Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. П. Чечкина, О сходимости решений краевой задачи в густом каскадном соединении с осциллирующей границей трансмиссионной зоны в случае условий Неймана на границе, *УМН*, 2010, том 65, выпуск 5, 195–196

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9387>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 18:14:59

**О сходимости решений краевой задачи
в густом каскадном соединении
с осциллирующей границей трансмиссионной зоны
в случае условий Неймана на границе**

Т. П. Чечкина

Пусть a, h – положительные действительные числа такие, что интервал $I_h(1/2) := ((1-h)/2, (1+h)/2)$ содержится в $(0, 1)$. Пусть N – большое натуральное число, тогда $\varepsilon = a/N$ – малый дискретный параметр. Пусть также $F(x_1, \xi_1)$ – неположительная 1-периодическая по ξ_1 гладкая функция такая, что $\text{supp}_{x_1} F$ является компактным подмножеством интервала $(0, a)$ равномерно по ξ_1 .

Модельное густое многоуровневое соединение Ω_ε состоит из тела соединения $\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < \Phi(x_1)\}$, где $\Phi \in C^1([0, a])$, $\min_{[0, a]} \Phi > 0$, большого количества тонких прямоугольников $G_j(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - \varepsilon(j + 1/2)| < \varepsilon h/2, x_2 \in (-l_2, 0]\}$, $j = 0, 1, \dots, N-1$, и трансмиссионного слоя $\Pi_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in (0, a), \varepsilon^\alpha F(x_1, x_1/\varepsilon) < x_2 \leq 0\}$, где $0 < \alpha < 1$. Итак, $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 \cup G_\varepsilon \cup \Pi_\varepsilon$, где

$G_\varepsilon = \bigcup_{j=0}^{N-1} G_j(\varepsilon)$. Таким образом, имеется большой перепад высот при переходе от прямоугольников к трансмиссионному слою. Кроме того, параметр ε характеризует расстояние между соседними тонкими стержнями и их толщину, которая равна εh .

Тонкие прямоугольники ε -периодически чередуются вдоль отрезка $I_0 = \{x : x_1 \in [0, a], x_2 = 0\}$. Введем также обозначение $Q_\varepsilon^0 = \{x_1 \in \mathbb{R} : |x_1 - \varepsilon(j + 1/2)| < \varepsilon h/2, j = 0, 1, \dots, N-1\}$.

В Ω_ε рассматривается следующая краевая задача:

$$\begin{aligned} -\Delta_x u_\varepsilon(x) &= f_\varepsilon(x), \quad x \in \Omega_\varepsilon; \\ \partial_\nu u_\varepsilon(x) &= \varepsilon^\mu p\left(x_1, \frac{x_1}{\varepsilon}\right), \quad x \in \Gamma_\varepsilon; \quad \partial_\nu u_\varepsilon(x) = \varepsilon g_\varepsilon(x), \quad x \in \Upsilon_\varepsilon; \\ u_\varepsilon(x) &= 0, \quad x \in \Gamma_1; \quad \partial_\nu u_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \gamma_\varepsilon. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\partial_\nu = \partial/\partial\nu$ – производная по внешней нормали, $\mu \geq 1 - \alpha$ – действительный параметр, $\Gamma_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in (0, a) \setminus Q_\varepsilon^0, \varepsilon^\alpha F(x_1, x_1/\varepsilon) = x_2\}$, Υ_ε – объединение боковых сторон и нижних оснований частей прямоугольников вне слоя (т.е. $G_\varepsilon \setminus \Pi_\varepsilon$), $\Gamma_1 = \{x : x_2 = \Phi(x_1), x_1 \in [0, a]\}$, $\gamma_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon \setminus (\Upsilon_\varepsilon \cup \Gamma_\varepsilon \cup \Gamma_1)$. Заметим, что $[u_\varepsilon] = 0$, $[\partial_{x_2} u_\varepsilon] = 0$ на I_0 , где квадратные скобки обозначают скачок указанной функции.

Относительно заданных функций будем предполагать, что выполняются следующие условия. Не ограничивая общности, считаем, что $f_\varepsilon \in L^2(\Omega_2)$, где $\bar{\Omega}_2 = \bar{\Omega}_0 \cup \bar{D}_2$, $D_2 = (0, a) \times (-l_2, 0)$ – прямоугольник, который заполняется тонкими стержнями, и $f_\varepsilon \rightarrow f_0$ сильно в $L^2(\Omega_2)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Функция g_ε принадлежит $H^1(D_2)$ и $g_\varepsilon \rightharpoonup g_0$ слабо в $H^1(D_2)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Функция $p(x_1, \xi_1)$ является 1-периодической по ξ_1 .

