Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. А. Богомолов, Ю. Г. Зархин, Вик. С. Куликов,
Ю. И. Манин, В. В. Никулин, Д. О. Орлов, А. Н. Пар-
шин, Ю. Г. Прохоров, М. Рид, И. А. Чельцов, Вячеслав
Владимирович Шокуров (к 60-летию со дня рождения),
УМН, 2010, том 65, выпуск 6, 195–199

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9385>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 13:50:44

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Вячеслав Владимирович Шокуров

(к шестидесятилетию со дня рождения)

18 мая 2010 г. исполнилось 60 лет доктору физико-математических наук, профессору университета Джона Хопкинса г. Балтимора, внештатному сотруднику отдела алгебры Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Вячеславу Владимировичу Шокурову – выдающемуся математику, одному из наиболее ярких представителей московской школы алгебраической геометрии. Свою математическую деятельность Вячеслав Владимирович начал с классических вопросов проективной геометрии и изучения геометрии модулярных многообразий. Однако уже в конце 70-х годов становится ясно, что В. В. Шокуров – бирациональный геометр. На этом бирациональном пути его ожидал блестящий успех. В настоящее время Вячеслав Владимирович – один из ведущих мировых бирациональных геометров, а его неожиданные, непредсказуемые, в полном смысле слова новаторские работы легли в основу многих современных направлений этой дисциплины.

В 1968 г. Вячеслав Владимирович поступил на механико-математический факультет Московского государственного университета, где блестяще проявились его математические способности. Уже на втором курсе он доказал схемный аналог знаменитой теоремы Нётера–Энриквеса–Петри, показав, в частности, что пересечение квадрик, проходящих через каноническую кривую, является приведенным многообразием. Отголосок этой студенческой работы проявится много лет спустя при решении В. В. Шокуровым аналога проблемы Шоттки для главно поляризованных примитивов, а также при доказательстве существования прямой на трехмерных неособых многообразиях Фано.

Закончив механико-математический факультет, В. В. Шокуров был принят в аспирантуру Московского государственного университета. Его научным руководителем стал Юрий Иванович Манин. Под руководством Манина Шокуров изучает геометрию модулярных многообразий Куги. Несмотря на то что эти исследования не получили такого отклика в творчестве Вячеслава Владимировича, как его дальнейшие исследования в области бирациональной геометрии, результаты, полученные им по геометрии модулярных многообразий, до сих пор используются математиками, работающими в этом направлении. Эти результаты актуальны и сейчас.

После защиты кандидатской диссертации В.В. Шокуров поступил на работу в Ярославский педагогический институт. В ту пору там работал известный геометр и ученый-методист Залман Алтерович Скопец, который по сути и создал кафедру геометрии, где начал работать Шокуров. Скопец принадлежал к поколению геометров, лично заставших итальянский период развития алгебраической геометрии. Можно предположить, что в чем-то Залман Алтерович сильно повлиял на Шокурова, сделав его научные интересы более геометрическими.

Никто не знает, как сложилась бы научная судьба Вячеслава Владимировича, если бы другой знаменитый представитель московской школы алгебраической геометрии, Василий Алексеевич Исковских, не поставил перед ним ряд глубоких открытых проблем в бирациональной геометрии трехмерных алгебраических многообразий. Исковских в то время получил классификацию неособых трехмерных многообразий Фано, имеющих минимальный ранг вторых когомологий. Однако при классификации Исковских опирался на две гипотезы. Первая гипотеза утверждала, что антиканоническая система любого трехмерного неособого многообразия Фано содержит неособый дивизор, являющийся поверхностью типа $K3$. Вторая гипотеза утверждала, что, за исключением ровно одного многообразия, на трехмерном неособом многообразии Фано всегда существует прямая. Позднее первая гипотеза стала известна как гипотеза о слоне (мы знаем, что Вячеслав Владимирович не любит это название), а вторая – как гипотеза о прямой. Обе гипотезы были настолько естественны по своей природе, что Исковских принял их на некоторое время как данность, а потом указал на них Шокурову. В тот же год Вячеслав Владимирович блестяще доказал обе эти гипотезы. В дальнейшем методы, использованные Шокуровым при доказательстве гипотезы о слоне, были применены многими математиками мира для доказательства аналогичных результатов для многомерных (возможно, особых) многообразий. Доказательство гипотезы о прямой было настолько сложным, что Шигеру Мукай решил найти альтернативную классификацию трехмерных неособых многообразий Фано, которая не использует существования на них прямой. Он преуспел в этом, создав новый подход к геометрии многообразий Фано.

