfrak{g})_i^s$. Следовательно, $\text{lie } R_u H \subset \mathfrak{p}_s$. Пусть P_s – алгебраическая подгруппа Ли в G с алгеброй Ли $\mathfrak{p}_s$. Тогда $R_u H \subset P_s$. Легко видеть, что $P_s/Q_s \cong \mathbb{K}^*$, и, следовательно, $R_u H \subset Q_s$, откуда $\text{lie } H \subset \mathfrak{q}_s$.

Предложения 4 и 5 составляют доказательство теоремы 2.

Список литературы

- [1] F. D. Grosshans, *Algebraic homogeneous spaces and invariant theory*, Lecture Notes in Math., **1673**, Springer-Verlag, Berlin, 1997. [2] F. Bien, A. Borel, *C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I Math.*, **315** (1992), 1341–1346.

А. В. Петухов (A. V. Petukhov)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова;
 Jacobs University, Bremen, Germany
 E-mail: a.petukhov@jacobs-university.de

Представлено А. В. Михалёвым
 Принято редколлегией
 01.08.2010