Введем операцию продолжения нулем для функций из пространства $H^1(G_\varepsilon)$:

$$\tilde{y}_\varepsilon(x) = y_\varepsilon \quad \text{при } x \in G_\varepsilon, \quad \tilde{y}_\varepsilon(x) = 0 \quad \text{при } x \in D_2 \setminus G_\varepsilon.$$

Пусть функция

$$v_0(x) = v_0^+(x) \quad \text{при } x \in \Omega_0, \quad v_0(x) = v_0^-(x) \quad \text{при } x \in D_2 \quad (2)$$

является единственным решением задачи

$$\begin{aligned} -\Delta_x v_0^+(x) &= f_0(x), \quad x \in \Omega_0; \quad v_0^+(x) = 0, \quad x \in \Gamma_1; \\ \partial_\nu v_0^+(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega_0 \setminus (\Gamma_1 \cup I_0); \\ -h\partial_{x_2x_2}^2 v_0^-(x) &= hf_0(x) + g_0(x), \quad x \in D_2; \\ v_0^+(x_1, 0) &= v_0^-(x_1, 0), \quad (h\partial_{x_2} v_0^- - \partial_{x_2} v_0^+)(x_1, 0) = \delta_{\mu, 1-\alpha} P(x_1), \quad (x_1, 0) \in I_0; \\ \partial_{x_2} v_0^-(x_1, -l_2) &= 0, \quad (x_1, -l_2) \in I_{l_2}, \end{aligned} \quad (3)$$

которая называется *усредненной задачей* для задачи (1). Здесь

$$P(x_1) = \int_0^1 |F'_{\xi_1}| p(x_1, \xi_1) d\xi_1, \quad (4)$$

$I_{l_2} = \{x : x_2 = -l_2, x_1 \in (0, a)\}$, $\delta_{\alpha, k}$ равен 1, если $\alpha = k$, и 0 в противном случае.

ТЕОРЕМА 1. Решение u_ε задачи (1) удовлетворяет при $\varepsilon \rightarrow 0$ соотношениям

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &\rightharpoonup v_0^+ && \text{слабо в } H^1(\Omega_0, \Gamma_1), && \widetilde{u_\varepsilon} &\rightharpoonup hv_0^- && \text{слабо в } L_2(D_2), \\ \widetilde{\partial_{x_2} u_\varepsilon} &\rightharpoonup h\partial_{x_2} v_0^- && \text{слабо в } L_2(D_2), && \widetilde{\partial_{x_1} u_\varepsilon} &\rightarrow 0 && \text{слабо в } L_2(D_2), \end{aligned}$$

где функции $v_0^+(x)$, $v_0^-(x)$ определены в (2) и (3).

Имеет место сходимость при $\varepsilon \rightarrow 0$ интегралов энергии

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) := \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla_x u_\varepsilon|^2 dx \longrightarrow \int_{\Omega_0} |\nabla v_0^+|^2 dx + \int_{D_2} h|\partial_{x_2} v_0^-|^2 dx =: E_0(v_0).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Сходимость решений и интегралов энергии для многоуровневых соединений с фиксированными длинами отростков доказывалась в [1] и [2], а для соединений с очень тонким трансмиссионным слоем (периодическим и случайным) исследовалась в [3] и [4]. Мы рассматриваем ситуацию, когда трансмиссионный слой достаточно “широкий”, при этом его толщина стремится к нулю, но медленнее, чем ширина зубцов. Аналогичная задача, когда вместо трансмиссионного слоя существует второй класс тонких прямоугольников длины ε^α , $0 < \alpha < 1$, рассмотрена в [5].

Список литературы

- [1] U. De Maio, T. Durante, T. A. Mel'nyk, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **15**:12 (2005), 1897–1921. [2] T. A. Mel'nyk, P. S. Vashchuk, *J. Math. Phys. Anal. Geom.*, **2**:3 (2006), 318–337. [3] Т. А. Мельник, Г. А. Чечкин, *Матем. сб.*, **200**:3 (2009), 49–74; англ. пер.: T. A. Mel'nik, G. A. Chechkin, *Sb. Math.*, **200**:3 (2009), 357–383. [4] G. A. Chechkin, T. P. Chechkina, C. D'Apice, U. De Maio, T. A. Mel'nyk, *Appl. Anal.*, **88**:10–11 (2009), 1543–1562. [5] Т. А. Мельник, Г. А. Чечкин, Т. П. Чечкина, *Пробл. матем. анал.*, **40** (2009), 113–131; англ. пер.: T. A. Mel'nik, G. A. Chechkin, T. P. Chechkina, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **159**:1 (2009), 113–132.

Т. П. Чечкина (Т. P. Chechkina)
Московский инженерно-физический институт
(Национальный исследовательский ядерный
университет)

Представлено В. М. Закалюкиным
Принято редколлегией
01.09.2010