Теория трехмерных многообразий Фано, в частности их геометрия и классификация, была важным направлением деятельности Вячеслава Владимировича, неразрывно связанным с его результатами о проективной геометрии канонических кривых. Схемные аналоги классических результатов, полученные В.В. Шокуровым, помогли, в частности, получить полную классификацию гиперэллиптических и тригональных многообразий Фано. Более того, эти же результаты понадобились ему для доказательства гипотезы о прямой. Эти же результаты использовал Исковских для описания бирациональных свойств проекций многообразий Фано – ключевой момент в знаменитой конструкции двойной проекции из прямой.

Работы по геометрии трехмерных многообразий Фано снискали В.В. Шокурову мировое признание среди алгебраических геометров. Уже этих двух результатов было бы достаточно, чтобы навсегда вписать его имя в историю алгебраической геометрии. Однако для Вячеслава Владимировича это было только начало.

В 1983 г. В.В. Шокуров публикует статью “Многообразия Прима: теория и приложения” (*Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **47:4** (1983), 785–853). Эта работа завершает решение проблемы Шоттки для приммианов, начатое в работах А. Бовиля и А.Н. Тюрина. В.В. Шокуров доказал критерий, позволяющий определить, когда главно поляризованный приммиан пары Бовиля, удовлетворяющий естественным условиям стабильности, изоморфен якобиану неособой кривой. В качестве основного приложения полученного результата он доказывает знаменитый критерий рациональности Исковских для стандартного расслоения на коники в дополнительном предположении, что база стандартного расслоения на коники является минимальной рациональной по-

верхностью. Результат В. В. Шокурова не усилен до сих пор, а гипотеза Исковских так и остается открытой.

В начале 80-х годов в многомерной бирациональной геометрии произошел революционный прорыв. Классические результаты итальянской геометрии о бирациональной геометрии алгебраических поверхностей, математически строго доказанные только в 60-е годы американскими и советскими математиками, были частично обобщены и, что более важно, переосмыслены для алгебраических многообразий произвольной размерности. Отправной точкой этих исследований стала работа Мори о трехмерных многообразиях, чей канонический дивизор не является численно эффективным. Для неособых трехмерных многообразий Мори показал глубокую связь между бирациональной геометрией и конусом эффективных кривых (часто называемым теперь конусом Мори) этих многообразий, используя гениальный трюк редукции в положительную характеристику. В частности, была доказана полиэдральность этого конуса по модулю кривых, имеющих неотрицательное пересечение с каноническим дивизором, а для экстремальных лучей, имеющих отрицательное пересечение с каноническим дивизором, было доказано существование морфизма, который этот луч стягивает, кроме того, была получена классификация таких морфизмов. Хотя Мори в исходной работе рассматривал только неособые трехмерные многообразия, предложенные им идеи составили фундамент того, что сейчас принято называть программой минимальных моделей или программой Мори. С другой стороны, в отличие от двумерного случая, в многомерном случае в силу естественных причин необходимо рассматривать многообразия с особенностями, но методы, используемые в работе Мори, применимы только к неособым многообразиям. Поэтому требовались новые идеи, позволяющие обобщить результаты Мори для особых многообразий произвольной размерности. Первый шаг в этом направлении был сделан Каваматай, доказавшим существование стягиваний экстремальных лучей, имеющих отрицательное пересечение с каноническим дивизором, на трехмерных многообразиях, имеющих не более чем канонические особенности. Второй шаг был сделан В. В. Шокуровым в статье «О замкнутом конусе кривых трехмерных алгебраических многообразий» ([Изв. АН СССР. Сер. матем., 48:1 \(1984\), 203–208](#)). В этой статье Вячеслав Владимирович доказал локальную полиэдральность замкнутого конуса кривых трехмерного алгебраического многообразия, обладающего не более чем каноническими особенностями, в части, отрицательной относительно канонического класса. А в 1985 г. В. В. Шокуров публикует одну из самых известных своих работ – статью «Теорема о необращении в нуль» ([Изв. АН СССР. Сер. матем., 49:3 \(1985\), 635–651](#)). На нее опирается вся многомерная программа минимальных моделей, поскольку одно из ее следствий есть теорема о стабильной свободе, откуда, в частности, следует существование стягиваний экстремальных лучей, имеющих отрицательное пересечение с каноническим дивизором, на многообразиях любой размерности и существование канонической модели многообразий общего типа, имеющих численно эффективный канонический класс. Незадолго до опубликования этой работы Вячеслав Владимирович анонсировал этот важный и глубокий результат в личной переписке с коллегами. Многие просто не поверили в само существование теоремы о необращении в нуль, настолько утверждение этой теоремы казалось невероятным. Заметим, что в той же работе В. В. Шокуров доказал обрыв трехмерных флипов, существование которых на тот момент еще не было доказано. Позднее в 1988 г. Мори докажет существование трехмерных флипов, чем завершит трехмерную программу минимальных моделей, а Кавамата использует теорему о необращении в нуль для доказательства локальной полиэдральности замкнутого конуса кривых алгебраических многообразий произвольной размерности в части, отрицательной относительно канонического класса.

После доказательства всех основных результатов трехмерной программы минимальных моделей в высших размерностях остались недоказанными существование

флипов, их обрыв и гипотеза об избыточности (свобода от базисных точек плюриканонической линейной системы многообразия, обладающего численно эффективным каноническим классом). Безуспешные попытки доказать теорему о существовании многомерного флипа и техническая сложность доказательства Мори существования трехмерного флипа навели В. В. Шокурова на мысль, что нужно искать новый, принципиально новый, подход к программе минимальных моделей, основанный на индукции по размерности. Для этого Вячеслав Владимирович предлагает изучать бирациональные перестройки, связанные с парами, состоящими из многообразия и эффективного $\mathbb{Q}$ -дивизора на нем, обычно называемого границей. Такие пары в дальнейшем станут называть логпарами, а новую теорию назовут логарифмической программой минимальных моделей или просто логпрограммой минимальных моделей. Большинство уже доказанных результатов обычной программы минимальных моделей сразу были обобщены на логслучай. Но при обобщении некоторых результатов возникли существенные трудности. Например, доказательство Мори было практически невозможно обобщить на логслучай.

В 1992 г. В. В. Шокуров публикует одну из самых знаменитых своих работ “Трехмерные логперестройки” (*Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **56:1** (1992), 105–203), в которой дает принципиально новое доказательство существования трехмерного логфлипа. Эта работа сразу вызвала огромный научный резонанс. Доказательство В. В. Шокурова сложное. Работа занимает около ста страниц. В ней доказано большое число вспомогательных результатов, которые важны сами по себе (например, теорема Шокурова о связности и теорема об обращении присоединения – очень мощный результат, имеющий много независимых применений в бирациональной геометрии). Для доказательства существования трехмерного логфлипа было введено огромное количество новых математически важных понятий, среди которых множество и подсхема логканонических особенностей, логканонический порог, дифферента, дополнение логканонического дивизора, исключительные особенности. Для осознания всего этого была организована большая международная конференция в городе Солт-Лейк-Сити штата Юта в США, где ведущие алгебраические геометры мира скрупулезно изучали текст Вячеслава Владимировича. В результате этой конференции была издана книга “Flips and abundance for algebraic threefolds”. Работа В. В. Шокурова о существовании трехмерных логфлипов не только завершила доказательство трехмерной логпрограммы минимальных моделей, но также простимулировала интерес к многомерной логпрограмме минимальных моделей на многие годы вперед. Большинство введенных им новых понятий стали объектами независимого изучения, которые привели к созданию новых теорий (например, теория дополнений, развитая в дальнейшем в работах Прохорова и самого Шокурова).

В работе “Трехмерные логперестройки” также ярко проявилась математическая интуиция Вячеслава Владимировича. Например, был высказан ряд гипотез о введенных в этой работе логканонических порогах (так называемые гипотезы Шокурова об обрыве), большинство из которых в настоящий момент уже доказаны Алексеевым, де Фернексом, Колларом, Маккернаном, Мустатой и Прохоровым. Интересно, что логканонические пороги достаточно давно изучались, правда под другим именем (экспоненты комплексных особенностей, введенные Варченко), в теории особенностей аналитических функций. Однако никто до В. В. Шокурова не обратил внимания на то, что множества логканонических порогов логпар с определенными естественными свойствами должны удовлетворять условию обрыва возрастающих цепей. Другой пример – В. В. Шокуров доказал формулу субприсоединения, обобщающую классическую формулу присоединения для неособого подмногообразия коразмерности один в неособом многообразии, и заметил с краткими пояснениями, что скорее всего аналог этой новой формулы субприсоединения может быть получен и для подмногообразий произвольной коразмерности, например, для подмногообразий коразмерности два.

В это трудно было поверить, но через несколько лет Кавамата эту формулу нашел и доказал сначала для коразмерности два, а потом и в общем случае.

Несмотря на огромный вклад в современную алгебраическую геометрию, индуктивные идеи, предложенные в работе “Трехмерные логперестройки”, не дали ожидаемых результатов для доказательства существования логфлипов в высших размерностях (в частности, в размерности четыре). В результате этого, большинство геометров оставило надежду на завершение многомерной программы минимальных моделей. Но уже в 2001 г. Вячеслав Владимирович анонсирует доказательство существования четырехмерных логфлипов и предлагает совершенно новый индуктивный подход к доказательству существования логфлипов в любой размерности. В ведущих научных центрах мира снова организуются конференции для изучения этого фундаментального труда. Две самых крупных – в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН и в Институте Исаака Ньютона в Кембридже. В результате этих двух конференций были изданы две книги: “Бирациональная геометрия: линейные системы и конечно порожденные алгебры” (опубликована в “Трудах МИАН” в 2003 г. и содержит стосорокастраничную статью В. В. Шокурова “Prelimiting Flips”) и “Flips for 3-folds and 4-folds” (Oxford Univ. Press). Одним из участников конференции в Москве был профессор Университета Калифорнии (Санта-Барбара) Джеймс Маккернан. Через несколько лет, находясь под влиянием идей Шокурова, Маккернан совместно с Касини, Хэйконом и учеником Шокурова Биркарсом доказали существование канонической модели в любой размерности, откуда, в частности, следовало существование логфлипов в любой размерности!

К 60-летию Вячеслава Владимировича в Эдинбургском международном математическом центре планируется провести международную конференцию, в которой будут участвовать более пятидесяти всемирно известных математиков, трое из которых – лауреаты Филдсовской премии.

В. В. Шокуров продолжает активную научную работу как в одиночку, так и в соавторстве с молодыми математиками. Общаться с Вячеславом Владимировичем всегда радостно и всегда неожиданно. Вячеслав Владимирович – это не только математик с огромным опытом, один из лидеров мировой алгебраической и бирациональной геометрии, но и человек ярких, свежих идей и нестандартных подходов. Все коллеги, друзья и ученики желают ему сохранять научную молодость и остроту восприятия нашей науки в течение долгих лет.

*Ф. А. Богомолов, Ю. Г. Зархин, Вик. С. Куликов,
Ю. И. Манин, В. В. Никулин, Д. О. Орлов,
А. Н. Паршин, Ю. Г. Прохоров, М. Рид, И. А. Чельцов*